

SHOUT **IT**
SHARE









5287-12

BIHANG

TILL

KONGL. SVENSKA VETENSKAPS-AKADEMIENS

HANDLINGAR.

TIONDE BANDET.

BLANK

100

KONIGL. KATHOL. VIKARIATSGEBIET

HADELINGEN

1871



INNEHÅLL AF TIONDE BANDET.

Sid.

1. SANIO, C. Beschreibung der Harpidien, welche vornehmlich von Dr ARNELL während der schwedischen Expedition nach Sibirien im Jahre 1876 gesammelt wurden	1— 62.
2. RYDBERG, J. R. Om de kemiska grundämnenas periodiska system. Med 2 taflor	1— 31.
3. LINDMAN, C. F. Observations sur les tables d'intégrales définies de Mr. BIERENS DE HAAN	1—268.
4. BOIJE AF GENNÄS, C. O. Sur la sommation des puissances sem- blables des n premiers nombres entiers	1— 6.
5. CLAËSSON, P. Öfver radikalen Cyanur	1— 14.
6. CLAËSSON, P. Öfver normala Cyanurföreningar	1— 18.
7. CLAËSSON, P. Öfver substituerade Cyaniders konstitution	1— 5.
8. CLAËSSON, P. Om Rhodaninsyra	1— 16.
9. BOVALLIUS, C. A new Isopod from the swedish arctic expedition 1883. With 2 plates	1— 13.
10. BOVALLIUS, C. A new Isopod from the Coast of Sweden. With 2 plates	1— 11.
11. BOVALLIUS, C. New or imperfectly known Isopoda. With 5 plates.	1— 32.
12. AGARD, J. G. LINNÉS lära om i naturen bestämde och bestående arter hos växterna, efter LINNÉS skrifter framställd och med motsvarande DARWINS åsigter jemförd	1—135.
13. HAMBERG, A. Hydrografisk-kemiska iakttagelser under den svenska expeditionen till Grönland 1883. II. Med 4 taflor	1— 57.
14. BOVALLIUS, C. On some forgotten genera among the amphipodous Crustacea. With 1 plate	1— 18.
15. CLAËSSON, P. Om Melamin och Melamföreningar	1— 19.
16. BOHLIN, K. Ueber die Bahnelemente des dritten Saturn-Satelliten Tethys	1— 48.
17. EDLUND, E. Note sur la théorie de l'induction unipolaire	1— 8.
18. EICHSTÄDT, FR. Ueber die kristallographischen Constanten des Gadolinit	1— 18.

BESCHREIBUNG

DER

HARPIDIEN,

WELCHE VORNEHMLICH VON DR. ARNELL WÄHREND DER
SCHWEDISCHEN EXPEDITION NACH SIBIRIEN IM
JAHRE 1876 GESAMMELT WURDEN

VON

Dr. C. SANIO.

DER K. SCHWED. AKAD. DER WISS. MITGETHEILT DEN 10. SEPTEMBER 1884.

STOCKHOLM, 1885.
KONGL. BOKTRYCKERIET.
P. A. NORSTEDT & SÖNER.

Inhaltsverzeichnis.

	Pag.
1) Reisebericht	3.
2) Eintheilung des Jeniseigebietes	5.
3) Uebersicht über die Standorte	6.
4) Zahlenverhältnisse der Harpidien-Varietäten in den Terri- torien in Vergleichung mit der darauf verwandten Zeit..	7.
5) Beschreibung der Arten	8.
Hypnum fluitans, L.	8.
—— intermedium, LINDB.	16.
—— uncinatum, HEDW.	18.
—— aduncum, L.	24.
—— lycopodioides, SCHW.	41.
6) Beschreibung der Bastarde	46.
7) Tabellarische Uebersicht über die Varietäten nach ihrer Ver- theilung in den Territorien	53.
8) Feststellung der für die einzelnen Territorien charakteristi- schen Species	55.
9) Vergleichung der sibirischen Harpidien mit denen Europa's (Nachschrift)	55.
10) Druckfehler	61.
11) Verbesserung	62.



Ich sende eine kurze Reiseskizze, die mir Dr. ARNELL zuzusenden so freundlich war, voraus:

»Die ersten Excursionen machte ich in Russland am 15 und 16 Mai in den Umgebungen der kleinen Stadt Kungur im Permischen Gouvernement. Die untersuchte Localität bestand aus dünnen Birkenwäldern und sterilen Kalksteinabhängen am Ufer des Flusses, der die Stadt durchfließt.

Auf der Dampfschiffsreise (24 Mai—4 Juni) auf dem Wassersysteme des Ob von Tjumen am Ufer der Tura nach Tomsk wurden von mir während des kurzen Aufenthaltes, den das Schiff täglich, um Holz einzunehmen, machte, einige Moose gesammelt. Am 24 Mai langten wir zu dem Flusse Tobol an, am 25 Mai zu dem Irtisch, am 27 Mai zu dem Ob, an dessen Vereinigung mit dem Irtisch wir bis zum 29 Mai stehen blieben, weil Eis die Reise auf dem Obstrom aufwärts hinderte. Die untersuchten Stellen waren sämtlich niedrig gelegen, entweder Nadelwälder über dem Bezirke der Ueberschwemmungen oder periodisch überschwemmte Salix-Wälder, oder auch, wie an der Vereinigung des Ob, sehr, niedrige, beinahe völlig baumlose Uferwiesen.

Am 8 Juni langte die Expedition zu Krasnojarsk (56° n. Br.) am Ufer des Jenisei an. Nach einigen Excursionen auf den Granit- und Kalkstein-Bergen in den Umgebungen dieser Stadt reiste die Expedition in Böten langsam den stolzen Fluss hinunter bis Dudinka (69° 35' n. Br.), überall an den Ufern Excursionen machend. Die Localitäten bestanden innerhalb des Bezirkes der Ueberschwemmungen aus sumpfigen, hohen Weidenwäldern, die am Boden und an der Basis der Bäume mehr oder weniger lehnbedeckt waren, oder, ausserhalb der Region der Ueberschwemmungen meist aus flachen Nadelwäldern, in denen Versumpfung und kleine Seen nördlich von der Mündung der Potkamina Tunguska (61° 30' n. Br.) nicht

selten waren. Nahe bei den spärlichen Dörfern waren natürlicher Weise die Nadelwälder zu Wiesen urbar gemacht. Zu Tage tretender Berggrund ist an den Ufern des Jenisei sehr selten: nördlich von Krasnojarsk hatte ich nur 5 mal Gelegenheit an solchen Stellen zu botanisiren und zwar 2 mal auf Kalksteingebirgen, 3 mal auf kalkfreiem Berggrunde. Schon bei Igarskoje ($67^{\circ} 20'$ n. Br.) fing der Nadelwald an, dünner zu werden, somit also den Uebergang zu der waldlosen Tundra vermittelnd. Bei Verschininskoje (69°) [oder Patapovskoje ($68^{\circ} 35'$)] kann man sagen, dass der eigentliche Nadelwald aufgehört hat, doch kommen noch nördlicher zerstreute Lärchen, seltener auch die sibirische Fichte (*Picea orientalis* [L.]) bis Saostrovskoje ($69^{\circ} 40'$) vor. Bei Igarskoje beginnen auch die nördlichen, ungefähr mannshohen Weidenarten (*Salix lanata*, *glauca* etc.) in grösserer Menge aufzutreten; mit *Alnus viridis* zusammen bilden sie an den Ufern der Bäche ebenso wie an den niedrigen Theilen des Flussufers Dickichte. Innerhalb der Abhänge am Flussufer findet man häufig eine Region, die mit zahlreichen, von Weidengebüsch bekränzten kleinen See'n, Ueberbleibseln der Uberschwemmungen, geschmückt ist. In der Umgegend von Dudinka ($69^{\circ} 35'$) bildet das mit sehr zerstreuten Lärchen und noch seltenern Fichten bewachsene Terrain ein unebenes Hügelland, in dem der Berggrund nirgends zu Tage tritt. Versumpfungen und See'n sind hier gemein. Am Ufer stösst man zuweilen auch auf Gebüsch von Weiden und *Alnus viridis* mit zahlreichen kleinen See'n, doch am häufigsten sind die Ufer hoch, mit steilen Abhängen.»

»Am 7 August reisten wir per Dampfschiff weiter nach Norden und langten am 11 August zu dem Malo Briochovskij ostrov (Insel) unter $70^{\circ} 30'$ n. Br. an. Am 13 August führte uns dasselbe Dampfschiff zu dem Nikandrovskij ostrov. Diese beide Inseln sind Deltabildungen in der Mündung des Jenisei, folglich flach und beim höchsten Wasserstande völlig überschwemmt. Oberhalb des lehmigen, häufiger beinahe flachen Ufers, das gewöhnlich nur spärliche Vegetation zeigt, zuweilen auch grüne Wiesen von *Equisetum*-, *Glyceria*-, *Calamagrostis*-, *Carex*- und *Eriophorum*-Arten aufzuweisen hat, liegen ausgedehnte Strecken mit Gesträuch von Weiden und *Alnus viridis* bewachsen, während Moorbildungen aus *Cinclidium*, *Meesea*, *Hypnum nitens*, *Bryum*-Arten das Innere der Inseln einnehmen. Kleine See'n und durchsetzende Flussarme sind

hier auch häufig. Die jährlichen Ueberfluthungen auf diesen Inseln geben hier den Harpidien ein eigenthümliches Aussehen. Alle meine sibirischen Exemplare von *Hypnum aduncum* (mit Ausnahme von den zu *δ molle* gehörenden) sind, soweit ich mich erinnere, im Bereiche der Ueberschwemmungen auf den lehmigen Flussbänken gesammelt. Manche von den anderen Harpidien sind an gleichen Stellen gesammelt, einige aber, z. B. bei Kureika, Dudinka und Tolstojnos, auch in höhern Lagen, ausserhalb der Ueberschwemmungen.»

»Am 25 August trat die Expedition die Rückreise nach Süden an. Bei Tolstojnos (70° 10') blieben wir vom 25 August bis 7 September stehen. Die Landschaft bestand hier wie zu Dudinka aus einem unebenen Hüggellande; Baumvegetation fehlte gänzlich. Bei der Fortsetzung der Reise stromaufwärts wurden fast täglich kürzere Excursionen unternommen. Am 4 October langten wir in Jeniseisk an, wo der Schnee bald den Excursionen ein Ende machte. Am 22 October begann die Rückreise der Expedition auf dem langen Landwege nach Schweden.»

Prof J. SAHLBERG, der als Entomologe die Reise mitmachte, theilt in seiner Abhandlung *Bidrag till nordvestra Sibiriens insektfauna, Hemiptera Heteroptera* in K. Svenska Vetenskaps-Akademiens handlingar Bd XVI, N:o 4, Stockholm, 1878, das untersuchte Terrain am Jenisei in 4 Zonen:

1) *die bergige* (*Territorium montosum*, T. m.), die südlichen Theile, d. h. das Altaigebirge und die Berge Sajan umfassend, die Umgebungen von Krasnojarsk als nördliche Grenze; 2) *die waldige* (*Territorium silvorum*, T. s.), die etwas nördlich von Krasnojarsk beginnt und sich bis zur Mündung der Nischnje Tunguska erstreckt; 3) *die arctische* (*Territorium arcticum*, T. a.), von der Mündung der Nischnje Tunguska bis zu der nördlichen Grenze des Nadelwaldes d. h. bis Verschininskoje (69°); 4) *die kalte* (*Territorium frigidum*, T. f.), gewöhnlich die Tundra genannt, von Verschininskoje bis zum Eismeere ¹⁾.

In nachfolgender Tabelle gebe ich ein Verzeichniss der Excursions-Stellen am Jenisei mit Angabe der Zone, der nördlichen Breite und der Excursions-Data der Hin- und Rückreise:

¹⁾ Nach brieflichen Mittheilungen von Dr ARNELL.

Name der Excursionsstellen.	Zone.	Nördliche Breite.	Datum der Excursionen auf der		Zahl der Excursionstage.
			Reise nach Norden.	Rückreise.	
Zwischen Krasnojarsk und Jeniseisk verschiedene kurze Excursionen...	T. s.	—	16 $\frac{1}{6}$ —18 $\frac{1}{6}$	—	3
Jeniseisk mit Umgebungen	T. s.	58°20'	21 $\frac{1}{6}$ —25 $\frac{1}{6}$	9 $\frac{1}{10}$ —13 $\frac{1}{10}$	10
Antsiferova	T. s.	59°10'	26 $\frac{1}{6}$ —27 $\frac{1}{6}$	—	2
Nasimova	T. s.	59°35'	28 $\frac{1}{6}$ —29 $\frac{1}{6}$	—	2
Jarzova Selo	T. s.	60°10'	—	—	1
Nikulina	T. s.	60°20'	30 $\frac{1}{6}$, 1 $\frac{1}{7}$	1 $\frac{1}{10}$	3
Asinovo	T. s.	61°25'	4 $\frac{1}{7}$ —5 $\frac{1}{7}$	—	2
Potkamina Tunguska (<i>Mündung</i>)...	T. s.	61°30'	6 $\frac{1}{7}$	23 $\frac{1}{9}$	2
Lebjeđevo	T. s.	62° 5'	7 $\frac{1}{7}$	27 $\frac{1}{9}$	2
Tschulkova	T. s.	62°25'	8 $\frac{1}{7}$	—	1
Verkuje Imbutsk	T. s.	63°15'	9 $\frac{1}{7}$	25 $\frac{1}{9}$	2
Alinskoje	T. s.	63°25'	9 $\frac{1}{7}$	—	1
Fatjanova	T. s.	64° 5'	10 $\frac{1}{7}$	23 $\frac{1}{9}$	2
Novo Saljeskaja	T. s.	65° 5'	11 $\frac{1}{7}$	—	1
Mjelnitsa	T. s.	65°30'	11 $\frac{1}{7}$ —12 $\frac{1}{7}$	—	2
Nischnje Tunguska (<i>Mündung</i>).....	T. s.	65°50'	13 $\frac{1}{7}$ —14 $\frac{1}{7}$	—	2
Turukansk	T. a.	65°55'	16 $\frac{1}{7}$ —17 $\frac{1}{7}$	—	2
Ust-Kureika	T. a.	66°20'	19 $\frac{1}{7}$	18 $\frac{1}{9}$	2
Karasino	T. a.	66°55'	20 $\frac{1}{7}$	—	1
Igarskoje	T. a.	67°20'	21 $\frac{1}{7}$	—	1
Plachino	T. a.	68° 5'	22 $\frac{1}{7}$ —23 $\frac{1}{7}$	—	2
Polovinka	T. a.	68°15'	—	15 $\frac{1}{9}$	1
Chantajka	T. a.	68°25'	v. SAHLBERG	besucht	1
Patapovskoje	T. a.	68°35'	25 $\frac{1}{7}$	—	1
Verschininskoje	T. f.	69°	26 $\frac{1}{7}$	13 $\frac{1}{9}$	2
Dudinka (Dudino).....	T. f.	69°35'	29 $\frac{1}{7}$ —8 $\frac{1}{8}$	7 $\frac{1}{9}$ —9 $\frac{1}{9}$	14
Saostrovskoje	T. f.	69°40'	—	10 $\frac{1}{9}$	1
Tolstojnos	T. f.	70°10'	9 $\frac{1}{8}$	25 $\frac{1}{8}$ —4 $\frac{1}{9}$	12
Nikandrovskij ostrov	T. f.	70°20'	—	13 $\frac{1}{8}$ —24 $\frac{1}{8}$	12
Malo Briochovskij ostrov.....	T. f.	70°30'	11 $\frac{1}{8}$ —12 $\frac{1}{8}$	—	2

Es sind also die Harpidien am Jenisei in einer Ausdehnung von c. 182 geographischen Meilen in der Richtung von Süden nach Norden genauer untersucht. Die Mehrzahl der Entdeckungen machte Dr. ARNELL selbst, doch sammelte auch

Prof. J. SAHLBERG hin und wieder, manchmal mit grossem Glücke, Harpidien, die mir gleichfalls zur Untersuchung vorliegen; ausserdem erhielt ich einige von Docent A. N. LUNDSTRÖM im Jahre 1875 am Jenisei gesammelte Harpidien zur Feststellung zugesandt.

Bei dem Anfange der Untersuchung einer Flora steht gewiss die Zahl der Entdeckungen in einem nahezu ähnlichen Verhältnisse wie die Zahl der darauf verwandten Untersuchungstage, falls nicht ungewöhnliche Armuth oder Reichthum bedeutende Verschiebungen veranlassen. Im *Territorium silvsum* wurden an 38 Tagen Untersuchungen angestellt, im *Territorium frigidum* an 43 Tagen, im *Territorium arcticum* nur an 11 Tagen. Darnach wird man sich nicht wundern dürfen, wenn der grösste Numerus auf das *Territorium frigidum* fällt (cf. Schlusstabelle), der kleinste auf das *Territorium arcticum* (cf. ebenda). Trotzdem vermuthe ich, dass die Verhältnisszahlen der Wahrheit näher kommen, als man nach den ungünstigen Vorhältnissen der Untersuchungstage glauben sollte. Es kommt nur zwei-mal¹⁾ vor, bei *H. aduncum vulgare* und *H. uncinatum fuscillum* dass im *Territorium arcticum* eine Varietät fehlt, die im *T. silvsum* und *frigidum* gefunden ist, wo also offenbar a priori das Vorkommen angenommen werden kann. Allen Territorien gemeinschaftlich sind nur 5 Varietäten, nemlich *H. fluitans exannulatum typicum*, *H. uncinatum medium*, *H. aduncum tenue*, *H. lycopodioides lapponicum* und *vernicosum*, also 4 Species, von denen *H. aduncum tenue* mit 14 Standorten die häufigste und verbreitetste ist. 10 Varietäten sind dem *Territorium silvsum* eigen, 6 dem *T. arcticum*, 17 dem *T. frigidum*; bei der geringen Differenz der Untersuchungstage im *Territorium silvsum* und *frigidum* ist das Verhältniss zu günstig für das letztere, dass man nicht daraus einen grössern Reichthum folgern dürfte. Dagegen sind für das *Territorium arcticum* die Daten noch zu unvollständig, um ein Urtheil über seinen Reichthum bilden zu können. Bedenkt man aber, dass in einer so kurzen Zeit, nemlich in 11 Tagen bereits 16 Varietäten im *T. arcticum* nachgewiesen wurden, so ist nach den Gesetzen einer einfacher Progression durch Vermehrung der Untersuchungstage eine so bedeutende Ver-

¹⁾ Nach der Sammlung der Expedition nur einmal; das *Hypnum uncinatum fuscillum* fügte Herr Dr. ARNELL aus der Lundströmschen Collection nach einer Extrication durch Vergeleichung der Data bei.

mehrung zu erwarten, wie sie in Wirklichkeit gar nicht vorhanden sein kann. Trotzdem erhält man damit einen ungefähren Maasstab, um die Vermuthung aussprechen zu dürfen, dass im *Territorium arcticum* die Zahl der Varietäten eher grösser als kleiner wie im *Territorium silvorum* sein dürfte.

In der nachfolgenden Description habe ich wesentlich die Anordnung in meinem Additamentum secundum beibehalten, doch habe ich Aenderungen vorgenommen, wo sie nach den genaueren Einsichten neuerer Untersuchungen geboten waren.

I. *Harpidia exannulata*.

SANIO in Addit. secund. in Harpidiorum cognitionem im Bot. Centralblatt XIII, N:o 13.

Cellulis basalibus (alaribusque) folio propriis, perichaetialibus laevibus, annulo nullo.

1. *Hypnum fluitans* L.

Monoicum et dioicum. Dentibus peristomi subtiliter et irregulariter granuloso punctulatis, granulis nonnunquam in striolas transversas ordinatis, haud limbatis vel spurie strato superiore prominente hyaline et anguste limbatis, limbo obsoleto vel descisse deciduo.

β *exannulatum* (GÜMB.)

Plerumque dioicum, raro monoicum. Foliis secundis vel rarius erectis, cellulis alaribus plerumque amplioribus, triangulari-congregatis, ceteris plus minusve linearibus, sed *var. amphibii brevioribus*, nervo haud percurrente, partibus intertrabaccularibus dentium peristomii superioribus plerumque medio ampliatis.

Da ich ganz sicher diese Varietät auch einhäusig gefunden, so ist die Bestimmung nach dem Geschlechte unsicher geworden; ein sicheres Kennzeichen, dass überall anwendbar ist, bieten die Zellen des breiten Theiles des Blattes, welche stets auffällig kürzer sind als bei der *var. amphibium*, die habituell am ähnlichsten ist. Die Randung finde ich stets gesägt, entweder verwischt oder stumpf oder scharf, der Nerv ist länger, meist weit in den schmalen Theil verlängert, zuweilen bis unter die Spitze fortgeführt, selten aber auch kürzer,

über der Mitte des Blattes im Anfange der Blattverschmählerung aufhörend. Der basale Durchmesser des Nervs schwankt bei den obern Blättern zwischen 0,06—0,10 m. m. Gewöhnlich sind die Blätter verschieden geformt, die im Frühjahre entstehenden, später untern schmaler, lanzettlich oder länglich-lanzettlich, die oberen, — im Sommer nachgebildeten breiter, länglich-oval oder eiförmig lanzettlich, spitz oder meist gespitzt, zuweilen mit pfriemlicher Spitze, der Nerv bei jenen, soweit ich untersucht, dünner, so z. B. in einem Falle 0,07—0,09 m. m. an der Basis, bei den breiten Blättern 0,07—0,10 m. m., in einem andern Falle 0,06—0,07 m. m., bei den breitem Blättern 0,07 m. m. Ein wichtiges Merkmal bietet die unterste Zellreihe der Blätter, die in einer regelmässigen oder mehr oder weniger hin und her gebogenen Linie die Blattinsertion vermittelt, selbst aber ersichtlich zum Blatte und nicht etwa zum Theil zum Stengel gehört. Dabei darf man sich durch ein leichtes Uebergreifen nach dem Stengel nicht stören lassen und ebenso wenig durch die nicht selten stattfindende Anwachsung eines Theiles dieser Reihe an den Stengel; die deutliche Grenze, die diese Reihe von den nächst gelegenen Zellen der Stengel-oberhaut trennt und andererseits der Mangel einer Grenze nach den darübergelegenen Blattzellen sind ein Beweis, dass diese Reihe, wie normal, gleichfalls zum Blatte gehört. Hat diese Reihe, wie nicht selten, den Charakter von Blattflügelzellen, d. h. sind die Zellen aufgeblasen, so ist die Zugehörigkeit zum Blatte schärfer ausgeprägt, als wenn sie den Charakter der übrigen Blattzellen annimmt, und in diesem Falle kommen auch unbedeutende Schwankungen in der Reihenstellung vor. Werden diese Schwankungen bedeutend, geht die Reihestellung verloren, greifen die Blattzellen in unregelmässigem Verbunde zwischen die Stengelzellen hinein, so haben wir es nach meinem Urtheile entweder mit einer Varietät des *H. aduncum* L., der *var. Venturii mihi* zu thun oder einen Bastard mit *aduncum* vor uns, der der *var. Venturii* ähnlich ist. Durch diese Trennungen entgehen wir Schwierigkeiten, die sich auch nach den dürftigen Beobachtungen an Peristome ausprägen, halten die Species rein — und den Weg offen, um schliesslich, wenn Früchte gefunden sein werden, zum definitiven Abschlusse zu gelangen. Nach den vorliegenden Beobachtungen liegt keine Nöthigung vor, eine andere Annahme, nemlich dass die *var. Venturii* und der Bastard *fluitans* $\times$ *adun-*

cum var. exannulatum eine besondere neue Species bilden, für ebenso oder mehr berechtigt zu halten ¹⁾.

Die Suprabasalzellen sind oblong oder oval, zuerst parenchymatisch, mit bald, oder höher hinauf eintretender prosenchymatischer Fügung, die bis zur Spitze bleibt oder sie sind unten in geringer Ausdehnung parenchymatisch, dann in mehr oder weniger beträchtlicher Ausdehnung gemischt par- und prosenchymatisch, schliesslich zur Spitze hin rein prosenchymatisch gefügt. Ihre Länge nimmt von unten nach oben zu, während der Querdurchmesser geringer wird, doch erreichen sie *niemals* eine ansehnliche Länge und bieten in diesem Merkmale einen festen, leicht fassbaren Unterschied von der *var. damphibium*. Die suprabasalen Juxtamarginalzellen sind entweder ebenso lang und breit als die Juxtacostalen oder sie sind etwas oder beträchtlich schmaler bei gleicher Länge, die Juxtacostalen dabei entweder ebenso breit wie die Intermediären (des breiten Blatttheiles) oder breiter. Unter diesen Umständen können die Juxtamarginalen den Intermediären gleichen. Manchmal endlich sind die Juxtamarginalen schmaler und *länger* als die Juxtacostalen. Die Apicalzellen schliesslich sind meist kürzer oder ebensolang wie die vorhergehenden, dabei gern weiter.

a) *typicum**.

Foliis rectis erectisque vel plerumque curvatis, falcatis, acuminatis, rarius subulatis.

* Foliis falcatis, acuminatis, raro subulatis, viridibus, demum emortuis fuscis.

Foliis dimorphis, inferioribus lanceolatis vel oblongo lanceolatis, superioribus ex ovato vel ovali vel oblongo lanceolatis.

1) *Alinskoje* (T. s.); mehrere aufrechte Rasen, bis 8" tief, oben grün, allmählig ins rauchbraune sich verfärbend; obere Blätter eiförmig-länglich-lanzettlich; die Zellen für *var. amphibium paludosum* zu kurz, für *exannulatum* zwar etwas, doch nicht zu lang. Einhäusig. Jedenfalls eine Uebergangsform zu *var. paludosum* ²⁾. Dieselbe Varietät besitze ich aus Schweden (ARNELL!) und aus Königsberg in Preussen, wo ich sie selbst mit Früchten gesammelt und in *Commentatio* p. 3 unter *paludosum* p. 3 aufgeführt habe. So wol bei den schwedischen wie bei den preussischen Exemplaren sind die obern Intertrabeculartheile der Zähne wie bei *exannulatum* geformt. Cf. darüber die Note in *Additam. sec.* p. 2!

¹⁾ Siehe weiter unten.

²⁾ Dr. ARNELL hat alle jene Sibirischen Harpidien-Formen, für welche kein anderer Sammler angegeben wird, selbst gesammelt.

2) *Fatjanova* (T. s.); ein Rasen; schön gelbgrün, zuletzt rauchbraun, ziemlich fein, gefiedert, mit sichelförmig gekrümmten Blättern, die stengelständigen zuweilen mit rothem Anfluge; bis 3" hoch.

3) *Novo Saljeskaja* (T. s.); mehrere Rasen, grün mit gelblichem Anfluge, zuletzt rauchbraun, ziemlich fein, gefiedert, über 2" lang. Dabei auch eine robustere form. *Einige fructificirende Stengel waren monöcisch = H. fluitans?* ARNELL in sched.

4) *Mjelnitsa* (T. s.); ein Rasen, grün, hin und wieder mit gelblichem Anfluge, zuletzt schmutzig rauchbraun, ziemlich fein, unregelmässig gefiedert, über 2" hoch.

5) *Patapovskoje* (T. a.); mehrere Rasen, niedrig, schmutziggrün, mit einigen eben entdeckelten Früchten von ovaler an der Basis verschmälter Form 25. 7. 1876.

6) *Dudinka* (T. f.); dicht rasig, fast 5" tief, fein, gelbgrün, zuletzt rauchbraun.

*** *fumigatum* *

Foliis dimorphis, summis lutescentibus vel flavescenti-viridibus, mox *fuscis*, acuminatis, raro subulatis.

Foliis superioribus ovato vel oblongo-lanceolatis, falcatis.

1) *Ust-Kureika* (T. a.); dichter Rasen bis 6" tief, die Spitzen gelblich grün, bald braun sich verfärbend.

2) *Igarskoje* (T. a.); einige Stengel von mir eingesprengt zwischen *Hypnum fluitans palulosum* gefunden, 1" und darüber lang; Spitzen gelblichgrün, bald rauchbraun sich verfärbend oder selbst mit dieser Farbe übergossen.

3) *Plachino* (T. a.); ein kleiner Rasen, locker, bis 5" lang, die Spitzen gelbgrün, früh sich rauchbraun verfärbend.

***** *purpurascens* SCHPR.

Foliis dimorphis, superioribus curvatis vel falcatis, sensim acuminatis, subulatis, caulinis saltem *purpureis*, demum *fuscis*.

Foliis inferioribus rectis erectisque, late lanceolatis, superioribus ovato-lanceolatis.

1) *Ust-Kureika* (T. a.); tiefe, lockere Rasen; Stengel dünn, bis 8" lang; nur die Stengelblätter roth gefärbt, Astblätter gelbgrün; Früchte länglich, fast horizontal gekrümmt, halbreif 19. 7. 1876.

***** *cuspidatum* *

Foliis undique *erectis* vel subpatulis, apicalibus in cuspidem acutam convolutis, inferioribus anguste, superioribus late lanceolatis, acuminatis, subulatis.

Foliis obsolete serrulatis, alaribus valde evolutis, usque ad nervum extensis, nervo sub apice soluto, d. b. 0,07—0,08 mm.

1) *Tolstoj nos* (T. f.); einige Stengel zwischen *H. stramineum*; Stengel über 2—3" lang, dünn; Blätter bleich gelbgrün, zuletzt rauchbraun; ♀.

b) *acutum* *

Foliis erectis, subsecundis vel secundis, rectis vel curvatis, plerumque dimorphis, *acutis*.

* Foliis subsecundis, curvatis, apicalibus haud convolutis, sed patulis, viridibus vel lutescentibus, mox vel serius fuscis.

Foliis subaemulis ovato et oblongo-lanceolatis vel dimorphis, inferioribus oblongo lanceolatis; superioribus ex ovali vel ovato lanceolatis.

1) *Dudinka* (T. f.); tiefer Rasen, bis 6", mit ockergelben Spitzen, ziemlich bald rauchbraun sich verfärbend, robust, gefiedert; Blätter ziemlich gleich geformt.

2) *Jenisei* in T. f. ohne besonderem Standort leg. LUNDSTRÖM 29. 8. 1875; dünn, blassgrün, über 2" lang, schliesslich blass rauchfarbig.

*** *assimile* SANIO ¹⁾

¹⁾ Dieser Varietät sehr ähnlich sind 2 andere, von denen die eine zu *H. fluitans* α *fontanum*, die andere zu *H. aduncum* γ *Hampei* gehört. Ich füge hier die Diagnosen bei:

Hypnum fluitans L.

α *fontanum* SANIO

*** *vittatum* SANIO in Hb., in litt. et sched.

Glauco-viride, foliis apice rubentibus quasi rubro vittatum; foliis subaemulis, ovato- vel plerumque oblongo lanceolatis, vel oblongis, acutis, repandulis vel obsolete vel passim manifeste serrulatis; nonnumquam decurrentibus; basalibus folio propriis, alaribus amplioribus, suprabasalibus ovalibus oblongisve, parenchymaticis vel promiscue par- et prosenchymatice textis sursum angustioribus parum longioribus angustius oblongis, prosenchymatice textis, longius sursum latius linearibus, apice brevioribus, denuo oblongis, juxtamarginalibus non mutatis, nervo sub apicem producto d. b. 0,08 m. m.

In Norvegiae tractus Dovre monte Snaehaettan leg. cl. ZETTERSTEDT d. 2. 9. 1858, misit SETH.

H. aduncum L.

γ *Hampei* SANIO

b) *Venturii* SANIO in Hb., in litt. et sched.

Foliis plerisque vel ex parte apicem ipsorum versus rubentibus, inferioribus angustioribus, lanceolatis vel angustius oblongo-lanceolatis, superioribus late oblongo-lanceolatis, acuminatis vel oblongo-ovatis cuspidatis, repandulis vel obtuse, apicem versus acute serrulatis vel serratis, decurrentibus, parum curvatis vel subsecundis vel falcatis, secundis; alaribus inflatis, haud raro ad nervum extensis, basalibus partim excurrentibus, suprabasalibus ovalibus oblongisve, sursum angustioribus, linearibus, satis longioribus, apice brevioribus, a basi parenchymaticis, mox immixte, denique pure prosenchymatice textis, juxtamarginalibus similibus vel parum satisve angustioribus, haud vel plus minusve longioribus, nervo longius supra medium producto,

Foliis subsecundis, leviter curvatis, apice rubentibus, nonnunquam secus marginem vel dorsum medium deorsum rubro superfusis.

Foliis inferioribus anguste oblongo-superioribus anguste ovato-lanceolatis.

1) *Fatjanova* (T. s.); 2) Rasen, locker, bis 3" lang, dünn, blassgrün, zuletzt blass rauchbraun.

Hierher gehört auch als *** *fuscum* SANIO in Addit. secund. in Harpid. Cognit. l. c. p. 3, welches gleichsam ein rauchfarbig übergossener *assimile* vorstellt. An diese Form schliesst sich eine mit violetten, spitzen Blättern, die Dr. ARNELL in Schweden aufgefunden als ***** *violascens* *.

***** *orthophyllum* MILDE.

Foliis erectis, rectis vel leviter curvatis, aemulis (plerumque dimorphis, superioribus acutis), late lanceolatis, acutis, apicalibus sublaevis.

1) *Verschininskoje* (T. f.); lockerer, aufrechter Rasen, über 5" lang; Stengel ziemlich robust, Blätter aufrecht anliegend, gelbgrün, ziemlich früh sich rauchbraun verfärbend, ♂.

γ *falcatum* SCHPR.

Monoicum. Foliis falcatis, dimorphis, inferioribus lanceolatis, superioribus ex ovali vel ovato oblongove lanceolatis, sensim acuminatis, subintegerrimis vel repandulis vel obtuse obsolete serrulatis; alaribus parum evolutis, nonnunquam inflatis, ceteris basalibus vel etiam sequentibus proximis ovalibus oblongisve, majoribus (haud proprie coloratis), deinde angustioribus, linearibus, sursum sensim sed parum longioribus, apice non brevioribus, jam prope basin prosenchymatice textis; juxta-marginalibus a juxtacostalibus haud vel vix diversis, nervo supra medium producto, d. b. 0,07—0,09 mm. Perichaetialibus laevibus, interioribus usque supra medium nervosis; capsula ovali, basi angustata, dentibus peristomii *aurantiacis*, haud limbatis, subtilissime punctulatis, partibus intertrabecularibus partis dentium superioris medio inflatis; sporis fuscis, laevibus; d. 0,016—0,02 mm.; annulo nullo.

foliorum angustiorum tenuiore, d. b. 0,06—0,10 m. m., foliorum latiorum crassiore, d. b. 0,08—0,14 m. m.

In Tirol austriaco prope Trientum in alpe Cevedale et prope Pergine (Dr. VENTURI!); prope Lienz Tirolis mediae »im Bächlein der Hofalpe« (rev. GANDER!); in Sudetis ad lacum »kleiner Teich in lapidibus« (SCHULZE!); in Borussiae orientalis circulo Angerburg in paludibus domini Popiollen (CZEKAJ!).

Ueber die Stellung der var. *unculus* siehe weiter unten.

Apice pallide flamenti viride, nonnunquam rubro superfusum, mox pallide fuscum.

1) *Alinskoje* (T. s.); ich fand nur einen einzigen Stengel mit ganz reifer, bedeckelter Frucht eingesprengt. 2. 7. 1876.

2) *Patapovskoje* (T. a.); kleiner Rasen, Stengel höchstens 1" lang, relativ dünn, Früchte eben entdeckelt! 25. 7. 1876.

♂ *amphibium* SANIO

Monoicum. Foliis subsecundis vel secundis, nonnunquam undique patulis et vix in unum latus versis, curvatis vel falcatis, subhomocormis; alaribus minus evolutis, suprabasalibus satis, nonnunquam valde elongatis, nervo haud percurrente.

c) *paludosum* SANIO

Caule satis elongato, foliis viridibus, demum fuscis, laxè vel densius dispositis, subsecundis vel secundis, curvatis falcatisve, oblongo- vel lineari-lanceolatis, acuminatis, serrulatis, nervo ad vel supra medium, nonnunquam longius in partem angustam producto, d. b. 0,04—0,08 m.m.; apicalibus brevioribus, juxta marginalibus suprabasalibus haud vel parum angustioribus, haud longioribus, suprabasalibus jam prope basin prosenchymatice textis; capsula oblonga, horizontali-curvata.

1) Mündung des Flusses *Potkamina Tunguska* (T. s.); bläulich-grün, schlaff, lockerblättrig, gefiedert, bis 7" lang; reichlich; steril; aufrecht.

2) *Alinskoje* (T. s.); spärlich, niedrige Räschen, die Stengel ziemlich dicht beblättert, höchstens kaum 2" lang, verworren, schmutzigrün, bald blass rauchbraun sich verfärbend; mit reifen, zum Theil entdeckelten Früchten, 2. 7. 1876.

3) *Ust-Kureika* (T. a.); 1), mehrere Rasen, dicht geschlossen, niedrig; Spitzen bleichgrün, bald blass rostbraun; Blätter ziemlich dicht, allmählig lang zugespitzt. 2), ein einzelner Rasen, höher, Spitzen hellgrün, bald rauchbraun sich verfärbend.

††† *pennulosum* *

Foliis laxius dispositis, vix subsecundis, patentibus, curvatis, anguste oblongo- vel lineari lanceolatis, acuminatis, repandulis vel obsolete serrulatis; cellulis suprabasalibus anguste linearibus, ratione magnitudinis satis elongatis, longe sursum parenchymatice textis, juxtamarginalibus satis angustioribus, haud longioribus, apicalibus brevioribus; nervo supra medium producto, d. b. 0,05 m.m.

1) *Igarskoje* (T. a.); 3 Rasen, locker, kaum 2" lang; Stengel dünn, spärlich oder reichlicher gefiedert; Blätter blass rauchbraun,

an der äussersten Spitze blassgrün. Durch die abstehenden, etwas gekrümmten Blätter fiederförmig.¹⁾

h) *Arnellii* *

(Densifolium); foliis inferioribus anguste, superioribus latius oblongo-lanceolatis; longe et anguste acuminatis, a basi repandulis, sursum, dentibus sensim majoribus, serratis; basalibus amplioribus, oblongis, incrassatis (folio propriis), alaribus paucioribus fere solis basalibus ampliatis, suprabasalibus prosenchymatice textis; inferioribus oblongis, mox latius linearibus, sursum sensim sed valde elongatis, angustioribus, nervo supra medium producto, d. b. 0,06—0,08 mm. Purpurascens, solis summis apicibus flaveni-viridibus, demum fuscum. Sexum non inveni. Satis robustum.

1) *Verschininskoje* (T. f.). Ich fand von dieser neuen Varietät nur 4 Stengel eingesprenzt.

ε *Rotae* (DE NOT.)

Foliis subfalcatis, inferioribus anguste, superioribus latius lanceolatis, longe, superioribus brevius acuminatis, acute vel obtuse serrulatis; alaribus inflatis, suprabasalibus foliorum inferiorum oblongis, sursum sensim angustioribus, elongatis, latiorum longioribus, utrorumque jam prope basin prosenchymatice textis, nervo foliorum inferiorum *percurrente*, d. b. 0,05—0,06 mm., superiorum sub apice soluto, d. b. 0,08—0,10 mm.

1) *Polovinka* (T. a.); ein Rasen, locker, aufrecht, c. 5" hoch, hellgrün, zuletzt blass rauchbraun. Steril.

Die Anomalie in der Länge der Blattzellen bestätigt sich nicht bei andern Exemplaren mit heteromorphen Blättern, z. B. einem Exemplare aus Schweden bei Säbrå von Dr. ARNELL gesammelt.

II. *Harpidia intermedia*.

SANIO in Addit. sec. in Harpid, cognit. l. c. p. 7.

Cellulis basalibus distinctis alaribusque (si adsunt) superioribus folio propriis; perichaetialibus internis sulcatis; annulolato.

Folia semper plus minusve secunda.

Cellulae basales distinctae sunt a caulinis subsitis et parietum crassitudine et colore, singulas rarissime subexcurrentes vidi.

¹⁾ Diese Varietät gehört wol besser unter a, *alpinum* SCHPR.

SANIO nachträglich.

2. *Hypnum intermedium*. LINDB.

Dentibus peristomii inter se distantibus, haud limbatis, (fere irregulariter punctulatis vel transverse punctulato-striolatis) ¹⁾ vel parte inferiore et interiore striatis, supra et apicem versus irregulariter punctulatis.

α verum SANIO.

Dioicum. Cellulis folii suprabasalibus plus minusve parenchymatice oblongis, parietibus transversis rectangulis vel obliquis; cellulis sequentibus prosenchymaticis, linearibus, longioribus, sed nunquam valde elongatis, varietatum sequentium *β* et *γ* angustioribus.

Foliis subhomöomorphis, hamatis, ex ovali vel oblongo-ovali vel oblongolanceolatis, acuminatis vel cuspidato-subulatis, parte angusta canaliculatis vel convolutis, integerrimus vel apice serrulatis, juxtamarginalibus haud proprie distinctis vel plerumque angustioribus, haud vel parum vel satis longioribus; nervo in partem angustam producto, d. b. 0,03—0,04 mm.

Viride vel lutescenti-viride, demum pallide fuscum.

1) *Kantajka* (T. a.); 3 Räschen, niedrig, c. 2" hoch, grün, zuletzt rauchbraun, etwas locker beblättert. J. SAHLBERG.

2) *Tolstojnos* (T. f.); reichlich, niedrige, dichte Rasen, Stengel aufrecht, 1½" hoch, wenig oder reichlich gefiedert, ziemlich dünn, gelbgrün, schliesslich bleich rauchbraun.

3) *Malo Briochovskij ostrov* (T. f.); eingesprengt mit *H. lycopodioides vernicosum*, *H. intermedium* × *vernicosum*, *H. aduncum robustius*. Stengel oben ockergelb, bald braun, mit spärlichen Zweigen, c. 1½" lang, mässig fein.

4) *Jenisei* (T. f.), ohne besondere Standortsangabe 25—27 Aug. 1875. LUNDSTRÖM; 4 eingesprengte Stengel von mir aufgefunden. Grün, allmählich blass rauchbraun werdend.

** *arcticum* *

Tenuius usque pertenuis, ramis exerescentibus frequenter innovans, foliis interrupte minoribus, remotioribus et majoribus, densioribus, subhomöomorphis, hamatis vel circinato-hamatis, ex subrotundo vel ovali lanceolatis, acuminatis, subulatisque vel cuspidato-subulatis, integerrimis vel subintegerrimis, parte angusta convolutis, reti a forma typica non diverso, juxtamarginalibus angustioribus, haud vel parum longioribus, nervo ad vel in partem angustam producto, d. b. 0,03—0,04 mm.

¹⁾ Die in Klammern eingeschlossene Sculptur fehlt bei den Exemplaren Sibiriens.

1) *Verschininskoje* (T. f.); ein lockerer, aufrechter Rasen, fast 4" hoch, ockerfarbig. Zweihäusig, mit jungen und alten Seten.

2) *Tolstoj nos* (T. f.); feiner wie das vorhergehende, teilweise fadenförmig, verworren oder fast aufrecht, zuerst grün, dann ockerfarbig, männlich.

***** *Cossoni* SCHPR.

Robustum, foliis majoribus, reti ampliore.

Foliis falcatis vel hamatis, ex ovali lanceolatis, cuspidato-longe subulatis, apice anguste convolutis, integerrimis, apice nonnunquam singulatim serrulatis, alaribus nullis, suprabasalibus plerumque parenchymatice textis, oblongis, sursum modice longioribus, angustioribus, demum prosenchymatice textis, juxta-marginalibus satis angustioribus longioribusque; nervo in partem angustam producto, d. b. 0,06—0,07 mm.

Densifolium, apice lutescens, mox brunneum¹⁾.

1) *Malo Briochovskij ostrov* (T. f.); ein aufrechter Rasen, über 2" hoch.

β revolvens (Sw.).

Monoicum. Foliis hamatis vel circinato-hamatis, satis densis vel densissimis, ex ovali vel oblongo-ovali vel oblongo lanceolatis, cuspidato-subulatis, integerrimis vel apice subintegerrimis vel ibidem parcissime serrulatis, parte angusta convolutis vel subconvolutis vel raro subplanis, suprabasalibus plerumque prosenchymatice textis vel raro passim singulis parietibus transversis intermissis mixtis, sequentibus sensim valde elongatis, pure prosenchymaticis, juxtamarginalibus angustioribus, longioribus, nervo in partem angustam producto, d. b. 0,03—0,06 mm.

† fuscum *

Foliis fuscis, apicalibus flaveni-virescentibus vel lutescentibus.

1) *Dudinka* (T. f.); kleines, lockeres Räschen; Stengel c. 1½" lang, ziemlich dünn, einfach oder spärlich ästig, mit Blüthen.

2) *Tolstoj nos* (T. f.); einige Stengel von mir eingesprengt gefunden, dünn, fast einfach.

†† brunneum *

Foliis brunneis, apicalibus summis lutescentibus.

1) *Dudinka* (T. f.); mehrere lockere Rasen, fast schwarz mit gelben Spitzen, Stengel robust, gewunden, bis 3" lang, reichlich gefiedert, der var. *Cossoni* von *Malo Briochovskij ostrov* sehr ähnlich.

2) *Tolstoj nos* (T. f.); spärlich, eingesprengt. Stengel einfach oder mit vereinzelt, schwachen Aestchen, ebenso robust wie sub 1 und ebenso gefärbt.

¹⁾ Stellt die Var. †† giganteum Limpvr. vor. (Nachträglich).

††† violascens *

Foliis junioribus omnibus vel summis pallide viridibus exceptis purpurascentibus vel violaceis demum fuscis.

1) *Verschininskoje* (T. f.); mehrere Rasen von verschiedener Grösse, 2—4" hoch, bis zur Spitze hellroth oder an der Spitze gelbgrün oder nur leicht roth angeflugen, zuletzt ockerfarbig, mit reifen, bedeckelten Früchten 26. 7. 1876. Stengel ziemlich dünn, fiederig verästelt, etwas locker beblättert. Als Besonderheit hebe ich hervor, dass die Oeffnungen in den Fortsätzen des innern Peristoms, sonst bei den Harpidien geschlossen, bei diesem Exemplare ziemlich weit aufklaffen.

2) *Verschininskoje* (T. f.); sehr wenig; Stengel robust, einfach oder mit vereinzelt, kurzen Aesten, violett, zuletzt schwarzbraun. Blätter dicht geschlossen.

3) *Dudinka* (T. f.); 2 Rasen, aufrecht, c. 3" hoch, robust, ziemlich dicht beblättert, oben schmutzig roth, zuletzt dunkel rauchbraun.

III. *Harpidia adunca*.

SANIO in Addit. sec. in Harpid. cognit. l. c. p. 9.

Cellulis basalibus plus minusve excurrentibus, perichaetialibus internis sulcatis, annullo lato.

3). *Hypnum uncinatum*. HEDW.

Monoicum (vel raro monoico-polygamum floribus singulis hermaphroditis) vel raro dioicum, dentibus peristomii inter se distantibus usque ad marginem paullo dilutius tinctum transverse striatis; cellulis basalibus foliorum a caulinis subsitis crassitie parietum, colore et nonnunquam contentis distinctis.

Die Blätter sind in ihrer Aufeinanderfolge meist nicht gleichartig, sondern ändern beträchtlich in der Form des basalen, breiten Theiles: bei einem Exemplare, das ich selbst am 2 December 1883 bei Lyck gesammelt, wo also über das Alter der obersten Blätter kein Zweifel bestehen konnte, fand ich die Basis der obern Blätter eiförmig-länglich, während sie an den untersten Blättern eiförmig oder oval war. Das nähere vergleiche unten.

Bezüglich der Excurrenz der Basalzellen des Blattes kommen hier wie bei dem sibirischen *H. lycopodioides* viele Grade vor: manchmal ist sie sehr deutlich, die Basalzellen mehr oder weniger über die Insertionsgrenze herabsteigend und beträchtlich zugespitzt, in andern Fällen dagegen wenig hervortretend,

die Basalzellen mit den darunter gelegenen Stengelzellen im stumpfwinklig parenchymatischen Verbande, streckenweise geradezu blatteigen. Alle diese Modificationen kann man an demselben Stengel beobachten. Indess was bei *H. intermedium* sehr seltene Ausnahme ist, Verlängerung einzelner Zellen über die Insertionsgrenze, ist hier allgemeiner Gesetz, so dass eine Versetzung dieser Species zu den *Harpidiis intermediis* unthunlich ist.

Blattflügelzellen kommen stets vor, sind aber meist nur in geringer, selbst sehr geringer Zahl vorhanden, gar nicht oder merklich erweitert, selten aufgeblasen.

Decurrenz der Blätter habe ich nur selten beobachtet und zwar als Ausnahme bei einem von SAHLBERG bei Tolstoj nos gesammelten Exemplare, wo die Blätter manchmal mit einer erhabenen Linie herablaufen.

α Suetum. SANIO.

Foliis falcatis vel hamatis plus minusve usque ad basin sulcatis.

**** medium** SANIO.

Foliis rarius subhomoeomorphis, magnitudine solum, inferioribus nonnunquam basi minoribus, variantibus, plerumque heteromorphis, inferioribus ex basi brevioribus, minore, plerumque angustiore ovali vel ovata, superioribus ex basi longiore, plerumque latiore ovato-oblonga vel elongato-ovata vel oblongo-ovalis lanceolatis, sensim acuminatis, subulatis, a basi subintegerrimis vel repandulis vel obsoletius, sursum evidenter serrulatis vel raro apicem versus grossius serratis; suprabasalibus ovalibus oblongisve, sursum sensim angustioribus, parum vel modice vel satis longioribus, plus minusve flexuosis, rete plerumque angustum constituentibus, juxtamarginalibus haud proprie distinctis, nec angustioribus nec longioribus, apicalibus non brevioribus vel rarius parum longioribus brevioribusve, nervo plus minusve longe in partem angustam producto, d. b. 0,04—0,09 mm.

Foliis viridibus vel lutescenti-viridibus, demum ochraceis vel pallide vel rarius obscure fuscis.

1) *Antsiferova* (T. s.); ein Rasen, niederliegend, Stengel über 1" lang, Blätter grün, zuletzt rauchbraun, mit halbreifen Früchten. 27. 6. 1876.

2) *Nasimova* (T. s.); einige niederliegende Rasen, etwas locker, schmutzig grün, mit ganz reifen, zum Theil entdeckelten Kapseln

29. 6. 1876; Kapseln länglich oval oder länglich; Furchung der Blätter weniger deutlich.

3) *Nikulina* (T. s.); ein lockerer Rasen; Spitzen bleichgrün, dann olivengrün, zuletzt rauchbraun; Stengel dicht gefiedert, über 2" lang.

4) *Asinovo* (T. s.); sehr ungewöhnliche Form, aufrechte, lockere Rasen, der höchste fast 5" lang, bleichgrün, zuletzt dunkel rauchbraun. Stengel ziemlich dünn.

5) *Novo Saljeskaja* (T. s.); ein Rasen, aufrecht, hellgrün, zuletzt hellrauchbraun, fast 3" hoch, mit reifen eben entdeckelten Früchten 11. 7. 1876.

6) *Turukansk* (T. a.) an periodisch überschwemmten Baumstämmen; mehrere Rasen, niederliegend, verworren, schmutziggrün, zuletzt rauchbraun.

7) *Ust-Kureika* (T. a.); ein Rasen, niederliegend, Spitzen hellgrün, dann schmutziggrün, schliesslich blass rauchbraun, feinstengelig, mit ganz reifen Kapseln 19. 7. 1876.

8) *Karasino* (T. a.); mehrere kleine Rasen, verworren, sehr niedrig, höchstens 1" lang, grün, zuletzt hellrauchbraun, mit halbreifen Früchten 20. 7. 1876.

9) *Igarskoje* (T. a.); spärlich, locker, kurz, bleichgrün, zuweilen braunröthlich übergossen, bald olivengrün, zuletzt blass rauchbraun.

10) *Patapovskoje* (T. a.); mehrere niederliegende Rasen, feinstengelig, verworren, mit grünlich gelben Spitzen, bald blass und rein ockerfarbig.

11) *Dudinka* (T. f.); mehrere niedrige Rasen, ziemlich feinstengelig, hellgrün, schliesslich rauchbraun. Ich fand eine halbreife Frucht und eine offenbar reife, von der sich nicht angeben lässt, ob sie entdeckelt ist oder gewaltsam zerschnitten; eine dritte Frucht war eben im Anschwellen begriffen; jedenfalls ist die Zeit der Frucht reife sehr auseinander gerückt; 2. 8. 1876.

12) *Tolstoj nos* (T. f.); mehrere aufrechte, schöne Rasen, fast 3" hoch, hellgrün, schliesslich blass rauchfarbig; Stengel dünn, locker beblättert.

13) *Tolstoj nos* (T. f.); 2 niedrige Rasen, niederliegend, verworren, hellgrün, schliesslich blass rauchbraun, gleichfalls dünn und locker beblättert.

14) *Tolstoj nos* (T. f.); 2 Rasen, aufrecht oder dicht verworren, 2" hoch, hellgrün, schliesslich blass rauchbraun und dann teilweise sehr deutlich am Nerv oder auf der Blattfläche roth gefärbt.

15) *Tolstoj nos* (T. f.); ein mit Schlamm durchsetzter Rasen, grün, zuletzt rauchbraun.

16) *Tolstoj nos* (T. f.); eingesprengt zwischen *Hypnum aduncum tenue*, kurze, dünne Stengel von hellgrüner Farbe.

17) *Nikandrovskij ostrov* (T. f.) in Weidengebüschs¹⁾; auf Schlamm erwachsen, niedrig, bis 1" hoch, aufrecht, mit spärlichen, häufig verkümmerten Aestchen.

¹⁾ Zusatz des Herrn Sammlers. S.

18) *Nikandrovskij ostrov* (T. f.); mehrere Rasen, auf Schlamm ausgebreitet, grün; Stengel niederliegend, bis 2" lang, fiedrig verästelt.

19) *Malo Briochovskij ostrov* (T. f.); niedrige Räschen, auf Schlamm erwachsen; Stengel bis über 1" lang, unregelmässig fiederig oder spärlich beästelt, dünn, grün, zuletzt rauchbraun.

20) Jenisei in T. f. ohne besondere Standortsangabe leg. LUNDSTRÖM 1875; niedrig, aufrecht, blassgrün, zuletzt blass rauchbraun.

21) Jenisei in T. f. ohne besondere Standortsangabe leg. LUNDSTRÖM 1875; aufrecht, gelbgrün, zuletzt rauchbraun.

22) Bei *Samarova* am Flusse *Ob*; ein über 3" hoher, aufrechter Rasen, gelbgrün, bald ins ockerfarbige übergehend, ziemlich dünn, dicht beblättert.

†† fuscillum *

Usque ad apicem pallide fuscum vel summo apice pallide viride, cetero antecedenti simile.

Foliis aemulis, inferioribus vel *superioribus* minoribus, vel *superioribus* basi parum longioribus.

1) *Novo Saljeskaja* (T. s.); 2 Rasen, locker, fiederig beästelt, über 2" hoch, mit eben anschwellenden Früchten 11. 7. 1876.

2) Jenisei in T. f. ohne besondere Standortsangabe $\frac{25}{8}$ — $\frac{27}{8}$ 1875 leg. LUNDSTRÖM; Rasen dicht, niedrig, aufrecht, feinstengelig, hellrauchbraun, meist mit hellgrünen Spitzen.

3) *Bjelaja Gora* bei *Surgut* am *Ob*; einige kleine Rasen, niedrig (unter einem Zolle), verworren.

*** plumosum SCHPR.

Foliis circinato-hamatis, apicibus longe et anguste acuminatis subulatisque loricae instar concatenatae intricatis, cetero *var. medio* simile, sed libenter tenuius.

1) *Fatjanova* (T. s.); 2 Rasen, schön hell oder gelbgrün, dicht verworren, niederliegend, zum Theil mit noch bedeckelten, reifen Früchten 23. 9. 1876.

2) *Ust-Kureika* (T. a.); mehrere kleine Rasen, schön grün, verworren, niederliegend, dünnstengelig.

3) *Kalinski* am *Ob*; bleichgelbgrün, dicht verworren, niederliegend, dicht fiederig beästelt, mit reifen, bereits entdeckelten Früchten 31. 5. 1876. Die Peristomzähne dieses Exemplars, das in seinen vegetativen Theilen durchaus nicht an eine Hybride denken lässt, weichen auffällig durch den breiten, hellen Saum ab, auch ist nur die untere Hälfte derselben quer gestreift, die obere dagegen verchieden punktirt. Unter diesen Umständen halte ich die Frucht für hybrid, d. h. durch Befruchtung mit den Spermatozoen eines andern Hypnum, vielleicht des *H. lycopodioides* β *vernicosum* entstanden, da diese bedeutende Abweichung zu allein und unvermittelt dasteht, um sie für eine normale zu halten.

4) *Samarova* (Flora des Ob); mehrere kleine, lockere, niederliegende Rasen; Stengel meist unter 2", ziemlich dicht gefiedert, schmutzig grün, mit gut erhaltenen vorjährigen Früchten 26. 5. 1876.

β plumulosum. SCHPR.

Foliis laevibus vel parte angusta obsolete sulcatis, falcatis vel hamatis.

Von der in meinem Addit. secund. in Harpid. cognit. l. c. p. 11 sub † angegebenen robustern Varietät bietet die sibirische Sammlung Dr. ARNELLS keine Belege; bei dieser Gelegenheit und wegen Veränderung der Zeichen will ich eine neue hierher gehörige Varietät, die ich in meinem Additamentum unter *H. fluitans β exannulatum* (GÜMB.) von Ranen »Tverfjeld« auführte, hier erwähnen:

[† *Arnellii* *

Hypnum fluitans β exannulatum SANIO quoad citatum in Addit. sec. in Harpidiorum cognit. l. c. pag. 11!

Foliis ex basi ovali vel ovata abrupte breviter lanceolatis, acutis, a basi obsolete repandulis vel rectangule serrulatis, apicem versus argute serratis.

Räschen niedrig, c. 4 c. m. hoch, der Stengel durch Innovation sich fortsetzend, aufrecht, mit seltenen Fiederästchen. Die untersten Blätter sind wie in andern Fällen viel kleiner, nervenlos, aber in der Form den oberen ähnlich.

Die basalen Zellen des Blattes sind in Form, Inhalt und Grösse von den suprabasalen nicht verschieden, von den darunter gelegenen Stengelzellen, die ohne besonderen Inhalt sind, dagegen durch die obigen Kennzeichen deutlich unterschieden. Die Basis der Zellen der Basalreihe ist entweder nach unten stark gewölbt oder spitzwinklig, zuweilen selbst horizontal, in andern Fällen verlängern sich einzelne etwas mehr nach unten; die Blattflügelzellen, in der Zahl schwankend, zuweilen nur 2, meist mehrere, liegen entweder mit der Basalreihe in gleicher Höhe oder sie greifen am Stengel tiefer herab oder bilden eine aus mehreren übereinander liegenden Zellen bestehende Gruppe erweiterter, farblose Zellen. Die suprabasalen Zellen sind entweder länglich oder breit linealisch, parenchymatisch oder stelloweise prosenchymatisch gefügt, nach oben werden sie etwas länger, zuletzt rein prosenchymatisch, etwas geschlängelt, an der Spitze selbst wieder kürzer, länglich; die Juxtamargi-

nalen nicht besonders unterschieden. Der Nerv, an der Basis 0,05—0,06 mm. breit, läuft weit in den verschmälerten Theil aus.

Die Farbe der Rasen ist oben lebhaft gelbgrün, zuletzt wird sie dunkel rauchbraun.]

††† tenue SANIO.

Tenue, *Hypno adunco tenui simile*.

Foliis subaemulis, falcatis vel hamatis, ex basi ovata vel oblongo-ovata lanceolatis, sensim acuminatis, subulatis, parte superiore obsolete vel evidentius serrulatis, alaribus paucis vel satis numerosis, reti vel fere a basi prosenchymatico, denique modice longo vel a basi parenchymatico, sursum sensim longiore, denique prosenchymatico, modice elongato, subflexuoso; juxtamarginalibus haud proprie distinctis, apicalibus non brevioribus, nervo in partem angustam producto, d. b. 0,02—0,05 mm.

1) *Tolstoj nos* (T. f.); mehrere niedrige Rasen auf Baumrinde; Stengel niederliegend, dicht gefiedert, kurz, Blätter oben grün, bald blass rauchbraun werdend, mit reifen, grösstentheils entdeckelten, etwas gekrümmten, kleinen Früchten (ungefähr über 1 mm. lang) von cylindrischer, an der Basis verschmälterter Form 25. 8. 1876.

2) *Nikandrovskij ostrov* (T. f.); auf fauler Baumrinde, sehr dürrig, locker; Stengel kurz, wenig beästelt, locker beblättert, oben hellgrün, zuletzt rauchbraun.

** implexum *

Tenue, prorepens, pinnatum, viride, demum fuscum; foliis falcatis vel hamatis vel circinato-hamatis, subaemulis vel superioribus basi longiore instructis, ex basi ovali vel ovata vel ovato-oblonga lanceolatis, sensim longe et anguste acuminatis, subulatis, apicibus loricae instar concatenatae intricatis, a basi integerrimis vel repandulis vel obsolete, sursum evidenter serrulatis, laevibus vel parte lanceolata inferiore singulatim sulcatis vel sulcis obsolete exaratis, alaribus paucis, ampliatis, basalibus distinctis cum caulinis subsitis parenchymatice conjunctis vel varie acute excurrentibus, suprabasalibus oblongis, sursum mox vel denique prosenchymatice textis, sensim angustioribus, subflexuosis, modice vel satis elongatis, linearibus, juxtamarginalibus haud proprie distinctis, apicalibus brevioribus; nervo in partem angustam producto d. b. 0,02—0,05 mm.

1) *Jeniseisk* (T. s.); mehrere Rasen, locker, niederliegend, schmutziggrün.

2) *Antsiferova* (T. s.); 2 Rasen, hellgrün, allmählig dunkler werdend, schliesslich blass rauchbraun; Stengel meist kriechend. Früchte fast reif, schmal, cylindrisch, gekrümmt, 27. 6. 1876.

3) *Jarzova Selo* (T. s.); ein kleiner Rasen auf Baumrinde erwachsen, dicht verschlungen, Stengel kriechend, schön grün, zuletzt blass rauchbraun. A. N. LUNDSTRÖM! ¹⁾

drepanioides *

Foliis falcatis, ex basi ovali vel ovata abruptius breviter lanceolatis, acuminatis breviterque subulatis, a basi obtuse serrulatis vel obsolete repandulis undulatisque, apicem versus integerrimis, laevibus, planiusculis, apice convolutis; basalibus distinctis, alaribus paucioribus, pellucide inflatis; suprabasalibus elongato oblongis, a basi pros- et parenchymatice textis, sursum angustioribus, satis elongatis, prosenchymaticis, subflexuosis; juxtamarginalibus haud proprie distinctis, apicalibus brevioribus, nervo duplice, tenui, brevi, medium haud attigente; floribus *dioicis*, masculis in caulibus propriis numerosis, perigonialibus oblongo-ovalibus, cuspidatis, enerviis; perichaetialibus oblongo-lanceolatis, sulcatis, nervo sub apicem producto; operculo acuto, annulo lato, dentibus peristomii usque ad marginem transverse striatis.

Caulē erecto, elongato, pinnato, apice dilute, mox sordide viridi, demum pallide fusco.

Unterscheidet sich von *Hypnum fertile* SENDTN., das ich als Varietät sub c unter β *plumulosum* stelle, durch den aufrechten, locker gefiederten Stengel, die nur an der Basis schwach gezähnelten Blätter und den längern Nerv der Perichaetialen.

1) *Antsiferova* (T. s.); sehr wenig; Früchte unreif; Kapseln cylindrisch, gekrümmt, 26. 6. 1876.

4) *Hypnum aduncum* L.

Dioicum; dentibus peristomii inferne contiguis, margine pallide limbatis, transverse usque ad limbum plerumque laevem striatis, praecedentis densius trabeculatis; cellulis folii basalibus sine ullo discrimine inter caulinas subsitas transcendentibus.

Blattflügelzellen sind bei dieser höchst polymorphen Species, deren Varietäten erst nach zahlreichen vergleichenden Untersuchungen, wenn man, wie gewöhnlich, die Früchte nicht untersuchen kann, als zu einander gehörig erkannt werden,

¹⁾ Auch bei Krasnojarsk nach einem mir nachträglich von Dr. ARNELL zugesandten Proöbchen.

stets vorhanden, aber in der Zahl und Erscheinungsweise sehr verschieden. Bei manchen Varietäten sind sie nur in geringer Zahl vorhanden und meist gar nicht oder nur unbedeutend erweitert; in der Mehrzahl der Fälle bilden sie eine Gruppe erweiterter Zellen, manchmal blasig angeschwollen, an den Blattflügeln, in andern Fällen endlich setzen sie sich durch eine basale Reihe bis zum Nerv fort und bilden dann eine blatteigene Basis. Aus ihrer Configuration lässt sich meist kein Schluss auf Varietäten ziehen.

Decurrenz der Blätter ist bei manchen Varietäten häufig, fehlt dagegen bei andern nach den bisherigen Beobachtungen ganz.

Das Blattgewebe ist sehr mannigfaltig und zur Erkennung der Varietäten wichtig.

Der Blattrand ist meist ganz oder nur mit undeutlichen, geschweiften Hervorragungen versehen, doch kommen auch Varietäten mit deutlich gesägten oder gezähnelten Blättern vor.

Die einseitige Richtung der Blätter ist bei manchen Varietäten nur schwach angezeigt und zuweilen selbst aufgehoben; von diesen Formen bis zu denjenigen mit hackenförmigen Blättern giebt es sehr viele Zwischenstufen.

Im Habitus erinnern die Varietäten dieser Species theils an fremde *Hypna*, z. B. *H. cuspidatum* oder selbst an Species, die SCHIMPER in die Gattung *Brachythecium* vereinigt hat, oder sie werden andern Harpidien entweder ähnlich oder äusserlich ganz gleich, dem *Hypnum intermedium verum* z. B. das *H. aduncum vulgare*, dem *H. intermedium Cossoni* das *H. aduncum Sendtneri*. Trotzdem sind sie in ihren wesentlichen Kennzeichen einander durchaus gleich und da es mir gelungen, auch ohne Zuziehung der Früchte durch Vergleichung des Blattbaues und der Insertionen sämtliche Varietäten als zu einer Species gehörig zu erkennen, so ist es klar, dass sich auch durch die vegetativen Organe trotz ihrer Mannigfaltigkeit ein Faden hindurchzieht, der sie alle verknüpft.

α *Blandowii* SANIO.

Habitu variabile; foliis rectis, apice ipsorum plerumque leviter curvatis, rarius apice subsecundis, inferioribus latius angustiusve lanceolatis, superioribus latoribus, plerumque ovatis.

Die Varietäten dieser Section zeichnen sich meist durch Weichheit, Zartheit und reines Grün der Blätter aus; Abweichungen von dieser Farbe, meist ins gelbliche, sind ziemlich selten.

Die Annäherung an Glieder der Sect. β *pseudofluitans* und der γ *Hampei* ist manchmal gross, doch durch Vergleichung noch immer eine Entscheidung möglich gewesen.

Die Blattflügelzellen sind hier sehr ansehnlich ausgebildet, das Blattgewebe bei den breiteren Blättern kurzzelliger, der Nerv feiner, die Randung entweder ganz oder nur undeutlich durch schwache Hervorragungen verunebnet. Der Nerv gehört zu den feinsten der Species, läuft bis zur Mitte oder etwas über diese hinaus.

Decurrenz der Blätter ist häufig angedeutet vorhanden.

a) *pungens* H. MÜLL.

Tenue; foliis apicalibus in cuspidem rectum vel parum curvatum laevem convolutis, inferioribus lanceolatis vel ovato-lanceolatis, superioribus ovatis, acutissime cuspidatis, subintegerrimis vel repandulis vel obsoletissime denticulatis, reti foliorum latiorum brevioris, oblongo, nervo supra medium producto, foliorum latiorum non crassioris, d. b. 0,03—0,05 mm.

Foliis inferioribus undique patentibus, superioribus ovatis, accumbentibus, apice parum curvatis vel rectis, alaribus parum vel plus minusve ampliatis; suprabasalibus foliorum angustiorum ovalibus majoribus, sequentibus proximis oblongis et linearibus, omnibus parenchymatice textis, denique sursum magis magisque clongatis, linearibus, prosenchymaticis, juxtamarginalibus parum angustioribus; suprabasalibus foliorum latiorum ovalibus, mox oblongis, parenchymaticis, sursum angustioribus, parum longioribus, angustius oblongis, mox prosenchymatice textis, nonnunquam oblongo-linearibus, juxtamarginalibus haud vel parum angustioribus, non longioribus, apicalibus brevioribus.

1) Mündung des Flusses *Potkamina Tunguska* (T. s.); mehrere Rasen, robuster, niedrig, niederliegend, blass ockergelb, zuletzt etwas blasser, strohfarbig. Blätter bis zur Spitze zuweilen abstehend, manchmal deutlich einseitwendig, habituell manchmal der *var. polycarpon* ähnlich, aber nach genauer Vergleichung zur *var. pungens* gehörig.

2) *Verkuje Imbutsk* (T. s.); zwei Rasen, niederliegend, feinstenglig, grün, zuletzt ockerfarbig; Stengel einfach oder mit spärlichen Aestchen, Blätter zur Spitze hin anliegend; Spitze ziemlich gerade, lang, stechend zugespitzt. SAHLBERG!

c) *polycarpon* BLAND.

Foliis undique patentibus erectisve vel subsecundis, apicalibus haud in cuspidem rectam vel leviter curvatam convolutis, sed patulis vel conniventibus; inferioribus praecocibus lanceolatis, superioribus aestivis ovatis, cuspidatis, obsoletissime repandulis vel subintegerrimis; cellulis foliorum inferiorum suprabasalibus oblongis, parenchymaticis, mox longioribus prosenchymatice textis, denique valde elongato-linearibus, prosenchymaticis, foliorum ovatorum brevioribus, suprabasalibus ovalibus, parenchymaticis, sursum sensim sed parum angustioribus, denique prosenchymatice usque ad apicem oblongis vel foliorum longius cuspidatorum oblongo-linearibus, juxtamarginalibus haud proprie distinctis, apicalibus non vel modo subapicalium brevioribus, nervo foliorum angustorum et latorum aequali, d. b. 0,02—0,04 mm., vel infra medium desinente vel ad medium producto vel medium superante.

1) *Jeniseisk* (T. s.); Frühlingsform, die schmalen Blätter oben sehr locker, zart, klein, grün, schliesslich blass; ebenso klein die eiförmigen Blätter. Gehört zu den zartesten Formen der *var. polycarpon*, die ich bisher gesehen.

2) *Njiolevka* (am Zusammenflusse des Ob und Irtisch); sehr wenig, grün, schliesslich braun oder schwarzbraun. Blätter etwas einseitwendig.

d) *intermedium* SCHPR.

Foliis inferioribus lanceolatis, sursum sensim latioribus, oblongo-lanceolatis, demum oblongo-ovatis vel elongato-ovatis, cuspidatis, apicalibus laxè conniventibus, haud pungentibus; inferioribus obsolete denticulatis vel repandulis, superioribus minus exasperatis, undulatis, repandulis vel raro uno alterove denticulo exasperatis, alaribus foliorum inferiorum haud ampliatas vel inflatis, ceteris suprabasalibus oblongis, sursum sensim elongatis, linearibus, jam haud procul a basi prosenchymatice textis, apicalibus brevioribus, juxtamarginalibus haud proprie distinctis, nervo supra medium producto, d. b. eadem ac foliorum latorum 0,04—0,05 mm. vel tenuiore 0,03 mm., suprabasalibus foliorum superiorum oblongis, paucioribus vel altius sursum extensis, deinde angustioribus, longioribus, linearibus, apicalibus brevioribus, juxtamarginalibus angustioribus, longioribus, nervo supra medium producto, d. b. 0,04—0,05 mm.

Diese Varietät ist der vorigen häufig sehr ähnlich, aber meist robuster, normal untergetaucht, während jene die Spitzen

wenigstens, häufig lockenförmig verflochten, über das Wasser streckt. Die Zahl der eiförmigen Blätter ist ausserdem nur gering, bei jener beträchtlich, häufig auch gelangt sie, wie in diesen Fällen, gar nicht zur Bildung dieser obersten Blätter, dazu ist auch bei den breitem Blättern das intermediäre Zellgewebe der Blätter länger gestreckt, linealisch. Es giebt Formen der *var. intermedium*, die in der Blattform dem *polycarpon* ganz ähnlich sind, aber wegen des langgestreckten Zellnetzes von mir zu *intermedium* gestellt werden.

** foliis densioribus, pinnis remotioribus.*

1) Mündung des Flusses *Potkamina Tunguska* (T. s.); ein Rasen, gelbgrün; Stengel einfach oder spärlich ästig, ziemlich robust.

2) *Igarskoje* (T. a.); 2 niedrige Räschen, gelbgrün, ziemlich robust, dicht beblättert.

*** *laxum* SCHPR.

Tenerum, laxum, molle, viride; foliis remotis, undique patentibus vel reflexis, apicalibus laxe conniventibus, vernalibus oblongo-lanceolatis, basi angustatis, acuminatis, obsolete denticulatis (basalibus excurrentibus, haud proprie distinctis), alaribus a vicinis haud proprie segregatis, parum ampliatis, ceteris basalibus proximis ovalibus, amplioribus, deinde oblongis breviterque et latius linearibus, mox prosenchymatice textis, linearibus, angustioribus, sursum magis magisque elongatis, denique valde longis, apice vix brevioribus, juxtamarginalibus parum angustioribus, nervo ad partem angustiore producto, d. b. 0,03—0,04 mm.; foliis superioribus aestivis oblongis, apice angustatis, brevissime cuspidatis, subintegerrimis vel passim obsolete repandulis, alaribus haud proprie segregatis, ampliatis, ceteris a basi oblongis, mox late linearibus, elongatis, longe sursum parenchymaticis, deinde a medio folio prosenchymatice textis, multo brevioribus, oblongis, apice ellipticis, nervo vix ad medium producto, d. b. 0,04—0,05 mm.

Nonnunquam adsunt inter folia latiora nunnula breviora, oblongo-ovata, cuspidata, cellulis a basi oblongis, amplioribus, parenchymaticis, mox prosenchymatice oblongis, apicem versus prosenchymatice linearibus, alaribus haud proprie sejunctis, quadratis vel rectangulis, nervo ad medium producto, d. b. 0,03 mm.

Durch die grüne, beim Trocknen blasse Farbe, die Schlaffheit, Weichheit und die locker gestellten Blätter ist diese Varietät leicht von der vorigen zu unterscheiden.

1) *Lebjedevo* (T. s.); ein Räschen, c. 3" hoch, sehr zart, Stengel nur mit spärlichen Aestchen.

γ *Hampei* SANJO.

Foliis secundis, falcatis vel subsecundis, parum curvatis, plerumque heteromorphis, frequenter decurrentibus, nervo plerumque satis tenui, capsula minore, oblonga.

Die Varietäten dieser Section erkennt man meist leicht an den einseitswendigen, sichelförmig gekrümmten Blättern und dem feinem Nerv. Ausnahmen kommen vor, indem einzelne Varietäten auch Formen mit wenig gekrümmten oder fast aufrechten Blättern haben, die man wegen der sonstigen Uebereinstimmung nicht abtrennen kann; auch der Nerv wird manchmal ziemlich stark, so dass eine Unterscheidung von der Section ϵ schwierig wird.

Die reine grüne Farbe, Decurrenz der Blätter und die Vergleichung mit den benachbarten Varietäten geben hier ein Mittel, um auch ohne Früchte schliesslich eine zufriedenstellende Einreihung herbeizuführen.

Bei der Mehrzahl der Varietäten dieser Section sind die untern Blätter schmaler, lanzettlich, die obern eiförmig lanzettlich im weitern Sinne; eine Ausnahme bietet *var. aquaticum*.

Der Nerv ist verschieden lang, hört aber meist früher oder später im Blattgewebe auf, doch bei der *var. percurrentis* läuft er bis zur Spitze.

Meist sind diese Varietäten zarter, dünner als die Varietäten der Section ϵ , ausserdem sind sie meist grün oder gelbgrün gefärbt, während bei der Section ϵ das nur selten vorkommende Grün dunkler ist und meist durch bräunlichgelb oder gelbbraun ersetzt wird.

c) *Kneiffii* SCHPR.

Foliis inferioribus (praecocibus) angustioribus, superioribus ovato-lanceolatis, nervo in folii reti desinente tenuiore, cellulis intermediis elongatis, linearibus, prosenchymatice textis.

Foliis falcatis, inferioribus angustioribus, oblonge lanceolatis, superioribus latioribus, ovato-lanceolatis, anguste acuminatis subulatisque, a basi minute obtuse denticulatis vel repandulis, sursum subintegerrimis vel usque ad apicem minute obtuse serrulatis, decurrentibus; alaribus parum evolutis vel satis ampliatis, ceteris basalibus (indistincte excurrentibus) suprabasalibusque oblongis, amplioribus, mox sursum angustioribus, satis longe linearibus, subflexuosis, a basi parenchymaticis, mox

promiscue par- et prosenchymatice, deinde pure prosenchymatice textis, juxtamarginalibus haud proprie distinctis vel parum angustioribus brevioribusque, apicalibus non brevioribus, nervo supra medium producto, d. b. 0,04—0,06 mm.

Erectum, pinnatum, viride vel lutescens, aureo-nitidulum,¹⁾ denique ochraceum; foliis superioribus satis densis, secundis, inferioribus remotiusculis, patulis.

Plachino (T. a.); ein Rasen, 4" hoch, ziemlich robust.

†††† gracile *

Pertenuē, crassitudine fili, subsimplex vel plerumque pinnatim ramulosum, mox stramineum, foliis inferioribus erectis, subrectis, lanceolatis, superioribus subfalcatis, subsecundis, ovato-lanceolatis, acuminatis subulatisque, parce et passim denticulatis (basalibus indistincte excurrentibus), alaribus ampliatis, supra-basalibus oblongis, parenchymaticis, sursum sensim angustioribus, longius linearibus, mox prosenchymaticis, partis angustae linearibus, juxtamarginalibus haud vel parum angustioribus, longitudine non mutatis, nervo ad vel supra medium producto, d. b. 0,03—0,04 mm.

1) *Kalinski* vid Ob (Flora des Flusses Ob); zwei Rasen, niederliegend, dünn; Stengel wenig verworren, verlängert, c. 1 $\frac{1}{2}$ " lang, spärlich beästelt, hellgrün, bald strohfarbig, fadenförmig.

d) *tenue* SCHPR.

Foliis superioribus ex basi latiore ovata vel ovali abruptius lanceolatis, cellulis partis latae intermediis brevioribus, nervo haud percurrente, tenuiore.

Foliis inferioribus lanceolatis, superioribus falcatis vel hamatis, rarius ex transverse-ovali vel ex subrotundo, plerumque ex latius angustiusve ovato abrupte brevius longiusve lanceolatis, acuminatis, plerumque subulatis, subintegerrimis vel undulatis vel repandulis vel obsolete denticulatis serrulatisve; alaribus parum mutatis vel plus minusve ampliatis inflatisve, supra-basalibus paucis vel pluribus ovalibus vel rarius oblongis, sursum angustius oblongis, mox prosenchymatice textis, apicem partis latae versus oblongo-linearibus vel linearibus, nonnunquam per partem latam ellipticis, partis angustae oblongo-linearibus vel linearibus, juxtamarginalibus haud proprie distinctis vel angustioribus vel quoque longioribus vel angustioribus brevioribusque; raro simul cum juxta-costalibus satis di-

¹⁾ Von mir nachträglich als ††† anrescens * unter *Kneiffii* unterschieden.

stinctis, illis angustioribus, longioribus, hisce longioribus amplioribus, intermediis brevioribus, nervo plerumque ad vel supra medium producto, raro infra medium desinente, d. b. 0,02—0,05 mm. (0,037 mm. medio quadraginta trium mensurarum crassitudinum extremarum).

Diese Varietät unterscheidet sich wesentlich von *var. Kneiffii* durch die plötzlich lanzettlich zugespitzten Blätter und durch das kürzere Zellnetz im breitem Theile des Blattes, das entweder elliptisch oder länglich oder länglich linealisch ist, während es bei *Kneiffii* bald verlängert linealisch wird.

Sehr ähnlich wird der *var. tenue* das *H. uncinatum plumulosum tenue*, doch ist dieses stets durch die distincte Excurrenz auch im sterilem Zustande zu unterscheiden.

1) *Zwischen Krasnojarsk und Jeniseisk* (T. s.); ein Räschen, grün, Stengel mässig fein.

2) *Jeniseisk* (T. s.); mehrere lockere Rasen, grün, zuletzt rauchbraun; Stengel fein, die Frühlingsblätter oben.

3) *Jeniseisk* (T. s.); ein Rasen, gelbgrün, niederliegend, locker; Stengel fein, höchsten bis 1" lang, fiederig, SAHLBERG!¹⁾

4) *Antsiferova* (T. s.); ein Rasen, gelbgrün, verworren, ziemlich weich; Stengel dicht beblättert, dicht fiederig beästelt, mässig fein, etwas kurz.

5) *Antsiferova* (T. s.); 2 locker verworrene Rasen, blassgrün, bald schmutzig strohfarbig, härtlich; Stengel fein, dicht fiederig beästelt.

6) *Antsiferova* (T. s.); mehrere lockere, verworrene Rasen, gelbgrün, schliesslich rauchbraun; Stengel fein, fiederig beästelt, Blätter bald durch Fäulniss zerstört.

7) *Asinovo* (T. s.); 2 lockere Rasen, grün, schliesslich rauchbraun, Stengel mässig fein, verlängert, spärlich fiederig beästelt.

8) Mündung des Flusses *Potkamina Tunguska* (T. s.); 2 Rasen, auffällig verlängert, bis 4" hoch, aufrecht, grün, schliesslich rauchbraun; Stengel gefiedert, mässig fein; ein dritter Rasen ist niedriger, wahrscheinlich niederliegend, etwas verworren.

9) *Tschulkova* (T. s.); mehrere kleine Rasen, auf Schlamm erwachsen, hellgrün, mässig fein, kurz (unter 1"), locker, aufrecht(?).

10) *Verkuje Imbutsk* (T. s.); mehrere kleine Rasen, gelblichgrün, locker, niedrig; Stengel mässig fein, locker beästelt.

11) *Novo Saljeskaja* (T. s.) am überschwemmten Ufer;²⁾ mehrere kleine Rasen, gelblich grün; Stengel fein, fadenförmig, verlängert, verworren, fiederig beästelt.

12) *Novo Saljeskaja* (T. s.); mit dem vorigen, mehrere niedrige Rasen schön gelblichgrün; Stengel fein, kürzer, spärlich beästelt.

13) *Novo Saljeskaja* (T. s.); mit dem vorigen, ein kleines Räschen; Stengel sehr fein, noch dünner als bei N:o 11, haarförmig, kürzer.

¹⁾ Der nähere Standort nachträglich von Dr. ARNELL ermittelt. S.

²⁾ Nachträglicher Zusatz von Dr. ARNELL.

14) *Turukansk* (T. a.); ein Rasen auf schlammigem, periodisch überschwemmten Boden, niedrig, mässig fein, grün, etwas ins blaugrüne ziehend; Stengel spärlich beästelt.

15) *Karasimo* (T. a.); mehrere lockere, niederliegende Rasen, hellgrün, zuletzt rauchbraun; Stengel kurz, ziemlich fein, locker beblättert, spärlich oder reichlicher fiederästig.

16) *Polovinka* (T. a.); einige Räschen einer sehr eigenthümlichen Form mit aufrechten, fast unverästelten, fadenförmigen Stengeln, über 2" hoch, blassgrün zuletzt ockerfarbig.

17) *Polovinka* (T. a.); wie Nr 16, Stengel aber etwas stärker, etwas häufiger fiederig beästelt, hellgelblichgrün, aufrecht, c. 2" hoch, SAHLBERG!

18) *Saostrovskoje* (T. f.); 2 Rasen, schmutzig grün, zuletzt rauchbraun, aufrecht, über 3" hoch, locker; Stengel lockerblättrig, fiederig beästelt, mässig fein, SAHLBERG! ¹⁾

19) *Saostrovskoje* (T. f.); auf Schlamm an periodisch überschwemmten Stellen, einige kleine, niedrige Rasen, gelbgrün, Stengel robuster als bisher, kurz, unter 1", fiedrig beästelt, dicht beblättert.

20) *Tolstoj nos* (T. f.); mehrere dicht verfilzte, niedrige Rasen, gelblichgrün, zuletzt rauchbraun; Stengel mässig fein, unregelmässig, fiederig beästelt, unter 1", dicht verworren. Dem *H. uncinatum plumulosum tenue* täuschend ähnlich, aber nach seinen Merkmalen hierher gehörig.

21) *Nikandrovskij ostrov* (T. f.); mehrere Rasen, auf Schlamm erwachsen, aufrecht, bis 2" hoch, gelbgrün; Stengel mässig fein, locker beblättert, spärlich, manchmal gar nicht beästelt.

22) *Nikandrovskij ostrov* (T. f.): dem vorigen ganz ähnlich, aber stellweise dichter beästelt.

23) *Nikandrovskij ostrov* (T. f.); mehrere Rasen, den vorigen beiden N:rn ähnlich, aber weniger locker beblättert.

24) *Samarova* (Flora des Flusses Ob); mehrere Rasen, grün, manchmal bis zur Spitze ockerfarbig; Stengel c. 2" lang, mässig fein, regelmässig fiederig beästelt, aufrecht.

25) *Kalinski* vid Ob (Flora des Flusses Ob); mehrere niederliegende, etwas verworrene Rasen, blassgrün, stellenweise bis zur Spitze ocker- oder strohfarbig; Stengel mässig fein, unregelmässig fiederig beästelt, c. 1½" lang.

26) *Njiolevka* (am Zusammenflusse von Ob und Irtisch) auf periodisch überflutheten Wiesen; ein kleines Räschen zwischen *H. aduncum percurrans* (siehe unten); Stengel unter 1", mässig fein, ziemlich dicht beblättert, fiederig beästelt, blassgrün.

27) *Kungur* im Permischen Gouvernement; einige kleine Räschen, schmutzig- oder gelbgrün, stellweise strohfarbig; Stengel mässig fein, unter 1", fiederig beästelt, ziemlich dicht beblättert.

28) *Zwischen Kungur und Ural* im Permischen Gouvernement; 2 Räschen, schmutziggrün, stellweise röthlichgelbgrün; Stengel robuster als bisher, gewöhnlich unter 1", unregelmässig fiederig beästelt.

¹⁾ Nach Dr. ARNELL. Bei meiner Schedula habe ich als Sammler Dr. ARNELL angegeben.

*** *filiiforme* BERGGREN in Musci et Hepaticae Spetsbergenses
ex Arnell in sched.

Foliis erectis, leviter subsecundis, aliquantulum curvatis vel falcatis, ex ovato cuspidatis, acuminatis, apicalibus nonnunquam in cuspidem curvatam laxè convolutis, alaribus ampliatis, ceteris a basi ovalibus vel oblongis proximisque sequentibus majoribus, deinde minoribus, oblongis, demum oblongo-linearibus, nervo ad medium producto, d. b. 0,03—0,05 mm.

Stengel fein, fast fadenartig, in der Stärke dem Berggrenschen Originale von Spitzbergen ähnlich, aber mehr verlängert, der *var. pungens* H. MÜLLER manchmal täuschend ähnlich, aber durch die Blattrichtung mehr oder weniger verschieden.

1) *Tolstoj nos* (U. f.) in Thälchen am Flussufer, wo der Schnee lange im Sommer bleibt (ARNELL); Zahlreiche Rasen von verschiedener Höhe $1\frac{1}{2}$ —3" hoch, grün oder gelbgrün, zuletzt rauchbraun oder ockerfarbig; Stengel aufrecht, fast einfach oder fiederig, von verschiedener Dicke, fadenförmig oder etwas dicker.

**** *densum* *

Robustius, abbreviatum; foliis inferioribus praevalentibus, satis densis, undique patentibus, lanceolatis vel ovato-lanceolatis, passim et sparse obsolete denticulatis, cellulis alaribus haud vel parum ampliatis, ceteris basalibus et sequentibus pluribus oblongis, majoribus, sensim sursum angustioribus, mox linearibus, longioribus, nervo in partem angustam producto, d. b. 0,04—0,06 mm.; foliis superioribus ex ovato vel ovali abrupte varie lanceolatis, acuminatis, cellulis partis latae eodem modo sursum latitudine decrescentibus, sed parum elongatis ideoque oblongis, oblonge linearibus vel breviter linearibus, juxtamarginalibus haud proprie distinctis, nervo in partem angustam producto, d. b. 0,06 mm.

Caule ipso sursum sensim crassiore.

Die nachfolgenden Untervarietäten machen eine besondere Unterscheidung nöthig, sonst könnte diese Form auch bei *var. robustius* untergebracht werden (Siehe weiter unten).

1) *Njiolevka* (am Zusammenflusse von Ob und Irtisch) auf periodisch überschwemmten Wiesen; ein Rasen, gelbgrün, einem verkürzten Exemplare von *var. Kneiffii* sehr ähnlich, aber durch die abrupte Zuspitzung der obern Blätter und die kürzere Zellen im breiten Theile derselben verschieden. Stengel einfach oder spärlich kurz beästelt, über $\frac{1}{2}$ " lang.

†† sciurum *

Densum, humile, sordide viride vel lutescens, caule simplice vel basi parce irregulariterque pinnatim ramuloso, foliis basi minoribus, sursum majoribus, undique patentibus vel horizontalibus, satis densis, ovatis acuminatisque vel ovato-lanceolatis, acuminatis, margine undulatis vel obsolete repandulis, alaribus haud vel parum vel satis ampliatis, ceteris basalibus ovalibus et sequentibus proximis oblongis parenchymaticis, deinde paucis oblongis prosenchymaticis, sequentibus oblongo-linearibus et linearibus, sursum longioribus, nervo ad vel supra medium producto, d. b. 0,02—0,03 mm.

Caule ipso a basi tenui, sursum abruptius incrassato, fere cylindrico-clavato, longius crescendo denique tenuiore.

Diese Varietät macht den Eindruck eines Hypnums aus den Sectionen *Amblystegium* oder *Campylium* und wäre ohne die vorhergehende Varietät unauflösbar.

1) *Njiolevka* (am Zusammenflusse von Ob und Irtisch) auf periodisch überschwemmten Wiesen; zahlreiche Rasen, dünn, dem *H. chrysophyllum* ähnlich, grün, oder gelbgrün; Stengel kurz, c. $\frac{1}{2}$ " lang.

††† julaceum *

Densum, caespitosum, caule erecto, simplice, brevi (c. $\frac{1}{4}$ "), basi parce ramoso et attenuato, foliis undique erectis, imbricatis, ovatis vel elongato-ovatis, acuminatis, subintegerrimis vel obsolete parceque denticulatis, alaribus haud ampliatis, basalibus ceteris ovalibus et sequentibus oblongis parenchymaticis, mox elongato-oblongis, prosenchymatice textis, apicalibus similibus, nervo ad vel supra medium producto, d. b. 0,03 mm.

Sehr veränderlich in der Dicke wie die *var. tenue* selbst, die feinsten Stengel sind fadenförmig.

1) *Njiolevka* (am Zusammenflusse von Ob und Irtisch) auf überschwemmten Wiesen; nur ein kleiner Rasen, schmutzig gelbgrün, teilweise ockerfarbig.

***** robustius *

Robustius, frequenter *var. legitimo vulgari* tenuiori simile; foliis innovationum subaemulis vel heteromorphis, inferioribus angustioribus, superioribus falcatis hamatisve, ex transverse ovali vel subrotundo vel ovali ovato lanceolatis, acuminatis, subulatis, subintegerrimis vel undulatis repandulisve vel passim et parce obtuse serrulatis, alaribus variis, parum evolutis, paucioribus vel ampliatis, ceteris basalibus et sequentibus proximis ovalibus vel oblongis, majoribus, deinde minoribus, oblongis

vel oblongo-linearibus, prosenchymatice textis, partis lanceolatae linearibus, juxtamarginalibus haud proprie distinctis vel angustioribus vel etiam longioribus, nervo in partem lanceolatam producto, d. b. 0,03—0,05 mm.

Zu dieser Varietät gehören die von mir in der Commentatio de Harpidiis europaeis unter *var. tenue* erwähnten robusten Formen.

1) *Tolstoj nos* (T. f.); 2 Räschen, niedrig, unter 1", grün, gelbgrün oder ockerfarbig, zuletzt rauchbraun.

2) *Nikandrovskij ostrov* (T. f.); reichliche Rasen, aufrecht, 1—3" hoch, gelbgrün, zuletzt braun.

3) *Nikandrovskij ostrov* (T. f.); sehr reichlich, bis 8" tiefe, aufrechte Rasen, hellgrün, zuletzt dunkel rauchbraun.

4) *Malo Briochovskij ostrov* (T. f.); einen Stengel eingesprengt gefunden zwischen *H. intermedium verum*, *H. lycopodioides vernicosum* und *H. intermedium* × *vernicosum*, oben ockergelb, bald braun werdend, mit spärlichen Aestchen, 1" lang.

f) *percurrents* *

Foliis inferioribus undique patentibus vel vix subsecundis, parum curvatis, anguste lanceolatis, longe et sensim acuminatis, subintegerrimis vel repandulis, cellulis alaribus ampliatis, ceteris basalibus et sequentibus proximis ovalibus, mox oblongis, denique angustioribus, linearibus, sursum sensim longioribus, nervo sub apice soluto vel ad apicem percurrente, d. b. 0,05 mm.; foliis superioribus hamatis vel circinato hamatis, secundis, ex ovato vel elongato-ovato abrupte lanceolatis, longe acuminatis subulatisque; alaribus paucioribus, haud vel satis ampliatis, nonnunquam usque ad nervum singula serie extensis, supra-basalibus paucis vel multis parvis, polygono-oblongis, sursum usque ad partem lanceolatam parum elongatis, partis lanceolatae linearibus, parum longioribus, juxtamarginalibus angustioribus vel etiam longioribus, nervo percurrente vel sub summo apice, desinente, d. b. 0,05—0,08 mm.

1) *Njiolevka* (am Zusammenflusse von Ob und Irtisch) auf überschwemmten Wiesen; zahlreich in verschiedenen Formen, theils der *var. Kneijffii* theils *aquaticum* ähnlich, durch das Zellnetz und die Rippe aber leicht zu unterscheiden. Oberseits grün, gelbgrün, oder selbst ockerfarbig, zuletzt blass rauchfarbig bis braun.

Eine hierher gehörige Form fand in neuerer Zeit Herr SCHULZE bei Breslau (auf sumpfigen Wiesenstellen zu Nimkau); dieselbe beschränkt sich aber nur auf die Bildung der untern lanzettlichen Blätter = *var. homoeophyllum* SANIO in Hb. et litt.

Auf diese Form lasse ich jetzt, nachdem das Zwischenglied zwischen *var. aquaticum* und *Kneiffii* als *b) Venturii* gefunden, die *var. unculus* SANIO folgen, von der in neuerer Zeit eine Form mit breitem Blättern bei Breslau von Herrn SCHULZE gefunden wurde (= *g. unculus* SANIO ** *circinatum* SANIO in Hb., foliis superioribus ex subrotundo vel late ovato abrupte lanceolatis, acuminatis, circinato-hamatis, nervi d. b. 0,07—0,09 mm.). Früher schon hatte Dr. HOLLER dieselbe Form im Haspelmoor bei Augsburg in Baiern gefunden, ohne dass mir damals ihre Zugehörigkeit zur *var. unculus* klar geworden wäre.

♂ molle *

Caule ipso ratione caulis foliati *tenui*, foliis mollibus, nunquam decurrentibus, alaribus parum evolutis, nervo tenuiore vel duplice, capsula tenuiore, cylindrica.

Bei Messungen der Dicke des Stengels selbst und des ganzen beblätterten Stengels stellt es sich heraus, dass derselbe beträchtlich dünner ist als z. B. bei *var. Sendtneri*.

a) *Wilsoni* SCHPR.

Foliis subaemulis vel superioribus latioribus, brevioribus, subsecundis, parum curvatis vel secundis, falcatis, ovatis vel oblongis, cuspidatis vel cuspidato-apiculatis, frequentius basi angustatis, subintegerrimis vel a basi repandulis obtuseve serrulatis, sursum integerrimis, alaribus paucis vel numerosioribus, haud ampliatis, plerumque obscurioribus, margine secus alares haud proprie incrassato (cf. *H. badium*), suprabasalibus oblongis, plerumque longe sursum parenchymaticis, deinde angustioribus, haud vel parum longioribus, prosenchymatice textis, juxtamarginalibus satis angustioribus, longitudine immutatis, brevioribusve vel longioribus, apicalibus brevioribus vel similibus, nervo ad vel supra medium producto, d. b. 0,03—0,05 mm.

1) *Dudinka* (T. f.); einige kleine Rasen, oben bräunlich-ocker-gelb, später rauchbraun, Stengel kurz, wenig verzweigt.

2) *Dudinka* (T. f.); einige grosse Rasen, bis fast 6" lang, aufrecht, wenig verzweigt, oben gelbgrün, bald rauchbraun.

3) *Tolstoj nos* (T. f.); mehrere kleine Rasen, gelblichgrün, zuletzt rauchbraun; Stengel aufrecht, c. 1" lang, meist wenig verzweigt.

4) *Tolstoj nos* (T. f.); mehrere Rasen, aufrecht, über 3" hoch, an der Spitze gelbgrün, bald braun werdend, meist wenig verzweigt, SAHLBERG!

5) *Tolstoj nos* (T. f.); 2 Rasen, gelbgrün, bald hell ockerbraun, aufrecht, bis über 3" hoch, wenig verzweigt.

6) *Tolstoj nos* (T. f.); mehrere Rasen, oben gelbgrün, röthlich überflogen, früh sich rauchbraun färbend; Stengel c. 3" hoch, büschelig fiederig verzweigt.

7) *Tolstoj nos* (T. f.); 2 grosse Rasen, über 3" hoch, gelbgrün, zuletzt rauchbraun; Stengel dünn, wenig verzweigt.

8) *Tolstoj nos* (T. f.); zahlreiche Rasen, an der Spitze ocker-gelb, an der äussersten Spitze meist hellgrün, bald dunkelbraun sich färbend; Stengel fast einfach, bis 3" hoch; Früchte einzeln, geschwärzt, 1½ mm. lang, cylindrisch, unten verschmälert.

9) *Tolstoj nos* (T. f.); 2 Rasen, aufrecht, bis 5" hoch, grün, schliesslich rostbraun; Stengel mit spärlichen Aestchen, SAHLBERG!

Sämmtliche Nummern sind verhältnissmässig dünn, von der verschiedenen Stärke, in der das *H. intermedium verum* bei uns vorkommt; die dicken Formen der europäischen Flora scheinen dort zu fehlen. Manchmal werden sie dem *H. badium* täuschend ähnlich, sind aber durch die Art der Blattflügelzellen und den Mangel der marginalen Verdickung neben denselben zu unterscheiden.

**** *Hollerí* SANIO in Hb.**

Foliis subaemulis, falcatis hamatisve, ex subrotundo vel subrotundo-ovato abrupte breviter lanceolatis, cuspidato-subulatis, subintegerrimis vel parce repandulis serrulatisve vel supra basin obsolete repandulis obtuseve serrulatis, sursum subintegerrimis, alaribus et reti formae genuinae similibus, nervo supra medium producto, d. b. 0,03—0,06 mm.

Unterscheidet sich von *H. aduncum circinatum* durch den feinen Nerv, von *H. aduncum tenue robustius* durch grössere Dicke und das längere und weitere Zellnetz im breiten Theile des Blattes.

1) *Saostrovskoje* (T. f.); 3 Nummern, von einer zahlreiche Rasen, an der Spitze gelbgrün, bald dunkelbraun sich färbend; Stengel einfach oder mit vereinzelt Aestchen, bis über 3" lang, von der Stärke des *H. intermedium verum*.

2) *Jenisei* in T. f. ohne nähern Fundort leg. LUNDSTRÖM 1875; einige kleine Räschen, mit einfachem oder spärlich beästelten Stengel, an der Spitze ockergelb, bald braun.

In Baiern von Dr. HOLLER aufgefunden (1881) und mir mitgetheilt worden.¹⁾

¹⁾ Neuerdings (10. 9. 1884) von mir auch bei Lyck (Bruch am Lycker See) ein Rasen, einen Fusstief) aufgefunden.

*** *binerve* *

Foliis subaemulis, rectis, patulis vel erectis, subplanis, oblongo- vel late lanceolatis, longe cuspidatis subulatisque, subintegerrimis; alaribus parum ampliatis vel inferioribus pellucidis, superioribus incrassatis ampliatis, quadratis rectangulisve, suprabasalibus oblongis vel late linearibus, parenchymatice textis, sursum sensim angustioribus, longioribus, prosenchymatice linearibus, satis longis, juxtamarginalibus satis angustioribus, longioribus, nervo plerumque gemino vel fere a basi bifureo, vix ad medium producto, tenui. Capsula parva (c. 2 mm.), curvata, cylindrica, basi angustata, operculo conico, acuto, peristomii dentibus limbatis, transverse striatis, contiguis.

1) *Dudinka* (T. f.); einige kleine Rasen, an der Spitze grün, bald ockerfarbig, schliesslich rostbraun; Stengel einfach oder mit spärlichen Aestchen, bis fast 2" lang.

2) *Dudinka* (T. f.); mehrere Rasen, an der Spitze grün oder gelbgrün, bald ockergelb, mattglänzend, schliesslich rostbraun; Stengel spärlich oder dichter fiederig beästelt, über 1" lang; Früchte spärlich, zum Theil noch bedeckt d. d. 4. 8. 1876.¹⁾

Diese Formen sind etwas stärker als die vorhergehenden des *Wilsoni*.

Hierher rechne ich auch als *var. b turgescens* (SCHPR.) das *H. turgescens* SCHPR., das von der *var. binerve* wesentlich nur durch die kurz gezipfelte Blattspitze und durch die hohlen Blätter verschieden ist.

ε *legitimum* SANIO.

Foliis falcatis, secundis, crassinerviis, sessilibus, capsula cylindrica.

b) *vulgare* SANIO.

Foliis subaemulis vel dimorphis, inferioribus oblongo- vel ovato-lanceolatis, superioribus ex ovato vel subrotundo-ovato vel subrotundo abrupte lanceolatis, acuminatis vel cuspidato-subulatis, subintegerrimis vel obsolete repandulis vel raro uno alterove denticulo acuto obtusove exasperatis, alaribus parum evolutis, suprabasalibus a basi ovalibus oblongisve sursum sensim sed parum longioribus, angustioribus, denique prosenchymatice textis, oblongis vel lineari-oblongis, nonnunquam satis incrassatis, partis lanceolatae longius linearibus, apicalibus brevioribus, juxtamarginalibus multo angustioribus, longitudine si-

¹⁾ Auch bei Patapovskoje, 25. 7. 1876 nach einem von JARNELL nachträglich mitgetheiltem Exemplare.

milibus vel longioribus, nervo ad vel in partem lanceolatam producto, d. b. 0,06—0,10 mm.

1) *Jeniseisk* (T. s.); 2 kleine Rasen, Stengel verworren, bis über 2" lang, gefiedert, an der äussersten Spitze gelbgrün, bald ockerbraun, zuletzt rauchbraun, SAHLBERG!

2) *Jeniseisk* (T. s.); 2 Räschen, aufrecht, locker, bis über 3" lang, mit zahlreichen lanzettlichen (obern d. d. 24. 6. 1876, später untern) Blättern, gelbgrün, zuletzt röthlich braun, gefiedert, SAHLBERG!

3) *Tolstoj nos* (T. f.); 2 Raser, härtlich, starr, Stengel einfach oder sehr spärlich beästelt, feiner, den dünnern Formen der *var. vulgare* oder des *H. intermedium verum* ähnlich, an der Spitze ocker-gelb, bald dunkelrauchbraun. Diese Form erinnert sehr an *var. Holleri* durch das länger gestreckte Zellnetz, aber der dicke Nerv ist dagegen: Zellnetz ungewöhnlich verdickt.

c) *Sendtneri* SCHPR.

Foliis ovato-lanceolatis, basi ovata ampliore, cellulis partis latae oblongis, vel lineari-oblongis vel brevius linearibus, longe sursum parenchymaticis.

Diese Varietät unterscheidet sich von b) *vulgare* nur durch den allmählichen, vermittelten Uebergang des breitem Theiles des Blattes in den schmälern, im Zellnetze sind sie häufig einander gleich.

* *latifolium* SANIO.

Foliis plurimis oblongo-lanceolatis, intermixtis ex subrotundo vel late ovato lanceolatis, acuminatis, subulatis, subintegerimis vel a basi parce et obsolete repandulis vel singulis denticulis obtusis exasperatis; alaribus haud mutatis vel ampliatis, suprabasalibus oblongis vel linearibus, modice longis, longe sursum parenchymaticis, denique prosenchymaticis, longioribus, linearibus, partis lanceolatae valde elongato-linearibus, juxta-marginalibus multo angustioribus, non longioribus, nervo in partem lanceolatam producto, d. b. 0,08—0,010 mm.

1) *Asinovo* (T. s.); ein lockerer Rasen; Stengel bis 4" lang, mässig fiederig beästelt, an der äussersten Spitze ockerfarbig, bald rostbraun, schliesslich rauchbraun.

** *triviale* SANIO.

Foliis inferioribus oblongo-lanceolatis, superioribus ex ovato lanceolatis, acuminatis, subulatis, repandulis, raro singulis denticulis obtusis instructis; alaribus ampliatis, oblongis, pluriseriatis, suprabasalibus oblongis, sursum angustioribus, lineari-oblongis, demum prosenchymaticis, linearibus, partis angustae anguste et elongato-linearibus, apicalibus brevioribus, juxtamargi-

nalibus multo angustioribus, longitudine similibus, nervo in partem angustam producto, d. b. 0,08—0,10 mm.

1) *Asinovo* (T. s.); ein aufrechter Rasen; Stengel bis 6" lang, fiederig beästelt, an der Spitze blass gelbgrün, rauchfarbig übergossen, bald rauchfarbig werdend.

Beide Formen der *var. Sendtneri* sind am Jenisei feiner als gewöhnlich in der europäischen Flora, locker beblättert.

Die *var. giganteum* SCHPR., durch schmalere Blätter, ein länger gestrecktes, schon näher dem Grunde mehr oder weniger prosenchymatisches Zellnetz zu unterscheiden, scheint in Sibirien zu fehlen.

ζ *Schimper* SANIO.

Foliis nervo longe excurrente aristatis.

a) *capillifolium* WARNSTORF.

Pinnatim ramulosum, foliis subsecundis vel secundis, parum curvatis vel falcatis, inferioribus angustioribus, lanceolatis, superioribus ovato-lanceolatis, supra basin repandulo-denticulatis, sursum obsoletissime repandulis vel subintegerrimis; (basalibus excurrentibus), alaribus varie ampliatis, suprabasalibus ovalibus, mox oblongis, parenchymaticis, sursum mox vel serius lineari-oblongis, prosenchymatice textis, juxtamarginalibus haud vel parum angustioribus, reti foliorum angustiorum (inferiorum) jam a basi longiore, lineari, nervo foliorum angustiorum tenuiore (basi 0,08—0,12 mm.), — latiorum latiore (basi 0,12—0,16 mm.), in aristam longam, laevem, teretem excurrente.

Bei den bei Lyck von mir gesammelten Formen dieser Varietät sind entweder sämtliche Blätter einander ähnlich oder die obern sind breiter.

1) *Antsiferova* (T. s.); ein kleines Probchen, Stengel aufrecht, bis 4" lang, gelblichgrün, zuletzt rauchbraun, gefiedert, feiner als die in Preussen und der Mark-Brandenburg gesammelten Exemplare meines Herbars.

Die vorliegende Varietät entspricht der *var. percurrans* sub *γ Hampei* und unterscheidet sich nur durch den auslaufenden, dickeren Nerv, selbst die von Herrn SCHULZE bei Breslau gefundene Abänderung des *percurrans*, die *var. homoeophyllum*, findet eine Correspondente in dem *capillifolium* der Flora von Lyck mit gleichartigen Blättern. Andererseits entspricht die von mir im Additamentum secundum beschriebene *var. Lindbergii* der *var. laxifolium* sub *α Blandowii*. Es lag deshalb nahe zu vermuthen, dass auch andere Varietäten von *α Blandowii* und

Hampei bei *§ Schimper* ihre analoge Varietäten haben dürften. Diese Vermuthung ist bereits bestätigt durch eine Entdeckung von Dr. ARNELL in Schweden (Ångermanland, Nordingrån, Voxfjärden am Seeufer, 9. 7. 1883). Ich gebe im nachfolgenden die Beschreibung dieser neuen Varietät:

»**Hypnum aduncum** L.

§ **Schimper** SANIO.

c) *pseudo-intermedium* SANIO in litt. ad ARNELL.

Caule tenui, parce ramuloso, foliis inferioribus remotioribus, patentibus, nonnunquam falcatis, anguste lanceolatis, longe subulato-aristatis, integerrimis, cellulis alaribus basin occupantibus, parum dilatatis, nonnunquam elongatis vel singulis mediis inflatis, ceteris suprabasalibus oblongis, parenchymaticis, mox linearibus, prosenchymatice textis, sursum sensim longioribus, nervo crasso, basi 0,10 mm., sursum attenuato, in subulam excurrente; foliis sequentibus pedetentim latioribus, oblongo-summis ovato-lanceolatis, remotiusculis, subsecundis, apicalibus subfalcatis, laxe conniventibus, basi obtuse vel obsolete denticulatis, sursum integerrimis, alaribus acque parum evolutis, basin occupantibus, ceteris totam partem latiore occupantibus oblongis, juxtamarginalibus angustioribus, longioribus, apicalibus foliorum mediorum angustiorum linearibus, foliorum summorum brevius vel longius oblongo-linearibus, nervo basi 0,06—0,07 mm., sursum angustato et in aristam brevior planam excurrente.

Von der Stärke und Habitus des *H. aduncum intermedium* SCHPR., aber dunkelgrün, zuletzt braun.»

5) **Hypnum scorpioides** L.

Nach brieflichen Mittheilungen von Dr. ARNELL fehlt diese Art in den von ihm untersuchten Theilen Sibiriens.

6) **Hypnum lycopodioides** SCHWÄGR.

Dioicum; dentibus peristomii inter se distantibus, margine dilutius tinctis, subtilissime granuloso punctulatis, basalibus varie acute vel obtuse excurrentibus, indistinctis vel obscure, parietibus ipsarum magis incrassatis vel raro cellulis caulinis subsitis subvacuis, distinctis.

Folia plus minusve falcata, secunda.

Alares desunt in sibiricis a me visis. Rete folii a basi ad apicem prosenchymaticum vel basi parenchymaticum, deinde promiscue par- et prosenchymatice textum, denique pure prosenchymaticum. Nervus plus minusve flexuosus.

Nitor plus minusve sericeus.

α genuinum SANIO.

Cellulis folii varietatis sequentis β longioribus, juxtamarginalibus multo angustioribus, non vel plerumque valde longioribus. Plerumque sequente var. β robustius.

Foliis plus minusve sulcatis, subaemulis vel inferioribus angustioribus, semper remotius dispositis.

Dilutius viride vel lutescens, denique fuscum, minus interrupte foliatum.

Foliis ex ovali vel oblongo-ovali abruptius breviter lanceolatis, cuspidato-subulatis vel ex apice rotundato-obtuso apiculatis, integerrimis, nonnunquam leviter undulatis vel apice serrulatis, obsolete sulcatis, cellulis jam a basi prosenchymaticis vel pluries parenchymaticis, deinde promiscue pros- et parenchymatice, denique pure prosenchymatice textis vel a basi sursum rapidius elongatis, sed mox sursum apice partis folii latae brevioribus, parte lanceolata denuo longioribus, apice brevioribus vel a basi sursum sensim longioribus, apice partis latae longissimis, partis lanceolatae sursum sensim brevioribus, basi excepta semper plus minusve linearibus, plus minusve flexuosis, raro subrectis, nervo ad vel in partem lanceolatam producto, d. b. 0,09—0,14 mm.

Folia plus minusve concava, apice convoluta vel canaliculata, caulis erectus.

1) *Dudinka* (T. f.); 2 kleine, locker zusammenhängende, unten durch Schlamm verbundene Rasen, c. 4" hoch, oben gelbgrün; Stengel fiederig beästelt, ziemlich robust, an der Spitze übergebogen, fast kreisförmig geschlossen-hackig.

2) *Dudinka* (T. f.); mehrere Rasen, 3—5" tief, oben gelbgrün, unten rein rauchbraun; Stengel robust, spärlich fiederig beästelt.

3) *Dudinka* (T. f.); mehrere Rasen, bis 6" tief, locker, aufrecht, unten mit Schlamm verbunden, oben gelblichgrün, schliesslich dunkel rauchbraun; Stengel robust, an der Spitze übergebogen, fiederig beästelt. »In dem Wasser kleiner See'n nahe dem Flusse in dem Niederwalde von Weiden und *Alnus viridis*. Die See'n sind Ueberbleibsel von den Ueberschwemmungen im Frühjahr«.

4) *Saostrovskij ostrov* (T. f.); ein Rasen, Stengel aufrecht, bis über 8" lang, sehr robust, oben gelblichgrün, schliesslich rauchbraun, gefiedert; auf ähnlicher Lokalität wie Nr 3 gesammelt.

5) *Nikandrovskij ostrov* (T. f.); einige lockere Rasen, unten durch Schlamm verbunden, c. 4" hoch; Stengel etwas fiederig bestäelt, dünner, oben grün, unten rauchbraun, an der Spitze meist nicht gebogen, durch die zusammenneigenden Blätter hackenförmig gekrümmt.

6) *Nikandrovskij ostrov* (T. f.); ein locker zusammenhängender Rasen, c. 3" hoch, oben blassgrün; Stengel dünner, dem *H. aduncum vulgare* ähnlich, fiederig bestäelt, an der Spitze wenig oder gar nicht gebogen.

** *lapponicum* LINDB. ex sched. speciminis originalis a cl. auctore recepti in Hb. C. SANIO.

Fusco vel fusco-violaceo vel rubro-coloratum.

Apice plerumque pallide viride, mox pallidius vel obscure fuscum vel fusco-violaceum, denique decolorato-fuscum.

Foliis falcatis, ex ovali vel rarius oblongo-ovali abrupte lanceolatis, cuspidato-subulatis vel apiculatis, obsolete sulcatis, apicem versus convolutis, integerrimis, suprabasalibus oblongis sursum sensim angustioribus, rapidius vel lentius elongatis, denique satis longis, flexuosis, apice brevioribus, nervo supra medium producto, subflexuoso vel subrecto, d. b. 0,06—0,14 mm.

Caulis erectus, interruptus, foliis inferioribus (vernalibus) remotioribus, minoribus, foliatus.

1) *Mjelnitsa* (T. s.); ein kleiner Rasen, c. 4" hoch; Stengel einfach oder spärlich ästig, mässig dick; Blätter an der Spitze schmutzig hellgrün, zuweilen schmutzig blassroth übergossen, bald schmutzig violettroth, darauf schmutzig grün, schmutzig ockerfarbig, endlich blass rauchbraun. Auffallend ist das Verschwinden der rothen Farbe noch vor dem Tode des Blattes und Wiederscheinen der grünen; möglich also, dass die rothe Färbung nicht in allen Blättern auftritt, sondern periodisch unterbleibt.

2) *Ust-Kureika* (T. a.); zahlreiche Rasen, 3—10" tief, oben schmutzig hellgrün, mehr oder weniger violettroth übergossen, zuweilen nach unten oder bis zur Spitze dunkel rauchfarbig-violett, selbst schwarzviolett, zuletzt rauchbraun; Früchte zahlreich, reif, zum Theil noch bedeckelt; Seten orangefarbig, sehr lang, über $2\frac{1}{2}$ ", Kapseln länglich, unten verschmälert, gekrümmt, c. 3 mm. lang, röthlich-ockergelb; Stengel einfach oder mit spärlichen Aestchen, mässig dick. d. d. 19. 7. 1876.

3) *Igarskoje* (T. a.); mehrere Rasen, 3—7" tief, schmutzig hellgrün, an der Spitze oder im obern Theile hell violettroth übergossen, stellweise auch dunkelviolett, schliesslich blass und darauf dunkel rauchbraun, Stengel mässig dick, fast einfach oder mit spärlichen Aestchen.

4) *Igarskoje* (T. a.); 2 kleine Rasen, bis über 5" tief; oben meist bis zur Spitze schwarzviolett-rauchbraun, zuweilen an der

ässersten Spitze reinhellgrün, schliesslich heller und dann dunkler rauchbraun; Stengel robust, einfach oder mit spärlichen Aestchen.

5) *Dudinka* (T. f.); 2 kleine Rasen, bis 4" tief, an der Spitze ockerfarbig mit goldigem Glanze, nach unten heller oder dunkler rauchfarbig braun, stellweise mit schwachem violetten Stiche; Stengel robust, einfach oder spärlich beästelt.

†† Sahlbergii *

Dilute rubro superfusum vel pure rubro coloratum, denique fuscum, nervi d. b. 0,08—0,09 mm.

1) *Ust-Kureika* (T. a.); mehrere Rasen, bis 5" tief, seidig glänzend, trocken fein gerunzelt, blass ocker- oder strohgelb, blass-roth überflogen oder hell purpurroth, nach unten etwas dunkler, zuweilen selbst ins violette übergehend, schliesslich rauchbraun. Stengel mässig dick, einfach oder mit spärlichen Aestchen. Früchte bereits entdeckelt d. d. 18 Sept. 1876. SAHLBERG!

*** *majus* LINDBERG ex schedula speciminis originalis a cl. auctore recepti in Hb. C. SANIO.

= *H. lycopodioides laeve* SANIO. mpt.

Foliis falcatis vel hamatis, parum concavis, laevibus, ex oblongo ovali abrupte longius lanceolatis, breviter cuspidato subulatis, apice convolutis, integerrimis, cellulis a basi prosenchymaticis, oblongis, sursum sensim angustioribus, longioribus, mox valde elongatis, apice partis latae folii brevioribus, parte lanceolata denuo magis elongatis, apice brevioribus, plus minusve flexuosis, nervo ad partem angustam producto, d. b. 0,07—0,08 mm.

Foliis inferioribus satis distantibus, oblongo lanceolatis, longioribus.

1) *Dudinka* (T. f.); mehrere Rasen; Stengel unten niederliegend, gelbgrün, schliesslich rauchbraun, dicht fiederig beästelt, ziemlich dünn, kurz, bis über 2" ¹⁾).

†† Holleri *

= *H. fluitans* var. *turgescens* HOLLER in »Neue Beiträge zur Laubmoosflora Augsburgs 1879. Separatabdruck p. 75!

Laxum, pinnatim ramulis sueto longioribus ramulosum, pallide viride, foliis remotiusculis. inferioribus (vernalibus) remotis, subsecundis, subfalcatis, subaemulis, ovato-lanceolatis, acuminatis, undulato-subintegerrimis, laevibus; cellulis usque ad basin prosenchymaticis, a basi brevioribus, amplioribus, sursum sensim maxime elongatis, juxtamarginalibus multo angusti-

¹⁾ Auch an den Jenisei-Mündungen am Cap Schaitanskoj am 23. 8. 1875 von Dr. A. N. LUNDSTRÖM gesammelt, von Dr. ARNELL mitgetheilt.

oribus, non longioribus, nervo subflexuoso, supra medium producto, d. b. 0,09—0,10 mm.

Alaribus nullis, basalibus indistincte acute excurrentibus.

1) *Jeniseisk* (T. s.); sehr wenig, Stengel bis über 5' lang, dünn, wie bei den feinem Formen des *H. fluitans exannulatum*, mit verlängerten Fiederästen, schmutzig gelblich blassgrün, unten zuletzt dunkelrauchbraun. In einem Stromarme auf Thonboden.

β *vernicosum* (LINDB.).

Tenuius, *Hypno intermedio vero simile*, cellulis folii brevioribus, juxtamarginalibus plus minusve angustioribus, rarius etiam longioribus. Foliis sulcatis, subaemulis, aequae densis et magnis, vel inferioribus minoribus vel etiam remotioribus, ex ovali vel oblongo-ovali plus minusve abrupte lanceolatis, cuspidato-longius breviusve subulatis vel apiculatis vel obtusis apiculatisque, parte angusta convolutis, integerrimis vel leviter undulatis vel raro apice serrulatis; suprabasalibus oblongis, a basi prosenchymatice textis, sursum angustioribus, parum longioribus, flexuosis, apicalibus non vel vix vel satis brevioribus, nervo plus minusve flexuoso, ad vel in partem angustam producto, d. b. 0,05—0,11 mm.

Caulis erectus vel procumbenti-caespitosus.

1) *Mjelnitsa* (T. s.); mehrere Rasen¹⁾, über 4" tief, oben hellgrün, bald ockerfarbig, schliesslich rostbraun; Stengel dünn, ziemlich dicht gefiedert.

2) *Ust-Kureika* (T. a.); ein Rasen, über 4" tief, auch sonst dem vorigen gleich.

3) *Dudinka* (T. f.); 2 kleine Rasen, fast bis 4" tief oben schmutzig hellgrün, zuletzt rauchbraun; Stengel dünn, fast einfach oder mit vereinzelt Aestchen.

4) *Dudinka* (T. f.); ein Rasen, bis 4" tief, oben ockergelb, nach unten bald rauchbraun sich verfärbend; Stengel dünn und ziemlich spärlich und unregelmässig fiederig beästelt.

5) *Dudinka* (T. f.); einige Rasen, 4—5" tief, oben stroh- oder ockerfarbig hellgrün, ziemlich schnell sich in rauchbraun verfärbend; Stengel dünn, etwas unregelmässig fiederig beästelt.

6) *Saostrovskij ostrov* (T. f.); einige Rasen, oben hell gelblichgrün, schliesslich rauchbraun; Stengel unten niederliegend, verworren, dünn, fiederig beästelt, bis 2" lang.

7) *Tolstoj nos* (T. f.); einige Rasen, blass gelblichgrün, schliesslich dunkelbraun; Stengel dünn, gewunden, bis über 3" lang, fiederig beästelt, unten rasig verworren.

8) *Nikandrovskij ostrov* (T. f.); wenige Stengel von mir eingesprengt gefunden, über $\frac{1}{2}$ —1 $\frac{1}{4}$ " lang, oben blassgrün, schliesslich rauchbraun, dünn, fiederig beästelt.

¹⁾ Nach Dr. ARNELL; in der Sammlung fand ich nur einen kleinen Rasen. S.

9) *Malo Briochovskij ostrov* (T. f.); 2 Rasen, aufrecht, unten mit Schlamm verbunden, oben blassgrün, unten rauchbraun; Stengel etwas dicker, fiederig beästelt, bis 3" lang.

10) *Malo Briochovskij ostrov* (T. f.); einige kleine Rasen, etwas starr, oben ockergelb, sehr bald rauchbraun sich verfärbend; Stengel aufrecht, c. 2" lang, mehr oder weniger fiederig beästelt.

11) *Malo Briochovskij ostrov* (T. f.); eingesprengt, äusserst spärlich mit *H. intermedium verum*, *intermedium* × *vernicosum*, *aduncum robustius*. Stengel dicker, über 1½" lang, oben ockerfarbig, sehr bald dunkelbraun sich verfärbend, fiederig beästelt.

IV. *Harpidia hybrida*.

Die Schwierigkeiten einer scharfen Unterscheidung der Harpidien in Species und Varietäten haben theilweise ihren Grund in der Unvollständigkeit der meist sterilen Exemplare und der grossen Mannigfaltigkeit in Grösse, Dicke und Farbe der einzelnen Varietäten, sie werden aber noch um vieles vermehrt durch unzweifelhafte Bastarde, die namentlich zwischen den beiden formenreichen Species *H. fluitans* und *aduncum* gar nicht zu selten sind.

Eins der sichersten Kennzeichen, um die Bastarde von den ächten Species zu unterscheiden, bietet die Insertion der Blätter, je nach dem die Basalzellen der Blätter excurrent oder blatteigen, mit oder ohne besondere Distinction sind. Allerdings halte ich unbedeutende Abweichungen für zulässig, so zwar, dass wenn bei vorwaltender Blatteigenheit der Basalzellen vereinzelte Zellen etwas tiefer über die Inserstionsgrenze herabsteigen, dieses noch kein Beweis sei, eine Hybridation anzunehmen, obwohl ich hier bemerken muss, dass, wenn Bastarde vorkommen, auch sicher rückschreitende Formen durch Befruchtung des Bastardes mit den Eltern vorhanden sein können, die man, wegen zu geringer Abweichungen schon für reine Species zu halten geneigt sein könnte. Wie viel hier auf die Flexibilität der Species bei ungewohnten Verhältnissen oder auf rückschreitende Bastardformen zu schieben sei, ist durchaus nicht zu ermitteln ¹⁾.

¹⁾ Bei solchen Schwierigkeiten, auf die man, da sie noch nirgends hervorgehoben sind, durch allmähliche Vertiefung der Untersuchung selbst aufmerksam werden muss, wird es nicht befremden, wenn ich selbst einige Hybriden für reine Species aufgefasst und in mein Additamentum secundum aufgenommen habe. Ausser den schon im Texte erwähnten Erraten erwähne ich hier folgende, um damit dem Additamentum secundum die basale Reinheit wieder zu geben:

1) *Hypnum fluitans* × *aduncum* SANIO.

Monoicum vel dioicum; foliis perichaetialibus laevibus, annulo nullo, foliis dimorphis vel rarius homoeomorphis, basalibus partim excurrentibus.

α *paludosum* SANIO.

Foliis superioribus ex oblongo lanceolatis, falcatis. Monoicum.

1) *Hypnum fluitans* β *exannulatum* b) *purpurascens* von Hemsö in Ångermanland halte ich jetzt für eine Hybridation mit *H. aduncum*. Die obern Blätter sind länglich-lanzettlich, gespitzt, kurz pfriemlich, sichelförmig, ganzrandig oder mit vereinzelt stumpfen Zähnen oder teilweise etwas schweifig; Blattflügelzellen meist auf die Ecken beschränkt, zuweilen durch eine Reihe oblonger Zellen bis zum Nerv reichend; zuweilen sind diese Zwischenzellen von den darüber und darunter gelegenen Zellen nicht verschieden, liegen aber in einer Reihe ohne excurrenten Verband mit den darunter gelegenen Stengelzellen, sind also blatteigen; häufig indess ist diese Reihenstellung mehr oder weniger aufgehoben, die darüber gelegenen Zellen schieben sich zwischen die basalen, diese häufig mit spitzer Endigung, zwischen die Stengelzellen, wodurch ein allmählicher Uebergang des Blattgewebes zur äussersten Schicht der Stengelzellen vermittelt wird. Ich bezeichne deshalb diesen Bastard als *H. fluitans* × *aduncum* δ *exannulatum* ** *purpurascens*.

2) *Hypnum aduncum legitimum vulgare foliis violascentibus* in Ångermanland bei Framnäs gesammelt, ist nur in der Frucht eine Hybride des *H. aduncum*. Von demselben Standorte sandte mir Dr. ARNELL im Jahre 1883 gesammelte Exemplare, die sich als eine besondere Modification des *H. fluitans purpurascens* (neuerdings von mir als var. *violascens* unter *exannulatum* b *acutum* abgetrennt) herausstellten, ausgezeichnet durch die Form der obern Blätter, die hier, wie bei *H. aduncum vulgare*, aus rundlicher oder breit einförmiger Basis plötzlich kurz lanzettlich zugespitzt sind. Das Peristom gehört zu *H. fluitans exannulatum*, die Zähne fein punktirt, mit schmalem, ungefärbten und glatten falschem Saume, der sich manchmal wie abgeschnitten von den Zähnen trennt. Ganz ähnlich ist das von mir im Additament. secund. erwähnte Exemplar in den vegetativen Theilen, dagegen zeigt das bereits verrottete Peristom, oberflächlich betrachtet, ganz deutlich quergestreifte Zähne; reinigt man indess das Peristom durch Kochen in Glycerin, so findet man, dass die Zähne gleichfalls fein punktirt, aber hier und da sehr feinnissig quergestrichelt sind, während der Saum selbst teilweise deutlich punktirt ist, zum Beweise dass an seiner Bildung auch die untere Lage der Zähne theilhaftig ist. Wegen dieser Risse, die bei *H. fluitans* nie vorkommen, halte ich die Frucht für eine Hybridation mit *aduncum* auf *H. fluitans violascens*.

3) *H. lycopodioides* SCHW. von Graby in Östergötland ist eine Hybridation mit *H. intermedium revolvens*. Die deutliche Furchung der Blätter und die manchmal bis zur Basis reichende prosenchymatische Fügung der Zellen deuten auf *H. lycopodioides*, letztere auch auf *revolvens*, die teilweise deutliche Blatteigenheit der Basalzellen und teilweise sehr beträchtliche Excurrentz mit besonderer Distinction der Basalreihe durch Verdickung und Inhalt auf *H. intermedium revolvens* und *lycopodioides* zugleich; dazu kommt, dass das Exemplar einhäusig ist. Die einzige Kapsel, die ich nachträglich auffand, ohne mich ihrer Zugehörigkeit zum Exemplare ganz versichert zu haben, hat die Peristomzähne ähnlich wie bei *revolvens* d. h. unten streifig, oben fein punktirt.

Caule elongato, irregulariter pinnatim ramuloso; foliis inferioribus lanceolatis, plus minusve curvatis falcatisve, anguste plus minusve acuminatis, apice serrulatis, alaribus varie evolutis, basalibus partim excurrentibus, ceteris suprabasalibus oblongis, mox linearibus, sursum sensim longioribus, denique lege *var. amphibii* satis longis, apice brevioribus, a basi parenchymaticis, mox prosenchymatice textis, nervo ad medium producto, d. b. 0,04—0,05 mm.; foliis superioribus ex oblongo abrupte breviter et anguste lanceolatis, acutis, apice parce serrulatis vel subintegerrimis; alaribus paucis, ampliatis, ceteris basalibus vel folio propriis vel partim excurrentibus, sequentibus oblongis linearibusque, sursum angustioribus, magis magisque elongatis, mediis partis folii latae satis longis, sursum denuo brevioribus, jam prope basin prosenchymatice textis, juxtamarginalibus haud proprie distinctis, nervo ad vel supra medium producto d. b. 0,04—0,05 mm.

1) *Dudinka* (T. f.); einige Rasen, unten dicht verworren, an der Spitze blassgrün, bald gelblich grün, schliesslich rauchbraun; Stengel über 1½" lang, dünn.

†† alpinum *

Dense caespitosum, abbreviatum, flavovirens, inferne brunneum; caule simplicem vel parcissime ramuloso, 5—7 mm. longo; foliis inferioribus lanceolatis, superioribus ex oblongo abruptius breviter lanceolatis, obsoletissime repandulis, apice nonnunquam obsolete denticulatis, basalibus folio propriis vel excurrentibus, alaribus haud vel plus minusve ampliatis, suprabasalibus paucis, ovalibus vel oblongis, parenchymaticis, sequentibus prosenchymatice textis, sursum magis magisque elongatis, foliorum angustorum multo longioribus, linearibus, latiorum brevioribus, elongato-oblongolinearibus, nervo supra medium desinente, d. b. 0,04 mm.

1) *Dudinka* (T. f.); ein dicht geschlossener Rasen, auf braunem Grunde hellgrün marmorirt.

γ vulgare SANIO.

Foliis plerumque heteromorphis, superioribus ex ovato-lanceolatis.

Unter diesem Namen vereinige ich Bastarde von *H. fluitans amphibium* mit *H. aduncum tenue* und *vulgare*. Da diese beiden Varietäten einander so ähnlich sind, sogleich disponibel bei Mangel von Früchten nur den Nerv als Unterscheidungsmerkmal bieten, so ist es selbstverständlich, dass wenigstens

häufig eine Entscheidung, ob *II. aduncum vulgare* oder *tenu* an der Hybridation theilhaftig gewesen, ganz unausführbar ist; es ist also am zweckmässigsten, hier das ohnehin sehr ähnliche zu vereinigen.

Monoicum. Caulibus intricatis, debilibus, tenuibus, sordide viridibus, deorsum fuscis; foliis falcatis vel omnibus homoeomorphis jam a basi novorum caulium ex ramis ortorum neque porro apicem versus multo mutatis, ex ovato breviter lanceolatis breviterque acuminatis, integerrimis vel obsolete passim denticulatis vel heteromorphis, inferioribus lanceolatis, subintegerrimis vel passim obsolete denticulatis vel apice serrulatis, flores masculos ferentibus, superioribus ovato-breviter lanceolatis vel ovatis, cuspidatis, flores foemineos ferentibus; alaribus foliorum latiorum inflatis, basalibus vel folio propriis vel manifeste excurrentibus, cum sequentibus nonnullis proximis ovalibus oblongisve, sequentibus rectangule vel lanceolato-oblongis, mox prosenchymatice linearibus, sursum modice vel parum elongatis, apice brevioribus, nervo ad partem attenuatam producto, d.b. 0,04—0,06 mm.; alaribus foliorum angustorum ampliatis, nonnunquam ad nervum extensis, suprabasalibus minoribus, oblongis, mox breviter linearibus ibique jam plerumque prosenchymaticis, sursum sensim valde elongatis, apice brevioribus, juxtamarginalibus utrorumque parum angustioribus; perichaetialibus laevibus, tenuinerviis, exterioribus ex ovali, interioribus ex oblongo cuspidatis; capsula in seta aurantiaca oblongo-ovali, basi attenuata vel obtusa vel immo rotundata, badia; dentibus peristomii distantibus, triangulari-lanceolatis, supra basin anguste limbatis, strato superiore manifesto biseriatis, dense trabeculatis, subtiliter plerumque punctulato-striolatis, a basi nonnunquam striatis vel passim, apicem versus pure, irregulariter punctulatis, limbo angusto obsolete punctulatis, partibus intertrabecularibus superioribus medio ampliatis, sporis optime evolutis, plasmate viridi impletis, laevibus.

1) *Lebjedevo* (T. s.); mehrere lockere, aufrechte, reichlich fruchttragende Rasen; Kapseln meistens schon entdeckt d. d. 27. 9. 1876.

♂ exannulatum *

Dioicum. Foliis falcatis, inferioribus oblongo-, superioribus ovato-lanceolatis, brevius acuminatis, obtuse serrulatis, alaribus inflatis, triangulari-congregatis, basalibus folio propriis vel varie excurrentibus, cum sequentibus proximis oblongis amplioribus,

sequentibus linearibus, par- deinde prosenchymaticis, sursum sensim sed non multo longioribus, apice brevioribus, juxta- marginalibus angustioribus, non longioribus, nervo longe supra medium procedente, d. b. 0,10 mm.

1) Nahe der Mündung des Flusses *Nischnje Tunguska* (T. s.); einige kleine Rasen, aufrecht, oben grün, unten braun; Stengel ziemlich dünn, fiederig beästelt, dem *H. fluitans exannulatum* ähnlich, ♀.

Hierher gehört auch ein von Dr. HOLLER in der Flora von Augsburg gefundenes Exemplar, das ich in der Commentatio p. 5 zu *H. exannulatum* gezogen. Unregelmässigkeit in der Basalität der untersten Zellreihe der Blätter veranlassten mich zu einer Untersuchung, die zur Annahme eines Bastardes mit *aduncum* führte. Die Peristomzähne grenzen aneinander und haben einen breiten hyalinen Saum, der fein punktirt, also aus beiden Lagen der Peristomzähne zusammengesetzt ist, was bei ächtem *exannulatum* nie der Fall ist.

2) *Hypnum lycopodioides* × *fluitans* *

Molle, lutescenti-vel fuscescenti-viride, tenue; caule irregulariter pinnato; foliis remotioribus, falcatis, inferioribus (nunc supernis) anguste oblongo-lanceolatis, sensim acuminatis subulatisque, obsolete sulcatis, parte angusta canaliculatis, manifeste vel obsolete serrulatis, apice nonnunquam serratis; basalibus vel folio propriis vel plus minusve et acute, frequenter longius deorsum excurrentibus, alaribus plerumque distinctis, parum ampliatis vel inflatis, raro subdeficientibus, ceteris basalibus et sequentibus proximis oblongis, mox linearibus, sursum valde elongatis, a basi parenchymaticis, deinde promiscue par- et prosenchymatice textis, denique pure prosenchymaticis, apicalibus brevioribus, juxtamarginalibus parum angustioribus, nervo conspicue flexuoso, partem attenuatam haud attingente, laevi, subtus valde prominente, more *H. lycopodioidis* e cellulis angustis, incrassatis composito, d. b. 0,05—0,08 mm.; foliis superioribus (nunc infernis) oblongo-lanceolatis, sensim acuminatis, longius subulatis, obsolete sulcatis, serrulatis repandulisve vel passim longe subintegerrimis, alaribus ampliatis, pellucidis vel fusco coloratis, basalibus vel plus minusve folio propriis vel varie acute longeque excurrentibus, ipsis et sequentibus proximis oblongis, mox linearibus, prosenchymaticis, sursum valde, sed foliorum angustiorum brevius, elongatis, apicem versus

brevioribus, juxtamarginalibus parum angustioribus, nervo ad partem angustam producto, d. b. 0,05—0,08 mm. Dioicum.

1) *Fatjanova* (T. s.); einige kleine Rasen, Stengel über 3" lang, ♀.

[Hierher gehört ein von Dr. BROTHERUS am Vorgebirge Orloff im östlichen Lappland gesammeltes Exemplar, das mir Dr. ARNELL mittheilte und ich in das Additum. secund. als *fluitans exannulatum* aufnahm. Die Basalzellen, ansehnlich verdickt, liegen entweder in einer Reihe oder ragen mehr oder weniger spitz zwischen die Stengelzellen hinein, so dass manchmal die Reihenstellung ganz aufgehoben ist und das Gewebe der Blattbasis prosenchymatisch continuirlich in die Stengelzellen übergeht; die Blattflügelzellen sind weniger ausgebildet, aber stets in einiger oder geringer Anzahl und beträchtlich verdickt. Das übrige Blattgewebe ist meist prosenchymatisch gefügt, aber kürzer als bei dem vorigen Bastarde, die Juxtamarginalen mehr oder weniger verschmälert, so dass hier also nicht *var. amphibium*, sondern *var. exannulatum* theilhaftig ist. Da die Blätter stellenweise schwarzviolett gefärbt sind, so nehme ich an, dass von *H. lycopodioides* die *var. lapponicum* theilhaftig gewesen. Es ist also als *H. lycopodioides (lapponicum) × fluitans var. exannulatum* zu bezeichnen. Wegen der torulösen Zellwandungen könnte man hier auch, statt an *exannulatum*, an *var. Wilsoni* denken, indess ist für eine solche Annahme die Zahnung der Blätter zu deutlich, die Blattflügelzellen für *var. Wilsoni* zu sehr ausgebildet.]

3. *Hypnum intermedium × vernicosum* SANIO.

Foliis falcatis, ex ovali lanceolatis, cuspidato-subulatis, integerrimis, obsolete sulcatis; basalibus distinctis vel folio propriis vel passim plus minusve excurrentibus, cum sequentibus proximis, intense fuscis jam a basi prosenchymatice, parietibus transversis raris, textis, elongato-oblongis, sursum angustioribus, parum longioribus, flexuosis, juxtamarginalibus angustioribus, longioribus, nervo subflexuoso, ad vel in partem angustam producto, d. b. 0,04—0,06 mm.

1) *Malo Briokovskij ostrov* (T. f.); einzelne Stengel zwischen *H. intermedium verum* und *H. lycopodioides vernicosum*. Die Falten und das Zellnetz, die gelegentliche Excurrenten weisen auf *H. lycopodioides vernicosum*, die distincte Basalität der untersten Zellreihe der Blätter auf *H. intermedium verum* hin.

4. *Hypnum badium* × *Wilsoni* *

Foliis subsecundis vel secundis, elongato ovatis, apiculatis, supra basin repandulis vel obtuse serrulatis, sursum integerrimis vel subintegerrimis, alaribus more *var. Wilsoni sibirici* non ampliatis vel nonnunquam more *H. badii* partim ampliatis incrassatisque, nonnunquam nullis, basalibus indistincte excurrentibus, suprabasalibus oblongis, longe sursum parenchymaticis, sensim angustioribus, deinde prosenchymatice textis, linearibus, parum longioribus, apicem versus brevioribus, juxta-marginalibus jam supra basin multo angustioribus, nervo supra medium evanescente, d. b. 0,03 mm., perichaetialibus externis laevibus, intimis obsolete vel evidenter, sed nunquam acque profunde ac *Hypni aduncii Wilsoni* sulcatis.

1) *Tolstoj nos* (T. f.); zwei Rasen, darin wenigstens die mit Perichaetien versehenen Stengel ächt. Von dem Habitus des *Hypnum badium*, etwas robuster, an der Spitze gelbgrün, bald ockerfarbig, schliesslich braun; Stengel stellweise beästelt. Bei den sibirischen Exemplaren des *H. aduncum Wilsoni* kommt, so viel ich gesehen, nie eine auffällige Erweiterung der Blattflügelzellen vor; dieser Umstand machte mich zuerst aufmerksam und führte zu der Entdeckung des Kennzeichens, welches die Perichaetialen bieten.

In nachfolgender Tabelle gebe ich eine systematische Uebersicht der sibirischen Harpidien mit ihrer Vertheilung in den 3 Territorien. Wo ich im Texte von einem Standorte wegen Verschiedenheiten im Habitus etc. mehrere Nummern aufgeführt, habe ich dieselben, da sie nur ein Ausdruck der Dichtigkeit des Vorkommens sind, in eine zusammengezogen, woraus sich ergibt, dass die Zahl der Fundorte 117 beträgt. Auf Wunsch Dr. ARNELL's sind hier auch die von ihm in der Sammlung LUNDSTRÖM's extricirten Harpidien bei den Territorien berücksichtigt; da es indess doch möglich ist, dass Dr. LUNDSTRÖM an denselben Stellen gesammelt, so habe ich die ursprünglichen, durch die Specialstandorte gesicherten Zahlen in Klammern beigefügt.

Die Verbreitung der Harpidien-Varietäten am Jenisei nach den Zonen.

Namen der Varietäten.	T. s.	T. a.	T. f.
1) <i>Hypnum fluitans</i> L.			
β <i>exannulatum</i> (GÜMB.)	—	—	—
a) <i>typicum</i> SANIO	—	—	—
*	4	1	1
*** <i>fumigatum</i> SANIO	—	3.	—
***** <i>purpurascens</i> SCHPR.	—	1	—
***** <i>cuspidatum</i> SANIO	—	—	1
b) <i>acutum</i> SANIO	—	—	—
*	—	—	2 (1)
** <i>assimile</i> SANIO	1	—	—
***** <i>orthophyllum</i> MILDE ..	—	—	1
γ <i>falcatum</i> SCHPR.	1	1	—
δ <i>amphibium</i> SANIO	—	—	—
a) <i>alpinum</i> SCHPR.	—	1	—
†† <i>pennulosum</i> SANIO	—	1	—
c) <i>paludosum</i> SANIO	2	1	—
h) <i>Arnelli</i> SANIO	—	—	1
ε <i>Rotac.</i> (DE NOT.)	—	—	—
** <i>viride</i> SANIO	—	1	—
2) <i>Hypnum intermedium</i> LINDB.			
α <i>verum</i> SANIO	—	1	3 (2)
††† <i>arcticum</i> SANIO	—	—	2
***** <i>Cossoni</i> SCHPR.	—	—	1
β <i>revolvens</i> (SW.)	—	—	—
† <i>fuscum</i> SANIO	—	—	2
†† <i>brunneum</i> SANIO	—	—	2
††† <i>violascens</i> SANIO	—	—	2
3) <i>Hypnum uncinatum</i> HEDW.			
α <i>suetum</i> SANIO	—	—	—
** <i>medium</i> SANIO	5	5	6 (4)
†† <i>fuscillum</i> SANIO	1	—	1
*** <i>plumosum</i> SCHPR.	1	1	—
β <i>plumosum</i> SCHPR.	—	—	—
††† <i>tenue</i> SANIO	—	—	2
*** <i>implexum</i> SANIO	4	—	—
δ <i>drepanioides</i> SANIO	1	—	—

Namn der Varietäten.	T. s.	T. a.	T. f.
4) <i>Hypnum aduncum</i> L.			
α <i>Blandowii</i> SANIO	—	—	—
a) <i>pungens</i> H. MÜLL.	2	—	—
c) <i>polycarpon</i> BLAND.	1	—	—
d) <i>intermedium</i> SCHPR.	1	1	—
*** <i>laxum</i> SCHPR.	1	—	—
γ <i>Hampei</i> SANIO	—	—	—
c) <i>Kneiffii</i> SCHPR.	—	1	—
††† <i>gracile</i> SANIO	—	—	—
d) <i>tenue</i> SCHPR.	8	3	3
*** <i>filiforme</i> BERGGREN	—	—	1
**** <i>densum</i> SANIO	—	—	—
†† <i>sciurum</i> SANIO	—	—	—
††† <i>julaceum</i> SANIO	—	—	—
***** <i>robustus</i> SANIO	—	—	3
f) <i>percurrens</i> SANIO	—	—	—
δ <i>molle</i> SANIO	—	—	—
a) <i>Wiloni</i> SCHPR.	—	—	2
** <i>Holleri</i> SANIO	—	—	2 (1)
*** <i>binerve</i> SANIO	—	1	1
ε <i>legitimum</i> SANIO	—	—	—
b) <i>vulgare</i> SANIO	1	—	1
c) <i>Sendtneri</i> SCHPR.	—	—	—
* <i>latifolium</i> SANIO	1	—	—
** <i>triviale</i> SANIO	1	—	—
<i>Schimperi</i> SANIO	—	—	—
a) <i>capillifolium</i> (WARNSTORF)	1	—	—
6) <i>Hypnum lycopodioides</i> SCHW.			
α <i>genuinum</i> SANIO	—	—	3
** <i>lapponicum</i> LINDB.	1	2	1
†† <i>Sahlbergii</i> SANIO	—	1	—
*** <i>majus</i> LINDB.	—	—	2
†† <i>Holleri</i> SANIO	1	—	—
β <i>vernicosum</i> LINDB.	1	1	5
Zahl der	Varietäten.		
" "	21	17	24
" "	Species.		
" "	4	5	5
" "	Standorte.		
	40	26	51

Die Gesamtzahl der auf der Expedition gesammelten Harpidien beträgt also 50 Varietäten, von denen 5 am Jenisci fehlen. Am günstigsten sind die Zahlenverhältnisse für das *Territorium frigidum* mit 5 Species, 24 Varietäten und 51 Standorten. Characteristisch für das *Territorium arcticum* ist *H. fluitans* mit 7 Varietäten, für das *Territorium frigidum* *H. intermedium* mit 6 und *H. lycopodioides* mit 4 Varietäten, dagegen herrscht im *Territorium silvorum* *H. uncinatum* mit 5, *H. aduncum* mit 9 Varietäten vor.

Lyck d. 5 August 1884.

Nachschrift.

Um eine Vergleichung der sibirischen mit den europäischen Harpidien möglich zu machen, füge ich ein Verzeichniss sämtlicher mir bekannt gewordenen Varietäten bei. Die in Sibirien vorkommenden sind durch ein †, die bisher nur dort gefundenen mit einem †† ausgezeichnet.

Die Paginirung bezieht sich auf die Description.

I. *Harpidia exannulata* SANIO. p. 8.

1) *Hypnum fluitans* L. p. 8.

α fontanum SENDTN.

** *plumulosum* SN.

*** *vittatum* SANIO ¹⁾. p. 12.

**** *pseudostramineum* MILDE Bryol. Silcs.,
nec C. MÜLLER nec SANIO.

***** *Brotheri* SANIO ²⁾.

¹⁾ Glaucoviride, foliis apice rubentibus quasi rubro vittatum; foliis subaemulis, ovato- vel plerumque oblongo-lanceolatis vel oblongis, acutis, reti laxiore. Snöhättan 1858 det. ZETTERSTEDT, com. SETH.

²⁾ Dilute lutescenti-viride, inferne brunneum; multo antecedentibus rigidius, Hypnis e sectione Schimperiana Brachythecio simile. Foliis undique patulis, apicalibus nonnunquam parum curvatis, subaemulis, inferioribus oblongo-, superioribus anguste ovato-lanceolatis, acutis, repandulis vel apice singulis denticulis serrulatis, (basalibus folio propriis), alaribus angularibus, ampliatis, polygono-ovalibus, suprabasalibus ovalibus oblongisve, sequentibus prosenchymatice textis, linearibus, inferioribus amplioribus, superioribus juxtamarginalibusque parum angustioribus, nervo supra medium producto, d. b. fol. angustiorum 0,07—0,08 mm., latiorum 0,06—0,07.

In Fennia prope Vasa, loco paludoso, aestate sicco, in abiegno. Aug. 1884. Dr. V. F. BROTHERUS!

β *exannulatum* (GÜMB.) p. 8.a) *typicum* SANIO † p. 10.** *occultum* SANIO ¹⁾).*** *fumigatum* SANIO † p. 11.**** *purpurascens* SCHPR. † p. 11.***** *serratum* MILDE ²⁾).***** *cuspidatum* SANIO †† p. 11.b) *acutum* SANIO † p. 12.** *assimile* SANIO † p. 12.*** *fuscum* SN. p. 13.**** *coffeatum* SANIO ³⁾).***** *violascens* SANIO. p. 13. p. 47.***** *orthophyllum* MILDE † p. 13. γ *falcatum* SCHPR. † p. 13. δ *amphibium* SANIO. p. 14.a) *alpinum* SCHPR. ††† *pennulosum* SANIO †† p. 14.b) *condensatum* SN.** *tenerrimum* SN.c) *paludosum* SN. † p. 14.†† *terrestre* SANIO.††† *auriculatum* SANIO ⁴⁾).†††† *robustum* SANIO ⁵⁾).d) *flaccidum* SN.** *setaceum* SANIO ⁶⁾).

¹⁾ Folii apice rubentibus quasi vittatum. Ein Exemplar von Dr. VENTURI ohne Standort, ein zweites weniger ausgeprägtes von Dr. ARNELL aus Småland, Barkeryd, Boarp 1884.

²⁾ Diese Varietät, die ich noch nicht gesehen, mag gar nicht hierher gehören, vielleicht zu δ *amphibium*. — Nach Exemplaren, die mir neuerdings Herr SCHULZE aus Breslau zusandte, ist diese Varietät die Frühlingsform des *exannulatum* b *acutum* foliis heteromorphis, inferioribus angustis, longe acuminatis, sursum serratis, falcatis hamatisve.

³⁾ Usque ad apicem intensius tinctum brunneum. Ex meo specimine: Folii subsecundis, parum curvatis, inferioribus ex ovali lanceolatis, superioribus non quatuordecim evolutis ovatis, utrisque acutis. Monocotyledoneum! In Ostrobotnia boreali prope Pudasjärvi inter Pirrivaara et Naamanka in sphagneto. 22. 6. 1883. Leg. Dr. V. F. BROTHERUS!

⁴⁾ Folii basi alaribus auriculatis. In regno Hannoverano prope Bassum: Bolte's Bruch bei Bramstedt 1883. Leg. C. BECKMANN!

⁵⁾ More Hypni adunci Sendtneri robustum, satis dense foliatum. In regno Hannoverano prope Bassum: Ihlpohl, Karrenbruch 1884. Leg. C. BECKMANN!

⁶⁾ Folii aemulis, remotis, patentibus, subsecundis, angustissime linearilanceolatis, longissime et angustissime acuminatis, a basi subintegerimis vel parvisime, sursum evidentius serrulatis, alaribus haud vel parum distinctis, nervo ad partem angustam producto, d. b. 0,05—0,06

e) *rigidum* SN.

f) *submersum* SCHPR.

** *Schulzei* SANIO — an *H. fluitans* & *tenellum*
RENAULD ex RENAULD in Revue Bryol. 1881,
p. 77? ¹⁾

g) *dolichoneuron* SN. ²⁾

h) *Arnellii* SANIO †). p. 15.

ε *Rotae* (DE NOT.) p. 15.

** *viride* SANIO †

II. *Harpidia intermedia* SANIO. p. 15.

2) *Hypnum intermedium* LINDB. p. 16.

α *verum* SANIO † p. 16.

†† *remotiusculum* SANIO ³⁾.

††† *arcticum* SANIO † p. 16.

** *falcatum* SANIO ⁴⁾.

†† *Warnstorffii* SANIO ⁵⁾.

*** *alpinum* SANIO ⁶⁾.

*** *purpureum* SN.

**** *Cossoni* SCHPR. p. 17.

†† *rufescens* SANIO ⁷⁾.

††† *giganteum* LIMPRICT in Kryptogamen-Flora von Schlesien Bd I p. 68 †
p. 17.

mm. Apice lutescenti-viride, mox obscure fuscum. In Fennia prope Vasa, loco paludoso, aestate sicco, in abiegno. 1884. Leg. Dr. V. F. BROTHERUS!

¹⁾ Elatum, tenue, angustifolium. In Böhmen auf der Weissen Wiese im Riesengebirge 1883, det. SCHULZE.

²⁾ Eine ungleich robustere Form dieser Varietät fand 1883 Dr. V. F. BROTHERUS in Finnland bei Kuusamo: Montejaara! Dagegen gehören die im Addit. sec. p. 5. hieher gezogenen Exemplare von Lyck zu der einhäusigen Varietät des *exannulatum typicum*, die nach ihrem Habitus dem *paludosum* täuschend ähnlich ist.

³⁾ Foliis remotiusculis. Tenuius. Lyck! Ångermanland, Sollefteå. Hallsta (ARNELL!)

⁴⁾ Foliis superioribus remotioribus, oblongo-lanceolatis, falcatis, inferioribus densioribus, hamatis, ex ovali lanceolatis. Lyck, sumpfige Wiese am kleinern Tatarensee! Rothés Bruch.

⁵⁾ Nigricans, apicibus pallide vel flaventi-viridibus, demum pallide fuscum. Lyck, Rothés Bruch, 9. 4. 1884!

⁶⁾ Dense caespitosum, pulvinatum, molle. Foliis densis, falcatis hamatisque, latius oblongo-lanceolatis, passim rubentibus. Algäu, Hochvogel-Gipfel 7900' Sept. 1882 Dr. HOLLER!

⁷⁾ Rufescens. Augsburg HOLLER! Cf. SANIO Comm.

β revolvens (Sw.)

† fuscum SANIO †† p. 17.

†† brunneum SANIO †† p. 17.

††† violascens SANIO † p. 18.

III. Harpidia adunca SANIO. p. 18.**3) Hypnum uncinatum HEDW. p. 18.** **α suetum SANIO. p. 19.*** *orthothecioides* LINDB.** *medium* SN. † p. 19.

†† fuscellum SANIO † p. 21

*** *plumosum* SCHPR. † p. 21. **β plumulosum SCHPR. p. 22.**

† Arnellii SANIO. p. 22.

†† robustius SANIO. p. 22.

††† tenue SANIO † p. 23.

†††† gracilescens SCHPR.

** *implexum* SANIO † p. 23.b) *contiguum* NEES.c) *fertile* (SENDTN.)d) *drepanioides* SANIO †† p. 24. **γ subjulaceum SCHPR.****4) Hypnum aduncum L. p. 24.** **α Blandowii SANIO. p. 25.**a) *pungens* H. MÜLL. † p. 26.b) *Geheebii* SN.c) *polycarpon* BLAND. † p. 27.†† squarrosus SANIO ¹⁾.d) *intermedium* SCHPR. † p. 27.** *penna* SN.*** *laxum* SCHPR. † p. 28.e) *laxifolium* SN. **β pseudofluitans SANIO.**a) *pseudostramineum* SANIO nec C. MÜLLER nec MILDE.

¹⁾ Foliis superioribus deltoideo-ovatis, acutissime cuspidatis, squarrosis. S. Baiern, Memmingen, Hochmoor bei Pless 560 m., Dr. HOLLER!

b) *inermis* SN.

c) *paternum* SN.

γ **Hampei** SANIO. p. 29.

a) *aquaticum* SN.

** *filicinum* SN.

b) *Venturii* SANIO. p. 12.

** *viride* SANIO ¹⁾).

** *acutum* SANIO ²⁾).

c) *Kneiffii* SCHPR. p. 29.

†† *varians* SN.

††† *aurescens* SANIO †† ³⁾).

†††† *gracile* SANIO †† p. 30.

d) *tenue* SCHPR. † p. 30.

** *dubium* SANIO ⁴⁾).

*** *filiforme* BERGGREN † p. 33.

**** *densum* SANIO †† p. 33.

†† *sciurum* SANIO †† p. 34.

††† *julaccum* SANIO †† p. 34.

***** *robustius* SANIO † ⁵⁾).

e) *percurrentis* SANIO †† p. 35.

** *homoeophyllum* SANIO. p. 35.

f) *unculus* SN.

** *circinatum* SANIO. p. 36.

δ **molle** SANIO. p. 36.

a) *Wilsoni* SCHPR. † p. 36.

** *Holleri* SANIO † p. 37.

*** *binerve* SANIO †† p. 38.

b) *turgescens* SCHPR. p. 38.

ε **legitimum** SANIO. p. 38.

a) *gracilescens* SCHPR.

¹⁾ Totum viride, denique fuscum. In regno Hannoverano prope Bassum: Oberwald, 16. 4. 1884. Leg. C. BECKMANN! In Borussiae orientalis circulo Angerburg. Pillacker Berge in einer Torfkaule (CZEKAJ!).

²⁾ Viride; foliis brevioribus, acutis. In regno Hannoverano prope Bassum: Gross-Ringmar; Apr. 1883 leg. C. BECKMANN! In Borussiae orientalis circulo Angerburg., in paludosis domini Popiollen (CZEKAJ!).

³⁾ Aureo nitidulum. Plachino am Jenisei, ARNELL!

⁴⁾ Foliis superioribus ex ovato lanceolatis, acuminatis, curvatis vel falcatis, reti *var. tenuis*, brevi. Lyck, Rosinskoër Bruch 1884! CZEKAJ!

⁵⁾ Nach einem vom Apotheker JANZEN im Riesengebirge (am Zackelfall) gesammelten Exemplare des *H. aduncum Hampei Arnellii* SANIO Addit. sec. kann ich nicht länger zweifeln, dass diese Varietät zu *H. ochraceum Wils.* gehöre. Entscheidend ist die distincte Excurrenz der Blattzellen; die darunter gelegenen Stengelzellen sind leer und weiter. Ich stelle es also als *var. Arnellii* zu *H. ochraceum Wils.*

b) *vulgare* SN. † p. 38.

†† *varians* SN.

** *robustum* SN.

c) *Sendtneri* SCHPR. p. 39.

* *latifolium* SN. † p. 39.

** *triviale* SN. † p. 39.

d) *giganteum* SCHPR. p. 40.

§ *Schimper* SANIO. p. 40.

a) *capillifolium* WARNST. erweitert † p. 40.

** *Warnstorffii* SANIO ¹⁾).

b) *Lindbergii* SN. p. 40.

c) *pseudointermedium* SANIO. p. 41.

5) *Hypnum scorpioides* L. p. 41.

β *julaceum* SN.

6) *Hypnum lycopodioides* SCHW. p. 41.

α *genuinum* SN. † p. 42.

** *lapponicum* LINDB. † p. 43.

†† *Sahlbergii* SANIO †† p. 44.

*** *majus* LINDB. † p. 44.

†† *Holleri* SANIO † p. 44.

β *vernicosum* (LINDB.) † p. 45.

¹⁾ Foliis superioribus latioribus, ex ovato cuspidato-aristatis, inferioribus lanceolatis. Lyck! Neuruppin (WARNSTORFF!).

Lyck d. 1 Juni 1885.

Druckfehler.

Seite 3, Zeile 5, statt Guvernement	lies Gouvernement
» 3, » 15, » auf dem Obstrom aufwärts	» auf dem Obstromaufwärts
» 5, » 14, » Fortsetzung	» Fortsetzung
» 6, » 13, » Verkuje Imbutsk	» Verkuje Imbatsk
» 7, » 28, » 6	» 7
» 7, » 29, » 17	» 16
» 7, » 36, » 16	» 17
» 8, » 17, » peristomi	» peristomii
» 8, » 27, » intertrabacularibus	» intertrabecularibus
» 9, » 1, » Blattverschmälerung	» Blattverschmälernng
» 9, » 6, » die obern, — im Sommer	» die obern im Sommer
» 9, » 30, » Reihestellung	» Reihenstellung
» 9, » 36, » an	» am
» 9, » 37, » rein — und	» rein und
» 11, » 5, » ziehmlich	» ziemlich
» » » 6, » form.	» Form
» » » 30, » ocuminatis	» acuminatis
» 12, » 15, » besonderm	» besonders
» » » 28, » numquam	» nunquam
» 13, » 10, » übergossener	» übergossenes
» 15, » 20, » angustoribus	» angustioribus
» 16, » 10, » b	» *****
» » » 13, » oblongolanceolatis	» oblongo lanceolatis
» » » 14, » integerrimus	» integerrimis
» » » 22, » reichlich	» reichlicher
» 18, » 6, » angeflugen	» angeflogen
» » » 21, » annullo	» annulo
» » » 34, » untersten	» untern
» 19, » 6, » allgemeiner	» allgemeines
» » » 16, » Suetam	» suetum
» 20, » 35, » beblättert	» beblättert. SAHLBERG!
» » » 47, » aufrecht	» aufrecht, hellgrün, zuletzt rauchbraun,
» 22, » 15, » quoad citatum	» quoad locum citatum
» » » 35, » farblose	» farbloser
» 23, » 7, » ovata	» ovali
» 26, » 15, 16 » rectum vel parum curvatum	» rectam vel parum curvatam
» » » 38, » Verkuje Imbutsk	» Verkuje Imbatsk
» 27, » 17, » oben	» oben,
» 28, » 21, » basalibus	» basalibus et suprabasalibus
» 29, » 19, » Ausnahme	» Ausnahme
» 31, » 19, » Stengel fein	» Stengel mässig fein,
» » » » » höchsten	» höchstens
» » » 36, » Verkuje Imbutsk	» Verkuje Imbatsk
» 32, » 4, » Karasimo	» Karasino
» 33, » 15, » Zahlreiche	» zahlreiche

Seite 33, Zeile 39, stat	kürzere	lies kürzeren
» 35, » 23, »	angustioribus	» angustioribus
» 37, » 42, »	Fusstief	» Fuss tief
» 40, » 24, »	— latiorum	» latiorum
» 41, » 1, »	analoge	» analogen
» 45, » 3, »	indistinctie	» indistincte
» » » 16, »	supbrabasalibus	» suprabasalibus
» » » 34, »	ockerfarbig	» ockerfarbig, dann
» 47, » 23, »	violascetibus	» violascentibus
» 48, » 35, »	ovato-lanceolatis	» ovato lanceolatis

Verbesserung.

Da Seite 56 β exannulatum ***** serratum MILDE nach der Belehrung durch Herrn SCHULZE als $\dagger\dagger$ unter b acutum SANIO * zu stellen ist (mit meinem Vorbehalte, dass es schliesslich am besten ganz aufzugeben sei), so rückt an seine Stelle als ***** purpurascens SCHPR., während **** durch eine neue Varietät, die letzte nach dem Farbenschema. ausgefüllt wird, die ich als **** obscuratum SANIO einführe:

Foliis omnibus fuscis, junioribus dorso secus nervum purpurascetibus.

Varietati *** fuscum sub b acutum analoga, sed foliis longius acuminatis subulatisque diversa. Riesengebirge um die Dreisteine auf Sumpfstellen 27. 8. 1884; det. SCHULZE!

Die Röthung ist nicht überall ausgeprägt, aber potentialiter, wie bei der var. purpurascens selbst in manchen Fällen, anzunehmen, so zwar dass bei var. fumigatum diese Röthung nie eintreten könne, während sie bei dieser Varietät in andern Zellen überall vorhanden sein kann. Weitere Untersuchungen haben dies zu bestätigen.

OM

DE KEMISKA GRUNDÄMNE NAS PERIODISKA SYSTEM

AF

J. R. RYDBERG.

DOCENT I FYSIK VID LUNDS UNIVERSITET.

MED 2 TAFLOER.

MEDDELDAT DEN 10 SEPTEMBER 1884.

STOCKHOLM, 1885.

KONGL. BOKTRYCKERIET.

P. A. NORSTEDT & SÖNER.

A. Periodicitetens natur.

På grund af de undersökningar, hvilka af MENDELEJEFF, LOTHAR MEYER o. a. blifvit utförda, har det redan länge kunnat anses såsom bevisadt, att de kemiska grundämnenas fysiska egenskaper äro periodiska funktioner af deras atomvígter; men det oaktadt synes ännu icke något försök hafva blifvit gjordt att närmare bestämma dessa funktioners natur. Endast några strödda anmärkningar derom påträffas i dessa författares skrifter. MENDELEJEFF ¹⁾ åtnöjer sig med att påvisa tillvaron af mindre perioder omfattande 7 element, af hvilka perioder eller rader (de båda första undantagna) två och två, tillsammans med 3 andra till en åttonde grupp hänfödda ämnen, bilda en större af 17 element bestående period. Han antyder derjemte ²⁾ möjligheten af att dessa senare två och två bilda perioder af ännu större längd. Något försök att förklara olikheten mellan de jemna och udda raderna eller de båda första korta periodernas skiljaktighet från de följande förekommer deremot icke. LOTHAR MEYER yttrar vid beskrifningen af atomvolumernas kurva, att dess sex afdelningar »etwa die Form an einander gereihter Kettenlinien zeigen» ³⁾. Beträffande kurvan för smältpunkterna anmärker han: »In den grösseren Curvenabschnitten zeigt sich ein zweites Minimum bei den Metallen Ga, In, Hg» ⁴⁾, och om tabellen öfver refraktionsequivalenterna: »Innerhalb jeder Periode, in welcher andere Eigenschaften ein oder zwei Maxima

¹⁾ Ann. Chem. Pharm., Suppl.- Bd VIII, 145. MENDELEJEFFS allmänt antagna anordning af elementen i 12 rader och 8 grupper eller kolumner har öfverallt blifvit använd för betecknande af ett ämnes plats i systemet.

²⁾ På anf. st. pag. 184, not.

³⁾ Die modernen Theorien der Chemie, 4te Aufl., pag. 143.

⁴⁾ På anf. st. pag. 147.

haben, zeigen auch das specifische Brechungsvermögen und das Refractionsaequivalent ein oder zwei Maxima¹⁾).

Slutligen påpekar CARNELLEY²⁾, att af de åtta elementen As, Se, Sn, Sb, Te, Tl, Pb, Bi, hvilka äro de enda, som icke följa den af honom uppställda regeln, att smältpunkterna förhålla sig omvändt som atomvolumerna, fem (As, Sn, Sb, Te, Bi) äfven äro undantag från regeln, att utvidgningskoefficienterna äro desto större, ju lägre smältpunkterna ligga, och att i motsvarande punkter MEYER'S kurva för atomvolumerna äfven afviker från sitt regelbundna lopp, eller, såsom han uttrycker sig om denna kurva: *it rises regularly and somewhat sharply from Ni, Cu and Zn to Ga and then, though it does not really do so, yet it shows a very strong tendency to turn downwards to As. In the same way in division 5 the curve rises regularly and rapidly from Pd, Ag and Cd to In and then exhibits a strong downward tendency towards Sn and Sb.*»

Mer än dessa spridda antydningar rörande de nämnda funktionernas form har jag icke lyckats finna inom den mig tillgängliga literaturen, och det synes som om man i allmänhet misströstad om möjligheten att af det hittills vunna materialet kunna draga några allmänna slutsatser. Jag hoppas emellertid kunna visa, att ett närmare studium af de bäst kända fysiska egenskapernas funktionsformer tillåter att uppställa åtskilliga allmänna satser, hvarigenom till och med en förberedande matematisk behandling möjliggöres.

Genom CLARKE'S stora samling af »Constants of nature», genom de af samme författare samt LOTHAR MEYER och SEUBERT utförda nyberäkningarne af atomviktarna och senast genom LANDOLT-BÖRNSTEIN'S »Physikalisch-Chemische Tabellen» har det stora observationsmaterialet blifvit lätt tillgängligt och tillfälle att bedöma de olika iakttagelsernas värde gifvet. En granskning af detta material visar emellertid, att såväl fullständighet som noggrannhet lemna mycket öfrigt att önska.

Observationsmaterialet. Den oberoende variabel, hvaraf de fysiska egenskaperna skola uttryckas sasom funktioner, är *atomvikt*en, hvilken jag i det följande öfverallt betecknat med *x*. Till de fysiska konstanter, som för ett större antal ämnen och med tillfredsställande noggrannhet äro kända, och hvilkas beroende af *x* således är möjligt att undersöka, äro för tillfället

¹⁾ På anf. st. pag. 161.

²⁾ Phil. Mag. S. 5. Vol. 8. 1879, pag. 323.

icke flere än fyra att räkna, nämligen: *egentliga vigten i fast form* (s), *smältpunkten* (T , absol. temp.), *utvidgningskoefficienten i fast form* (α) och *refraktionsequivalenten* (R).

Såväl vid konstruktionen af de bifogade kurvorna som vid räkningarne har jag begagnat de MEYER-SEUBERT'ska värdena på atomvågerna och i allmänhet nyttjat LANDOLT-BÖRNSTEIN's Physikalisch-Chemische Tabellen under jemförelse med CLARKE's Constants of Nature. Alla de använda talvärdena finnas upptagna i tabellen vid slutet af afdelning A.

Beträffande de särskilda konstanterna är följande att anmärka:

Atomvigten är känd för 66 element, hvaraf dock flera till sina fysiska egenskaper äro nästan fullkomligt obekanta och alltså här icke komma i betraktande. För Ti har jag antagit THORPE's värde 48 och för Te BRAUNER's värde 125, såsom det enda, hvilket öfverensstämmer med elementets plats i det periodiska systemet.

Egentliga vigten i fast form uppgifves för 56 element samt för 5 af de återstående i flytande form. Af dessa 61 kunna dock flere betraktas såsom i hög grad osäkra, nämligen H, B, N, O, Si, Cl, V, Cr, Mn, Co, Ni, Y¹⁾, Zr, Nb, Mo, Cs, Ba, La, Ce, Di, Ta, W, U på grund af dels de gjorda bestämningarnes ringa antal, dels deras bristande öfverensstämmelse. De hittills icke undersökta äro Fl, Sc, Ti, Er, Yb.

Smältpunkterna hafva blifvit bestämda för ett antal af 21 element med ett sannolikt fel af åtminstone icke öfver 5° C. Dessa 21 element äro Li, Na, P, S, K, Zn, Ga, Se, Br, Rb, Cd, In, Sn, Sb, Te, J, Cs, Hg, Tl, Pb, Bi.

Vid somliga af dessa kan felet icke uppgå till mera än 0,1 C. Osäkerheten ökas naturligtvis hastigt, då afståndet från den vanliga medeltemperaturen växer. På grund deraf torde smältpunkterna för följande 13 element ej kunna anses kända noggrannare än på 100° C. Mg, Al, Si, Mn, Fe, Co, Ni, Cu, Pd, Ag, Ir, Pt, Au.

För de öfriga 23 element, hvarom något närmare är bekant, kan endast maximum eller minimum angifvas. De äro H, Be, C, N, O, Fl, Cl, Ca, Cr, As, Sr, Zr, Mo, Ru, Rh, Ba, La, Ce, Di, Ta, W, Os, U.

¹⁾ Hvarifrån det af flere författare använda värdet 3,77 för egentliga vigten af Y ursprungligen härstammar, har jag icke kunnat utröna. Det förekommer hvarken hos CLARKE eller LANDOLT-BÖRNSTEIN. Då det passar väl i systemet, har jag emellertid begagnat detsamma.

Äfven bland de återstående 9 kan man om flere med stor sannolikhet säga, att smältpunkterna måste ligga ganska högt. Man har således tillräckligt material att approximativt bestämma formen af smältpunkternas kurva i hela dess utsträckning och med ganska stor noggrannhet för lägre värden på T .

Utvidgningskoefficienterne i fast form. Den lineära utvidgningskoefficienten är icke bestämd för mera än 31 element och om dess värden för de öfriga kunna icke några omedelbara slutsatser dragas. De undersökta ämnena tillhöra nästan uteslutande de udda raderna af grupperna 1—6 samt gruppen 8. Af dessa saknas endast Ga och Hg, af öfriga element äro blott C och K undersökta. Kurvans form kan på grund häraf icke med visshet bestämmas mer än till dess halfva utsträckning.

Refraktionseqivalenterna. Dessa äro hittills bestämda för inalles 47 grundämnen men i allmänhet med ringa noggrannhet. Kurvan kan blott approximativt konstrueras.

Bland dessa fyra fysiska egenskaper, hvilka för ett större antal grundämnen kunna genom tal uttryckas, står *egentliga vigten* för tillfället ovilkorligen främst, såväl i fråga om antalet värden som deras noggrannhet. Denna senare lemnar emellertid ännu mycket att önska, hvartill orsaken först och främst torde vara att söka deri att bestämningar af egentliga vigten blifvit utförda vid sidan af andra undersökningar och i allmänhet ej ansetts ega större vetenskapligt värde. Det torde ännu dröja, innan det lyckas att bringa de svårt reducerbara och svårsmälta ämnena inom det periodiska systemets jemna rader i sammanhängande metallisk form, och på annat vilkor lära väl icke några noggranna bestämningar af specifika vigten låta verkställa sig. Att ega ämnena i dylik form måste äfven betraktas såsom nödvändigt vid mätandet af *utvidgningskoefficienten*, och nämde svårsmälta ämnen undandraga sig således en undersökning äfven i detta afseende. Men icke nog dermed; för dessa samma ämnen måste på grund af deras natur *smältpunkten* endast med stor svårighet kunna bestämmas, helst i detta fall osäkerheten ökas genom svårigheten att angifva höga temperaturer i samma mått som lägre. Från alla dessa hinder är deremot undersökningen af *refraktionseqivalenterna* fri, då ju hvarje genomskinlig eller löslig förening, hvari ett grundämne ingår, kan med fördel här till användas, och således alla ämnen med nästan lika lätthet pröfvas. Då emellertid undersökningen af refraktionseqivalenten såväl i teoretiskt som experimentelt

afseende ännu endast kan betecknas såsom börjad, är någon användning deraf för vårt ändamål icke möjlig. Resultatet blir alltså, att endast *den egentliga vigten i fast form* och *smält-punkten* kunna tjena såsom material för en undersökning af de här förekommande periodiska funktionernas natur.

Det bästa sättet att börja en dylik undersökning är utan tvifvel att enligt LOTHAR MEYER's föredöme konstruera de gifna funktionerna med atomvigten såsom abskissa och egentliga vigten eller smältpunkten såsom ordinata. Det torde emellertid kunna anses såsom i hög grad fördelaktigt, om icke rent af nödvändigt, att utföra sjelfva teckningen på annat sätt än det af LOTHAR MEYER använda. Såsom figurerna visa, har jag också försökt att sammanbinda de enskilda punkterna genom *en kontinuerligt fortlöpande kurva* i stället för med räta linier. Faran att dervid gå alltför godtyckligt till väga är i allmänhet icke stor, alldenstund punkterna ligga hvarandra ganska nära. Om de fysiska egenskaperna verkligen äro funktioner af atomvigten, är detta konstruktionssätt uppenbarligen det enda rimliga och det enda, som kan gifva någon föreställning om dessa funktioners natur.

Kurvornas former. — Vi vilja först taga *smältpunkternas kurva* i betraktande. Dess form kan med tillfredsställande noggrannhet angifvas för alla lägre värden hos ordinatan (upp till 1500° abs. temp. ungefär). Den eger inom det kända området 8 maxima (betecknade I—VI, IX, X) och 7 minima (I'—VI', IX'). *Maxima af jemu ordning äro mindre än de af udda. Då man fortgår i den positiva x-axelns riktning, minskas de förras värden, på samma gång som differenserna mellan dem och närgränsande minima aftaga.*

Man har nämligen, såsom af Fig. 1 synes, följande talvärden (x och T äro maximipunkternas koordinater, T_0 smältpunkten för närmaste element och T_1 medium af närgränsande minima):

Ordningsnummer:	x	T	T_0	T_1	$T - T_1$
II	28	1585°	1585°	100°	1485°
IV	75	973°	973°	200°	773°
VI	122	840°	726°	300°	540°
X	205	625°	599°	225°	400°

Hvad de stora maxima (med udda ordningsnummer) angår, ligga de alltför högt att vara noggrant kända, och icke ens

om deras inbördes storlek lär någonting med säkerhet kunna sägas. Visst är emellertid, att de så anseeligt öfverträffa de af jemn ordning, att icke ens det största bland dessa (*II*) kan med dem jemföras.

Minima förändras äfven regelbundet. För de tre första minima af udda ordning äro nämligen koordinaterna och deras differenser:

Ordningsnummer:	<i>I'</i>	<i>Diff.</i>	<i>III'</i>	<i>Diff.</i>	<i>V'</i>
<i>x</i> -----	20,5	47,5	68	47	115.
<i>T</i> -----	40°	190°	230°	160°	390°

och för de motsvarande af jemt ordningsnummer:

Ordningsnummer:	<i>II'</i>	<i>Diff.</i>	<i>IV'</i>	<i>Diff.</i>	<i>VI'</i>
<i>x</i> -----	36,5	46	82,5	47	129,5
<i>T</i> -----	120°	20°	140°	20°	160°

Differenserna bibehålla sig såhunda inom hvardera gruppen för sig märkligt konstanta.

Häraf framgår alltså fullt tydligt, att, om man utan att känna smältpunkterna för de mellan $x = 20,5$ och $x = 36,5$ belägna ämnena ville söka approximativt konstruera kurvan i denna trakt i analogi med dess förlopp inom områdena 68—82,5 och 115—129,5, skulle man erhålla värden, som mycket obetydligt skiljde sig från de på experimentel väg bestämda. Man torde alltså hafva full rätt till den slutsatsen, att *den del af smältpunkternas kurva, som är belägen mellan minima I och II' och omfattar de till raden 3 i det periodiska systemet hörande ämnena, motsvarar fullständigt de mellan minima III' och IV' samt V' och VI' liggande delarne, hvilka bildas af ämnen från raderna 5 och 7.*

Afståndet mellan motsvarande punkter i de olika perioderna har ofvan visat sig vara 46—47, då vi fästa oss endast vid de tre första perioderna. Taga vi deremot den sista kända perioden med i räkningen, minskas denna differens, ty man har då

$$200,5 - 20,5 = 180 = 4.45$$

$$205 - 28 = 177 = 4.44,25.$$

Vi kunna då antaga 45 såsom ett approximativt värde på afstånden mellan två motsvarande punkter, d. v. s. enligt vanligt beteckningssätt såsom *periodens längd*.

Då smältpunkterna för Sc, Ti och V aldrig blifvit bestämda, kan kurvans form i närheten af $x = 45$ icke med säkerhet angifvas. Så mycket lär väl dock kunna anses såsom högst sannolikt, att Sc icke har sin smältpunkt öfver 1500° och Ti icke under 2000° C. abs. temp. Antages detta, kan kurvans form icke mycket afvika från den i figuren angifna. I alla händelser måste man vid öfvergången från Ca till Cr ungefär på en höjd af 1500° passera linien $x = 45$, och i närheten häraf måste äfven en ny period anses börja; ty den föregående delen af kurvan omfattar en hel period, nämligen två vågberg, hvaraf det första större än det andra, och två vågdelar. Omkring 90 börjar en tredje likadan period, hvilken slutar vid 136, och omkring 182 börjar den femte stora perioden.

En skenbar oregelbundenhet inträffar för $x = 31$, i det fosforms smältpunkt ligger lägre än svaflets ¹⁾. Detta är dock icke något ensamt stående faktum, ty såväl egentliga vigterna som utvidgningskoefficienterna visa fullkomlig motsvarighet, och derjemte eger uppenbarligen alldeles samma förhållande rum mellan N och O — ett minimum ungefär vid N — äfven om icke qväfvets smältpunkt, på samma sätt som dess kokpunkt vid 1 atm. tryck ²⁾, ligger lägre än syrets. Ty om icke någon sänkning hos kurvan der finnes, måste man omedelbart efter C vänta ett ämne, hvars smältpunkt låge åtminstone vid 1500° .

Efter dessa anmärkningar och slutsatser öfvergår jag till *de egentliga vigternas kurva* eller *s-kurvan*, såsom jag i det följande vill beteckna den, likasom *smältpunkternas kurva* för korthetens skull kallas *T-kurvan*.

De första båda såväl maxima som minima inträffa, efter hvad Fig. 2 utvisar, för nästan fullkomligt samma x -värden som i *T-kurvan*, men de båda maxima ega här samma höjd och kurvans form bekräftar skenbart det vanliga antagandet, att man har att göra med två korta perioder af längden 16. Gå vi längre fram med växande x , finna vi att de förut med III, V, IX betecknade minima såväl som derpå följande maxima IV, VI, X saknas. Kurvan faller utan afbrott från 62 till 84, från 103 till 132 och från 192 till 207. Att de emellertid icke spårlost försvunnit, synes genast, om man betraktar *krökningen*;

¹⁾ Det har icke varit mig möjligt att finna, hvarifrån CARNELLEY hemtat sin uppgift, att röd fosfor smälter vid 528° C. abs. temp., väl deremot HITTORFS undersökningar, som visa, att den omkring nämnda temperatur börjar märkbart afdunsta.

²⁾ WRÓBLEWSKY, C. R. 98, pag. 982.

de båda kurvorna visa då fullständig motsvarighet. De äro nämligen i förhållande till x -axeln *samtidigt konvexa och samtidigt konkava*; inflexionspunkterna infalla i närheten af följande x -värden:

s 64, 72, 79, 93, 108, 119, 127, 139, 183, 198, 204.

T 64, 72, 79, 89, 107, 119, 126, 137, 182, 196, 203.

I de med kursiv stil utmärkta punkterna öfvergår krökningen från konvex till konkav. Anmärkningsvärdt är, att de inflexionspunkter, som icke sammanfalla, alltid i T -kurvan äro förskjutna åt negativa hållet. Särskildt synes detta vara fallet med de stora maxima, så vidt man af det tillgängliga materialet kan döma. De genom nyssnämnda förändringar i krökning åstadkomna bugterna i de fallande delarne af s -kurvan, visa sig svagast i sista perioden, och deras inflytande ökas desto mera, ju mindre x blir. Man har således att vänta, att de här likasom i T -kurvan skola uppträda tydligast i första perioden, och detta bekräftas fullständigt; det är endast här de bilda verkliga maxima och minima.

En annan väsentlig olikhet bidrager äfven att åt båda kurvorna ge ett skiljaktigt utseende. *För växande x höjer sig nämligen hela s -kurvan, under det samtidigt vågornas höjd ökas ungefär proportionellt mot x , då deremot T -kurvan synes i det närmaste bibehålla samma höjd öfver x -axeln.* Denna s -kurvas form häntyder på, att funktionen $\frac{s}{x}$ sannolikt är enklare att behandla, hvilket blir ännu sannolikare, då man ihågkommer, att den för gaser under i öfrigt oförändrade förhållanden är en konstant. Jag har derföre beräknat värdena på $100 \frac{s}{x} = y$ och konstruerat den motsvarande kurvan, som jag vill kalla y -kurvan. Dess form återgifves af den punkterade linien i Fig. 3. Såsom af dess härledning framgår, angifva värdena på y det *relativa antalet atomer på volumenheten*; de äro *atomvolumernas inversa värden*. Denna y -kurva har utan tvifvel en enklare form än någon annan bland dem som återgifva periodiska egenskaper. Först och främst är det här lika tydligt som i T -kurvan, att det finnes en stor period upp till 46, hvilken fullständigt motsvarar de följande. Vidare ser man, att såväl de större som de mindre bugterna aftaga i storlek för växande x och tyckas tendera mot någon finit gräns. Men det viktigaste är dock den symmetri, som de stora perioderna här visa. Från 46 till 139 bildar kurvan två vågberg och två

vågddalar, hvilka alla ega samma form men aftaga i storlek och motsvaras af ett vågberg af samma form mellan 182 och 207.

Man kan knappast hysa något tvifvel om denna kurvas art. *Det är högst sannolikt en summa af två sinusoider, af hvilka den enes våglängd är hälften så stor som den andres.* Det är den kortare vågen, som kommer kurvan att stiga brant upp, derigenom att i den stora vågens förste fjerdedel badas vågberg, likasom i den siste badas vågddalar samverka. I den andre och tredje fjerdedelen ger den deremot upphof till den nyss omtalade vexlingen i kurvatur inom de senare stora perioderna men inom den första till en verklig vågdal och ett vågberg. För att öfvertyga sig härom behöfver man blott konstruera en summa af två sinusoider med våglängderna 46 och 23, och der förhållandet mellan amplituderna får vexla från 2:1 till 2:3. Det är emellertid icke nog härmed, ty den första delen af kurvan visar tydligt, att den måste innehålla vågor af ännu kortare längd. Den första halfva våglängden från $x = 0$ till $x = 23$ innehåller tre mindre vågberg åtföljda af vågddalar, och i det följande upp till 40 återkomma samma former med all säkerhet men med allt mera minskad amplitud. Det bör derföre icke väcka förvåning, om man ej omedelbart kan igenkänna denna period, hvars våglängd är $\frac{1}{6}$ af grundtonens, i det följande, der de glest belägna punkterna göra en noggrann bestämning af kurvans form omöjlig. Att den finnes äfven der, blir uppenbart, så snart de större vågorna blifvit borttagna. Ännu en period med en våglängd $= \frac{1}{3}$ af grundtonens synes man med säkerhet kunna sluta sig till. Det är denna, som, börjande med en vågdal, sänker kurvans första del från $x = 0$ till $x = 8$ för att sedan höja den från 8 till 15 och åter sänka den från 15 till 23; den gör alla de stora vågbergen och vågddalarne till formen mera spetsiga än eljest, men dess inflytande minskas hastigt, när x växer.

Jag har hittills i enlighet med gängse bruk betecknat de här förekommande funktionerna sasom *periodiska*, och en sådan definition på periodisk funktion, att den för detta fall vore passande, torde väl kunna gifvas. Vanligt är det i alla händelser icke att rätt och slätt kalla sådana funktioner som dessa periodiska. Den sist beskrifna funktionen, hvilken representeras af y -kurvan, är uppenbarligen *en summa af en icke-periodisk funktion och en sinusserie*, hvars senare termer hafva perioder,

som äro submultipler af den förstes, och der amplituderna äro funktioner af x och termernas ordningsnummer, eller kortare uttryckt:

den är summan af en icke-periodisk funktion och en Fouriers serie med föränderliga amplituder.

Det samma gäller naturligtvis lika väl om s -kurvan, eftersom y -kurvan blifvit härledd af denna genom division med x , men deremot icke om T -kurvan, som måste antagas vara en funktion af en summa sådan som den nämnda. Det samma är fallet med LOTHAR MEYER'S kurva för atomvolumerna; den har till ordinata inversa värdet af y -kurvans ordinata och är synbart af mycket mera komplicerad form än denna. Derom vittna bland annat dess höga spetsiga vägberg och breda grunda vågdalar, hvilkas form, synnerligen då kurvans punkter sammanbundits med räta linier, väl kunnat ge anledning till det ofvan anförda uttrycket »an einander gereichte Kettenlinien».

Innan jag sammanfattar resultaten af föregående undersökning, vill jag blott tillägga ett par allmänna anmärkningar. Fastän man alltid bestämt, att atomvigten skulle väljas till oberoende variabel, har det dock hittills varit vanligt att, äfven då frågan gällt grundämnenas rent fysiska egenskaper, strängt fasthålla den efter mättningskapaciteten gjorda grupperingen och endast jämföra de till samma grupp eller samma rad hörande ämnena. Men härtill finnes icke något skäl, lika litet som något blifvit anfördt. Kurvorna visa klart och tydligt, att *det är blott atomvigten och intet annat, som bestämmer såväl egentlig vikt och smältpunkt som utvidgningskoefficient och refraktionsequivale nt hos grundämnena* — kort sagdt: *alla deras kända fysiska egenskaper*. Och hvarför skulle det icke vara så? Det är endast när olika grundämnen komma tillsammans, som mättningskapaciteten kan ega någon betydelse, och intet stöd finnes för det antagandet, att t. ex. 1-värdigheten hos Na och 2-värdigheten hos Mg skulle kunna förorsaka någon olikhet i molekylär beskaffenhet hos dessa båda ämnen i metallisk form, alldenstund i hvarje fall inom en enkel kropp alla atomerna äro lika. Erkännes detta, har man igen anledning att fordra den närmaste öfverensstämmelsen i fysiska egenskaper mellan de ämnen, som tillhöra samma grupp. Det är endast värdet på x , som är bestämmande. Erfarenheten bekräftar också denna uppfattning. I kurvan för smältpunkterna inträffa t. ex. maxima af jernn ordning närmast ämnen af följande grupper:

maximum	II	IV	VI	X
ämne	Si	As	Sb—Te	Tl—Pb
grupp	IV	V	V—VI	III—IV

på samma sätt minima af udda ordning

minimum	I	III	V	IX
ämne	Fl—Na	Zn—Ga	In—Sn	Hg
grupp	VII—I	II—III	III—IV	II.

Att anföra flere exempel torde ej behöfvas; från den vanliga synpunkten måste de te sig såsom undantag från den periodiska lagen. En annan följd af denna öfverskattning af mättningskapacitetens betydelse för de fysiska egenskaperna har varit, att de ämnen, som ej på samma sätt som flertalet låta inordna sig i sammanhängande grupper, — vätet och åttonde gruppens metaller — blifvit temligen styfmoderligt behandlade. Det är emellertid klart, att hvarje rationellt försök att behandla de fysiska egenskaperna såsom funktioner af atomvigten måste taga lika hänsyn till alla grundämnena.

Resultatet af det föregående torde kunna sammanfattas i följande allmänna satser:

- I. *De kemiska grundämnenas fysiska egenskaper äro funktioner af atomvigten.*
- II. *Dessa funktioner äro summor af en icke-periodisk del och en periodisk.*
- III. *Den periodiska delen är funktion af en serie enkla periodiska funktioner med variabel amplitud, hvilkas perioder äro submultipler af den förstes, d. v. s. förhålla sig som en grundton med sina harmoniska öfvertoner.*

Häraf följer, att det matematiska uttrycket för en af de fysiska egenskapernas beroende af atomvigten måste hafva formen:

$$y = \Phi \left[F(x) + \sum F_n(x) \cdot \sin \frac{2\pi nx}{p} \right], \dots \dots (1)$$

der funktionsformen Φ är olika för de särskilda egenskaperna, hvilket deremot icke med nödvändighet behöfver vara fallet med F eller amplituderna F_n , hvilka antagas vara icke-periodiska funktioner af x . Grundperiodens längd är betecknad med p , och ungefär lika med 46, och öfvertonernas ordningsnummer med n ; de hittills bekanta termerna i serien hafva ordningsnumren 1, 2, 3, 6.

Formen af de egentliga vigternas kurva och den deraf härledda y -kurvan gifver stöd åt antagandet, att $\Phi(x)$ för dem helt enkelt är x , och att eqvationen således kan skrivas:

$$y = F(x) + \Sigma F_n(x) \cdot \sin \frac{2\pi n x}{p} \dots \dots \dots (2)$$

För öfrigt ser man af eqvationen (1) att, om den inversa funktionen till Φ betecknas med q , eqvationen kan skrivas:

$$q(y) = F(x) + \Sigma F_n(x) \cdot \sin \frac{2\pi n x}{p},$$

hvilken form, om i stället för $q(y)$ skrives y , är identisk med (2). Hvilken den ursprungliga funktionen Φ än må vara, är det således alltid möjligt att bringa eqvationen till formen (2).

De nyss uppställda satserna ega hittills till stöd nästan endast den skenbara regelmässigheten hos de använda kurvorna. För att, så vidt möjligt är, fastare grunda dem har jag försökt att finna ett approximativt matematiskt uttryck för de egentliga vigternas kurva af samma form som ofvan blifvit uppställd.

Jag har dervid utgått från den förut omtalade y -kurvan, såsom den synbart enklaste af alla för mig bekanta funktioner af hithörande art, och antagit, att den kan framställas under formen (2) eller

$$y = F(x) + \Sigma F_n(x) \cdot \sin \frac{2\pi n x}{p}.$$

Värdena på y äro här $100 \cdot \frac{s}{x}$ och finnas jemte de använda värdena på x och s i tabellen vid slutet af afdelning A.

Temperatures inverkan. — En olägenhet, som ej låter undanrödja sig, är nödvändigheten att begagna de värden på s , som svara emot 0° eller mot den vanliga lufttemperaturen, alldenstund någon reduktion till absoluta nollpunkten, hvilket måste betraktas såsom det enda rationela sättet att här gå till väga, endast för få ämnen med någorlunda trygghet skulle kunna utföras. Denna olägenhet försvinner emellertid till största delen vid jämförelsen med en annan ännu större — bestämningarnes allmänna osäkerhet. Man finner nämligen för medellängd-utvidgningskoefficienter från 0,00001 till 0,0001 — och högre torde väl icke någon medelutvidgningskoefficient ligga — vid reduktion från 0° till -273° en tillökning i egentlig vikt af 0,8 till 8,2 %, men för de allra flesta ämnen icke öfver 2,4 %.

Då nu dessutom de stora utvidgningskoefficienterna tillhöra ämnen med ringa egentlig vikt, kommer temperaturens inflytande på kurvans form icke att blifva af väsentlig betydelse. I hvad riktning det yttrar sig, kan man emellertid lätt finna af ett par exempel. Beräknar man nämligen egentliga viktarna hos de inom området 23 till 40 belägna ämnena för en temperatur af -100° under antagande, att de för temperaturer öfver 0° bestämda utvidgningskoefficienterna gälla äfven mellan 0° och -100° , finner man, om β betyder längdutvidgningskoefficienten:

	Na	Mg	Al	Si	P	S	K
$\beta \cdot 10^6$ -----	71	27	23	7,8	68	67	84
s_{-100} -----	0,999	1,754	2,598	2,496	1,868	2,112	0,898
s_0 -----	0,978	1,74	2,58	2,49	1,83	2,07	0,875
$1000(s_{-100} - s_0)$	21	14	18	6	38	42	23.

Tillökningen är här således vid aftagande temperatur störst hos de ämnen, som hafva de minsta egentliga viktarna, och samma lag finner man äfven eljest bekräftad, så långt erfarenheten räcker. Vi kunna därför uppställa följande sats:

Vid stigande temperatur sänker sig de egentliga viktarnas kurva i sin helhet, men vågduarne mera än vågbergen. Den icke-periodiska funktionens värde minskas alltså, under det vågornas amplitud ökas.

Då vi på grund af bristande kännedom om utvidgningens storlek icke kunna reducera till lägre temperaturer, nödgas man emellertid begå den inkonsequensen att för somliga ämnen använda värden på egentliga vikt i fast form, hvilka icke hänföra sig till 0° , därför att dessa ämnen vid 0° icke kunna ega fast form.

Beräkningens gång. I den antagna eqvationen (2) skall man bestämma:

- 1:o periodens längd, p ,
- 2:o de värden på n , som verkligen förekomma,
- 3:o formen af funktionen F och af alla funktionerna F_n ,
- 4:o de konstanter, som ingå i dessa funktioner.

Någon brist på obekanta, såväl funktioner som konstanter, eger således icke rum.

Periodens längd, p , har vid räkningen antagits konstant. Vore detta strängt riktigt, borde man kunna bestämma den med ganska stor noggrannhet, alldenstund dess värde då borde

vara det samma i alla de periodiska funktionerna. Man kunde således begagna sig icke blott af kurvan y utan äfven af smält-punkternas kurva etc. och af periodiciteten hos de kemiska egenskaperna. Det visar sig emellertid vid ett sådant försök, att något tal, som öfverallt passar in, icke finnes. De på olika sätt funna värdena vexla emellan $p = 44$ och $p = 47$ och antyda, icke blott att grundperiodens längd är olika inom de olika funktionerna, utan äfven att dess värde inom en och samma funktion ändras från den ena perioden till den andra. Härvid möter man den olägenheten, att trakten omkring noderna hör till de minst kända, enär den upptages af ämnena Sc, Ti, V, Zr, Nb, Mo, La, Ce, Ta, Th, hvilka måste betecknas såsom de såväl till atomvigt som fysiska egenskaper ofullständigast kända bland alla. Mätningar på de olika kurvorna kunna således endast gifva högst osäkra resultat. Det samma är fallet med de tal, som erhållas genom att taga atomvigts-differenser för ämnen hörande till samma grupp, alldenstund dessa, såsom undersökningen visar, växa ganska betydligt på samma gång som atomvigtarna.

Jag har derföre icke egt något annat medel att bestämma periodens längd än successiva försök med olika värden, och resultaten häraf hafva ledt mig till den bestämda öfvertygelsen, att *periodens längd hos y -funktionen långsamt aftager för växande x* . Då jag med detta försök endast åsyftat att påvisa tillvaron af kortare perioder och ett regelbundet förlopp af kurvan, men icke att söka ernå största möjliga öfverensstämmelse mellan räkning och observationer, har jag emellertid, för att icke onödigtvis förlänga de redan förut ganska dryga räkningarne, antagit p konstant och stannat vid värdet $p = 46,6$, hvarigenom de för alla ingående termer gemensamma noderna komma att infalla vid x -värdena 23,3, 46,6, 69,9, 93,2, 116,5, 139,8, 163,1, 186,4, 209,7, 233,0.

Att detta värde på p är för stort, då man kommer till den sista perioden, visar sig af figuren, der den beräknade kurvan synes förskjuten åt höger. Ville man minska p , skulle ater motsatsen inträffa såväl vid 139,8 som 93,2, likasom det nu inträffar vid 46,6.

De enda värden på n , som med säkerhet kunnat påvisas, äro redan i det föregående anförda, nämligen 1, 2, 3, 6, och de motsvarande våglängderna blifva alltså 46,6, 23,3, 15,533 och 7,767 resp. Af dessa börja 1, 2 och 6 med vägberg, 3 deremot

med vågdal. Att icke några spår af perioderna 4 och 5 visa sig, kan jag icke förklara; möjligen äro deras amplituder allt för små. Den följande perioden 6 torde deremot lättare kunna bildas, derigenom att af dess på en hel period förekommande 12 noder de 8 redan genom andra och tredje perioderna äro gifna.

Den del af undersökningen, som erbjuder största svårighet, är naturligtvis *bestämningen af de ingående funktionernas former*, och sannolikheten att utan hjälp af någon teori ernå synnerligen stor approximation måste anses ganska ringa.

Vid närmare betraktande ser man emellertid, att *alla periodernas amplituder minskas vid växande x och synas närma sig en finit gräns*, och man styrkes härigenom i det a priori sannolika antagandet, att alla funktionerna F_n ega samma form. Efter att successive hafva pröfvat åtskilliga funktioner af olika slag har jag stannat vid formen:

$$F_n = a + e^{b-cx},$$

der a , b , c måste anses såsom funktioner af n och ega olika värden för hvarje period. Någon rimlig form för den icke-periodiska funktionen F , som bildar kurvans axel, var deremot icke möjligt att erhålla utan att först borttaga de periodiska funktionerna, alldenstund man icke på förhand kan se dess förlopp för lägre värden på x . Att den har en asymptot parallel med x -axeln likasom F_n -funktionerna, synes emellertid genast.

Jag har derföre såväl för bestämmande af funktionen F som konstanterna a , b , c nödgats begagna en till hälften grafisk metod. Efter att först hafva konstruerat en serie kurvor utgörande summor af två sinusoider med perioderna 2 och 1 men med olika förhållanden mellan amplituderna, har jag genom jämförelse mellan den gifna y -kurvans olika delar och dessa kurvor först sökt uppmäta värdena på grundtonens amplitud i dess vågberg och vågdalar. Med de så funna talen har jag beräknat de sannolikaste värdena på a_1 , b_1 , c_1 till funktionen F_1 och derefter värdet af termen

$$(a_1 + e^{b_1 - c_1 x}) \cdot \sin \frac{2\pi x}{p}$$

för alla grundämnena.

Genom att sedan subtrahera denna term från alla de gifna värdena på y har en ny funktion y_1 erhållits, hvilken blott bestått af funktionen F och perioderna 2, 3, 6.

Denna funktion y_1 har derefter konstruerats på vanligt sätt, och regelbundenheten i dess gång har fått tjena sasom kriterium på noggrannheten hos den föregående räkningen. Det har härigenom i de flesta fall varit möjligt att, innan räkningen fortsattes, korrigera såväl periodens värde som formen af funktionen F_1 och konstanterna a_1 , b_1 , c_1 . Efter att hafva erhållit en kurva af tillfredsställande form, hvilken naturligtvis mellan $x = 0$ och $x = 140$ egt 6 vågberg och lika många vågdalar samt mellan 184 och 207 en hel period, alla af snarlik form men aftagande amplitud, har samma förfaringssätt tillämpats och efter beräkning och subtraktion af den andra termen i sinusserien en ny kurva konstruerats, hvilken endast innehållit F , F_3 och högre perioder. Perioden 6 framträder då med stor tydlighet i hela kurvan ända till slutet af den tredje stora perioden, d. v. s. till 140 ungefär, fastän föränderligheten af den stora periodens längd synes hafva till följd, att den korta perioden 6 på flere ställen i den beräknade kurvan synes förskjuten åt positiva eller negativa hållet, hvilket lätt kan inträffa, alldenstund afståndet mellan dess noder och maxima blott utgör 1,942.

Sedan slutligen såväl sjette som tredje perioderna äfven borttagits, visade det sig, såsom man kunde vänta, att den återstående funktionen, hvilken till sin väsentligaste del måste utgöras af F , visade oregelbundna höjningar och sänkningar. Genom successiva nyberäkningar af de särskilda sinustermerna har det dock varit möjligt att minska de fleste afvikelserna, och utan tvifvel skulle det kunna lyckas att genom ytterligare korrektioner ännu mera närma de beräknade värdena till de gifna.

Den kurva, omkring hvilken punkterna slutligen ordnade sig, då de periodiska termerna blifvit så fullständigt som möjligt borttagna, visade sig tangera x -axeln i origo, derefter långsamt höja sig till ett maximum ungefär $= 9$ vid början af den andra stora perioden, för att sedan långsamt sänka sig mot en med x -axeln parallel asymptot, hvars höjd öfver denna måste vara omkring 5. Denna oväntadt enkla form gjorde det lätt att finna en algebraisk kurva, som dermed ganska nära öfverensstämmer.

Jag har nämligen för funktionen F kunnat använda en s. k. *serpentin*, med punkten $x = 23,3$, $y = 4,6$ till centrum. Första termen i serien har derigenom blifvit:

$$F = \frac{4,6 \cdot x^2}{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2} = \frac{9,2x^2}{2x^2 - 2px + p^2}.$$

der p som vanligt betyder 46,6.

Den för y beräknade eqvationen erhåller härigenom, då koefficienternas talvärden införas, följande form:

$$\begin{aligned} y = & \frac{4,6x^2}{x^2 - 46,6x + 1085,78} + \\ & + (3,59 + e^{2,82229 - 0,09734x}) \sin \frac{2\pi x}{46,6} + \\ & + (1,65 + e^{1,33643 - 0,02975x}) \sin \frac{4\pi x}{46,6} - \\ & - (0,20 + e^{3,06908 - 0,09802x}) \sin \frac{6\pi x}{46,6} + \\ & + (0,50 + e^{2,08995 - 0,05158x}) \sin \frac{12\pi x}{46,6} \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

Eqvationen innehåller således 14 oberoende konstanter (ty 1085,78 är $= \frac{1}{2} p^2$). Af dessa äro de 12 i sinustermerna ingående förut med a , b , c betecknade utan tvifvel funktioner af n , p och en eller ett par andra konstanter samt af temperaturen, och vore de beräknade med största möjliga noggrannhet, skulle det förmodligen icke möta stora svårigheter att reducera dem till ett mindre antal. Det är nämligen klart att, hvilken funktionsform man än valt att approximativt återgifva de föränderliga amplitudernas värden, måste de funna koefficienterna alltid bli funktioner af de konstanter, som ingå i de verkliga uttrycken för amplituderna, och om dessa senare konstanter regelbundet förändras från term till term, måste detta gälla äfven för de förra. På anförda grunder vill jag emellertid uppskjuta denna undersökning till längre fram, då det i alla händelser är min afsigt att företaga en ny beräkning efter annan plan för att uppnå så stor noggrannhet som möjligt och söka utröna om flere perioder kunna påvisas.

De ur eqvationen (3) beräknade y -värdena finnas upptagna i följande tabell jemte de direkt härledda värdena på $100 \frac{s}{x}$. Tabellen innehåller derjemte de vid räkning och konstruktion använda värdena på x , s och T .

	Kemiskt tecken.	x	s	T	y	$100 \cdot \frac{s}{x}$	$y - 100 \cdot \frac{s}{x}$
I ₁	H	1	0,033	< 73°	2,11	3,30	— 1,19
I ₂	Li	7,01	0,59	453°	7,74	8,42	— 0,68
II ₂	Be	9,08	2,07	< 1293°	22,76	22,80	— 0,04
III ₂	B	10,9	2,5	(2773°)	21,19	22,94	— 1,75
IV ₂	C _a	11,97	3,52	> 3000°	14,99	29,41	— 14,42
»	C _b	»	2,30	»	»	19,22	— 4,23
»	C _c	»	1,885	»	»	15,75	— 0,76
V ₂	N	14,01	0,44	< 73°	5,53	3,14	+ 2,39
VI ₂	O	15,96	0,89	< 73°	4,83	5,58	— 0,75
VII ₂	F	19,06	—	—	0,41	—	—
I ₃	Na	22,995	0,978	368°,6	3,39	4,25	— 0,86
II ₃	Mg	23,94	1,74	(1023°)	6,99	7,27	— 0,28
III ₃	Al	27,04	2,58	(1123°)	8,56	9,54	— 0,98
IV ₃	Si _a	28,0	2,39	(1585°)	6,76	8,89	— 2,13
»	Si _b	»	2,00	»	»	7,14	— 0,38
V ₃	P _a	30,96	2,34	—	6,17	7,56	— 1,39
»	P _b	»	2,20	—	»	7,11	— 0,94
»	P _c	»	1,83	317°,3	»	5,91	+ 0,26
VI ₃	S _a	31,98	2,07	388°	6,82	6,47	+ 0,35
»	S _b	»	1,96	»	»	6,13	+ 0,69
»	S _c	»	1,92	»	»	6,00	+ 0,82
VII ₃	Cl	35,37	1,33	(173°)	2,44	3,76	— 1,32
I ₄	K	39,03	0,875	335°,5	3,25	2,24	+ 1,01
II ₄	Ca	39,91	1,584	(973°)	4,67	3,97	+ 0,70
III ₄	Sc	43,97	—	—	5,37	—	—
IV ₄	Ti	48,0	—	—	11,70	—	—
V ₄	V	51,1	5,5	—	12,70	10,76	+ 1,94
VI ₄	Cr	52,45	6,5	> 2273°	12,92	12,39	+ 0,53
VII ₄	Mn	54,8	8,0	(2173°)	14,58	14,27	+ 0,31
VIII ₄ {	Fe	55,88	7,86	(2073°)	14,90	14,07	+ 0,83
	Co	58,6	8,6	(2073°)	12,28	14,68	— 2,40
	Ni	58,6	8,9	(1823°)	12,28	15,19	— 2,91
I ₅	Cu	63,18	8,92	(1473°)	9,81	14,12	— 4,31
II ₅	Zn	64,88	7,15	688°	9,05	11,02	— 1,97
III ₅	Ga	69,9	5,95	303°	8,28	8,51	— 0,23
V ₅	As _a	74,9	5,73	(973°)	7,47	7,65	— 0,18
»	As _b	»	4,71	»	»	6,29	+ 1,18

	Kemiskt tecken.	x	s	T	y	$100 \cdot \frac{s}{x}$	$y - 100 \cdot \frac{s}{x}$
VI ₅	Se _a	78,87	4,8	490°	6,27	6,09	+ 0,18
»	Se _b	»	4,2	»	»	5,33	+ 0,94
VII ₅	Br	79,76	3,187	265°,7	5,75	4,00	+ 1,75
I ₆	Rb	85,2	1,52	311°,5	2,71	1,78	+ 0,93
II ₆	Sr	87,3	2,54	(973°)	3,79	2,91	+ 0,88
III ₆	Y	89,6	3,77	—	4,28	4,21	+ 0,07
IV ₆	Zr	90,4	4,15	> 1585°	4,55	4,59	— 0,04
V ₆	Nb	93,7	7,37	—	8,02	7,87	+ 0,15
VI ₆	Mo	95,9	8,64	—	10,08	9,01	+ 1,07
VIII ₆	Ru	103,5	12,26	(2473°)	11,90	11,85	+ 0,05
	Rh	104,1	12,1	> (2273°)	11,49	11,62	— 0,13
	Pd	106,2	11,4	(2223°)	9,58	10,73	— 1,15
I ₇	Ag	107,66	10,53	(1293°)	8,74	9,78	— 1,04
II ₇	Cd	111,7	8,65	591°	7,49	8,03	— 0,54
III ₇	In	113,4	7,42	449°	6,47	6,54	— 0,07
IV ₇	Sn	117,35	7,29	501°	7,14	6,21	+ 0,93
V ₇	Sb	119,6	6,71	703°	7,05	5,61	+ 1,44
VI ₇	Te _a	125,0	6,4	726°	4,86	5,07	— 0,21
»	Te _b	»	5,93	»	»	4,70	+ 0,16
VII ₇	J	126,54	4,948	387°	4,13	3,91	+ 0,22
I ₈	Cs	132,7	1,88	299°,5	2,21	1,42	+ 0,79
II ₈	Ba	136,86	3,75	> 1523°	3,63	2,74	+ 0,89
III ₈	La	138,5	6,16	(973°)	4,83	4,45	+ 0,38
V ₁₀	Ta	182,0	10,4	—	2,78	5,71	— 2,93
VI ₁₀	W	183,6	19,1	> 2173°	3,23	10,40	— 7,17
VIII ₁₀	Os	195,0	22,48	—	10,65	11,53	— 0,88
	Ir	192,5	22,42	(2473°)	9,51	11,65	— 2,14
	Pt	194,3	21,50	(2273°)	10,44	11,07	— 0,63
I ₁₁	Au	196,2	19,32	(1523°)	10,74	9,85	+ 0,89
II ₁₁	Hg _a	199,8	14,19	234°,5	8,19	7,10	+ 1,09
»	Hg _b	»	13,596	»	»	6,80	+ 1,39
III ₁₁	Tl	203,7	11,85	562°	7,07	5,82	+ 1,25
IV ₁₁	Pb	206,39	11,38	599°	5,60	5,51	+ 0,09
V ₁₁	Bi	207,5	9,82	541°	5,88	4,73	+ 1,15
IV ₁₂	Th	231,96	11,00	—	4,37	4,74	— 0,37
VI ₁₂	U	239,8	18,7	(1773°)	9,59	7,80	+ 1,79

Betydelsen af beteckningarna C_a , C_b , etc. för de i allotropiska modifikationer förekommande grundämnena och Hg är följande: C_a diamant, C_b grafit, C_c gaskol; Si_a krist., Si_b grafitartad Si; P_a metallisk, P_b röd, P_c vanlig fosfor; S_a rombiskt, S_b monokl., S_c amorf S; As_a krist., As_b amorf As; Se_a krist., Se_b amorf Se; Te_a krist., Te_b amorf Te; Hg_a i fast form vid -39° , Hg_b i flytande form vid 0° . Första kolumnen utmärker ämnets plats i systemet, så att t. ex. IV_6 betyder det fyraåriga ämnet i raden 6 o. s. v.

Eqvation (3) är äfven representerad genom den sammanhängande kurvan i fig. 3, under det värdena på $100 \frac{s}{x}$ äro för-
enade genom en punkterad linie. Säsom af tabellen synes, ligga differensernas numeriska värden för 37 ämnen mellan 0 och 1, för 15 ämnen mellan 1 och 2 och blott för 7 ämnen öfverstiga de 2, allt under förutsättning att man för de i flere allotropiska modifikationer förekommande ämnena väljer den amorfa formen. Af de 7 mest afvikande ämnena torde N och W med temligen stor sannolikhet kunna anses såsom felaktigt bestämda, N till egentlig vikt och W förmodligen i båda afseenden. Betraktar man figuren, ser man derjemte bada kurvorna, äfven der differenserna äro störst, hafva nära öfverensstämmande former. De stora afvikelserna från $x = 50$ till $x = 70$ och efter 180 synas hufvudsakligen bero på den stora periodens minskning och äro ej af den beskaffenhet, att periodicitetens natur derigenom kan dragas i tvifvelsmål. Möjligt är naturligtvis, att $\frac{s}{x}$ är en funktion af en sinusserie i stället för en enkel sådan, och att afvikelserna till en del derigenom kunnat föranledas. Den uppnådda noggrannheten är tydligen icke tillräcklig att möjliggöra någon korrektion af de observerade atomviktarna eller egentliga viktarna, men så mycket torde dock med full rätt kunna påstas, att den fullkomligt bekräftar de förut uppställda satserna och gifver dem ett ytterligare stöd. Alla speciella slutsatser och anmärkningar vill jag gömma, tills jag kunnat utföra räkningen med större noggrannhet.

B. Periodicitetens närmaste orsak.

Lika litet som frågan om periodicitetens natur synes frågan om dess orsaker hittills hafva blifvit föremål för behandling. I ändamål att komma ett steg närmare dess lösning vilja vi ytterligare undersöka den egenskap hos grundämnena, hvarmed vi förut sysselsatt oss, nämligen deras egentliga vigten i fast form.

Låt alltså s likasom förut betyda egentliga vigten vid 0° af en kropp, som uteslutande är bildad af ett grundämne med atomvigten x , låt q vara medelafståndet mellan två atomer och H vigten af en väteatom. Då är atomvolumen $= kq^3$, der k , huru medelafståndet än må definieras, är en för alla kroppar med samma molekylära struktur gemensam konstant, och alltså

$$s = \frac{H}{k} \cdot \frac{x}{q^3}.$$

Af de båda i högra membrum ingående variablerna är x oberoende enligt antagandet. Periodiciteten hos s kan således uppkomma endast derigenom, att medelafståndet q är en periodisk funktion af x . Den har naturligtvis samma period som s . Tänka vi oss nu, att den gifna kroppen tillhör ett visst koordinatsystem, så kunna vi uttrycka medelafståndet q i hvarje ögonblick såsom funktion af alla atomernas koordinater, och de storheter, som bestämma dessa, bestämma således äfven q . Antages vidare att kroppens temperatur bibehålles konstant, måste dess volum och således äfven q , om alla yttre krafter upphöra att verka, hvilket än systemets initialtillstånd må hafva varit, tendera till ett bestämdt gränsvärde och, när detta blifvit uppnådt, förblifva oförändrade. Koordinaterna återigen för de särskilda atomerna äro i hvarje ögonblick entydigt bestämda, då man känner deras 1) massor, 2) begynnelselägen, 3) begynnelsehastigheter och 4) de mellan dem verkande krafterna.

Massorna äro direkt gifna i den oberoende variabelns värde och således utan inflytande på periodiciteten. Atomernas initiallägen kunna icke inverka på kroppens sluttillstånd. Deras medelhastighet måste enligt de gjorda antagandena vara oföränderlig för ett och samma ämne, och då vidare mv^2 är konstant hos alla kroppar för samma temperatur, måste v minskas kontinuerligt, då m eller x växer. Orsaken till periodiciteten

hos egentliga vigten kan således endast sökas i en periodicitet hos kraften, och vi kunna med full visshet uppställa den satsen, att *två atomer af samma grundämne attrahera hvarandra med en kraft, hvars storlek är en periodisk funktion af atomvigten.*

Vi kunna emellertid gå ännu längre. Så långt vår erfarenhet kunnat nå, har man funnit, att alla kroppar attrahera hvarandra efter NEWTONS lag, och det torde icke finnas något skäl att antaga en gräns för denna lag, äfven då afstånden minskas ända ned till de här förekommande.

Men en efter denna lag verkande kraft växer uppenbarligen kontinuerligt med atomvigten utan att kunna ge anledning till någon periodicitet, och om denna ensam verkade, skulle alltså egentliga vigten äfven växa kontinuerligt. Då detta icke är fallet, följer med nödvändighet, att *antagandet, att krafter verka enligt NEWTONS lag mellan atomerna i en kropp, är icke tillräckligt att förklara molekularattraktionen.*

Deremot synes det högst sannolikt, att krafter af denna art verka jemte andra; ty såsom vi sett, består de egentliga vigternas kurva först och främst af en kontinuerligt växande funktion, i öfverensstämmelse med hvad man i sådant fall borde vänta. Derjemte hafva vi emellertid funnit, att den består af en sinusserie, hvarigenom egentliga vigten omväxlande är större och omväxlande mindre, än den skulle vara, om den icke-periodiska funktionen ensam rådde.

Antaga vi först för enkelhets skull, att blott en af de periodiska funktionerna existerade, och vilja genom *en särskild jemte den allmänna gravitationen verkande kraft* söka förklara periodiciteten hos egentliga vigten, måste denna kraft tydligen vara $= 0$ i sinusfunktionens noder och för öfrigt vara attraherande i de punkter, der funktionen höjer sig öfver sin kontinuerligt stigande axel, och repellerande, der den sänker sig under nämde linie. Detsamma gäller oförändradt om hvarje term i sinusserien, och vi erhålla således en kraftserie med lika många termer som den förra. Resultanten af alla dessa periodiskt föränderliga krafter måste vara attraherande för alla värden på x , som tillhöra vågbergen i de egentliga vigternas kurva, och repellerande för de öfriga. Resultanten till den icke-periodiska kraften och de periodiska är deremot alltid attraherande; det är denna kraft som vanligen benämnes *kohesion*.

Man kan alltså på nu anförda grunder för de mellan atomerna verkande krafterna uppställa följande lagar:

- I. *Mellan atomer af samma grundämne verka krafter af två olika slag: icke-periodiska och periodiska funktioner af atomvigten.*
- II. *Den icke periodiska kraften synes kontinuerligt växa med atomvigten och följer, åtminstone på större afstånd, NEWTONS lag. Den är alltid attraherande.*
- III. *De periodiskt föränderliga krafterna motsvara termerna i egentliga vigternas funktion och ega samma perioder som dessa. De äro omväxlande attraherande och repellerande.*

Hittills har jag uteslutande hållit mig till de resultat, som undersökningen af de egentliga vigterna gifvit, men det är lätt att se, huru samma slutsatser äfven kunna dragas af periodiciteten hos smältpunkterna och utvidgningskoefficienterna. På samma sätt som en tillökning i attraktion, om allt annat är oförändradt, måste öka en kropps egentliga vikt, och en minskning i attraktion deremot göra kroppen lättare, är det äfven nödvändigt, att smältpunkten höjes, då den kraft, hvarmed molekulerna hållas samman, växer. Men under samma förutsättning hindras kroppens minsta delar att aflägsna sig från hvarandra. Den tillökning i energi hos molekulernas fortskridande rörelse, som en bestämd temperaturförhöjning medför, skall således icke kunna åstadkomma en så stor utvidgning, när attraktionen är stor, som när den har ett mindre värde. I full öfverensstämmelse härmed infalla äfven i smältpunkternas kurva maxima och minima på samma områden som i kurvan för egentliga vigten, under det tvärtom utvidgningskoefficienten har sina minima, der dessa kurvor ega maxima och vice versa. Deremot synes det, minst sagdt, tvifvelaktigt, huruvida sambandet mellan atomvolum, smältpunkt och utvidgningskoefficient kan uttryckas genom den af PICTET ¹⁾ uppställda formeln

$$\alpha \cdot T \cdot \sqrt[3]{V} = \text{en konstant} = 4,5,$$

när man betraktar de stora afvikelserna för flera ämnen och den i allmänhet ringa noggrannheten ²⁾; ty det är uppenbart,

¹⁾ C. R. 1879, T. 88, pag. 855.

²⁾ Bland de 25 ämnen, för hvilka beräkningen är utförd hos LOTHAR MEYER (pag. 154 ff.), ligga värdena på $\alpha \cdot T \cdot \sqrt[3]{V}$ för 11 ämnen utom de antagna gränserna 4 och 5. Afvikelserna uppgå således i nära halfva antalet fall (44%) till mer än 11% af medelvärdet 4,5 (högsta afvikelsen uppåt är 2,1 = 46,7%, nedåt 2,45 = 54,4%). Man möter värden emellan 2,05 och 6,6.

att af en rad periodiska funktioner med samma period men till storlek och tecken växlande amplituder en mängd andra periodiska funktioner kunna bildas, hvilkas amplituder, utan att vara $= 0$, likväl tillräckligt närma sig dertill, för att periodiciteten skall skenbart försvinna. I här föreliggande fall är emellertid periodiciteten hos den föregifna konstanten $\alpha T^3 V$ omisskännelig, såsom tillräckligt framgår deraf, att de tre hvarandra motsvarande ämnena As, Sb, Bi lemna värden, som åtminstone 50 % afvika från de beräknade, och alla tre äro för små.

Vi hafva emellertid funnit, att *den närmaste orsaken till en periodicitet hos de enkla ämnenas fysiska egenskaper måste vara en motsvarande periodicitet hos den mellan atomerna verkande kraften*, utan att dervid göra något antagande beträffande materiens natur, utom att den består af atomer.

Antaga vi nu, att materien derjemte utgöres af ett öfverallt utbredd medium, *etern*, och att *icke någon inverkan kan ega rum mellan två kroppar utan genom en rörelse i ett mellanliggande medium*, så måste i detta fall en atom verka på en annan genom en eterrörelse, hvars energi periodiskt förändras med atomernas vigt. Nu hafva undersökningar öfver ljusets brytning i sammansatta kroppar visat, att det nästan endast är den procentiska sammansättningen och blott i obetydlig grad den molekylära anordningen som bestämma brytningsförmågan. Det har härigenom blifvit i hög grad sannolikt att *etern*, utom möjligen i atomernas omedelbara närhet, öfverallt eger samma beskaffenhet, och vi kunna således endast förklara periodiciteten hos kraften genom en motsvarande förändring hos sjelfva atomerna med samma period. Den föregående undersökningen har emellertid lärt, att, då man fortskrider från ämne till ämne, *kraften förändras på ett sätt analogt med den förändring rörelsen hos t. ex. en vibrerande sträng undergår, då anslagsstället flyttas*, i det klangens särskilda toner der framträda med periodiskt växlande amplituder, på samma sätt som här de särskilda termerna i kraftserien, hvilka jag därför också betecknat sasom grundton och öfvertoner. I analogi härmed skulle man kunna tänka sig, att *de periodiskt föränderliga krafter, som verka mellan atomerna, uppkomma genom periodiska rörelser hos dessa, hvarigenom den omgifvande etern försättes i vibrationer. Dessa vibrationers amplituder bestämmas af atomrörelsens energi, hvilken är en periodisk funktion af atomvikten, och bestämma i sin ordning storleken af den uppkommande kraften.*

Härmed har jag emellertid blott velat framställa den ofvannämnda analogien i en mera åskådlig form. Att söka gå vidare utan att begagna sig af material från andra håll till dessa frågor närmare utredande kan endast gifva bristfälliga resultat. Det är nämligen tydligt, att, om hvarje ännas atomer ega en för dem egendomlig art af rörelse, måste genom dessa rörelser den kraft, hvarmed två atomer af olika ämnen attrahera hvarandra, d. v. s. *den kemiska affiniteten* vara fullständigt bestämd lika väl som kohesionen. Under det emellertid hos två ämnen sådana som t. ex. Cl och K såväl atomvigt som egentlig vigt temligen nära sammanfalla, och vi på grund deraf, om endast de krafter, hvarmed atomer af dessa ämnen verka på andra af samma slag, tagas i betraktande, skulle draga den slutsatsen, att rörelserna hos atomer af Cl och K vore af likartad beskaffenhet, visa deras kemiska egenskaper, att detta ingalunda kan vara fallet, utan att vi snarare måste beteckna desamma såsom af motsatt natur.

Jag hoppas, att i en följande uppsats kunna något bidraga till lösningen af detta mera invecklade problem.

C. Atomvigternas differenser.

Upptäckten af det periodiska systemet har gjort det omöjligt att betrakta de kemiska grundämnena såsom enkla och af hvarandra oberoende, och det har derigenom blifvit en fråga af stort intresse att söka förklara sammanhanget dem emellan.

Utgå vi då från vetenskapens allmänna fordran, att materien måste bestå af själfständiga, för de särskilda grundämnena olika atomer och af ett hela rummet mellan dem uppfyllande medium, etern, torde bland de uppställda hypoteserna endast den kunna anses tillfredsställande, som antager, att *de kemiska grundämnenas atomer så väl som etern bestå af ett och samma urämne på olika sätt modifieradt*. Om vi skola tänka oss atomerna såsom sammanhängande massor af detta ämne, hvilkas skilda egenskaper bero af deras olika storlek och olika rörelseformer, eller om vi enligt PROUT's antagande skola anse dem såsom aggregat af olika antal skilda mindre atomer af ett och samma slag, lär väl svåriligen ännu kunna afgöras.

Arten af periodiciteten hos de mellan atomerna verkande krafterna synes särskildt tala för den uppfattningen, att *de kemiska grundämnenas atomer skilja sig till egenskaper genom olikheten i rörelser*. En noggrannare bestämning af atomviktterna skall utan tvifvel en gång fälla domen öfver PROUT's hypotes såväl som öfver alla dess modifikationer. Att den i sin ursprungliga form icke är öfverensstämmande med verkligheten, har redan blifvit till fullo adagalagt genom de nyare atomvigtsbestämningarne.

Med det nuvarande materialet torde eljest icke många satser om atomviktterna kunna hvarken vederläggas eller bevisas; men de hithörande frågornas stora allmänna intresse berättiga att fästa en viss vikt äfven vid en kanske blott skenbar regelbundenhet. En experimentel vederläggning bidrager åtminstone att inskränka de möjliga hypotesernas område. Jag tvekar derför icke att här framlägga en iakttagelse jag gjort af *en periodisk föränderlighet hos atomviktternas differenser*.

Såsom af efterföljande tabell synes, har jag tagit differenserna mellan atomviktterna för konsekutiva element inom hvarje rad och ordnat dem på vanligt sätt i rader och kolumner. I första kolumnen med öfverskriften II—I förekomma alltså differenser mellan 2-värdiga och 1-värdiga element o. s. v.

	II—I	III—II	IV—III	V—IV	VI—V	VII—VI
2	Be—Li 2,07	B—Be 1,82	C—B 1,07	N—C 2,04	O—N 1,95	F—I 3,10
3	Mg—Na 0,94	Al—Mg 3,10	Si—Al 0,96	P—Si 2,96	S—P 1,02	Cl—S 3,39
4	Ca—K 0,88	Sc—Ca 4,06	Ti—Sc 4,03	V—Ti 3,10	Cr—V 1,35	Mn—Cr 2,35
5	Zn—Cu 1,70	Ga—Zn 5,02	— —	— —	Se—As 3,97	Br—Se 0,89
6	Sr—Rb 2,10	Y—Sr 2,30	Zr—Y 0,80	Nb—Zr 3,30	Mo—Nb 2,20	— —
7	Cd—Ag 4,04	In—Cd 1,70	Sn—In 3,95	Sb—Sn 2,25	Te—Sb 5,40	J—Te 1,54
8	Ba—Cs 4,16	La—Ba 1,64	— —	— —	— —	— —
9	— —	— —	— —	— —	— —	— —
10	— —	— —	— —	— —	W—Ta 1,60	— —
11	Hg—Au 3,60	Tl—Hg 3,90	Pb—Tl 2,69	Bi—Pb 1,11	— —	— —

I Fig. 4 förekomma samma differenser utmärkta med quadrater, hvilkas sidor stå till hvarandra i samma förhållande som differenserna, för att göra förändringen så väl i horisontel som vertikal riktning åskådlig. Betraktar man nu differenserna inom samma kolumn, visar det sig med få undantag, att i de kolumnen, som innehålla differenserna vid öfvergången från ett ämne af udda till ett af jemn mättningskapacitet, alltså de med II—I, IV—III, VI—V betecknade, differensernas värde först minskas och derefter åter ökas, men att deremot i kolumnerna III—II, V—IV och VII—VI, der man går från ämnen af jemn till de af udda värdighet, tvärtom först en ökning och derefter en minskning inträder.

Vid öfvergången från raden 2 till raden 3, de båda säkrast kända, eger detta rum utan undantag och det samma är fallet i kolumnerna II—I och III—II, der dessutom i raden 11 en minskning inträder i den förra och en ökning i den senare. Kolumnerna VI—V och VII—VI visa samma förhållande i raderna 2—5 och icke heller i den med temligen stor noggrannhet kända raden 7 förekommer någon afvikelse, ty der äro differenserna II—I, IV—III, VI—V alltid större än III—II, V—IV, VII—VI. Af 40 differenser, som i figuren äro upptagna, inordna sig således omkring 75 % utan svårighet under den gifna regeln.

Undantag derifrån göra egentligen blott de tre sista differenserna af raden 6 jemte Ti—Sc och V—Ti. Att raden 6 är ytterst osäkert bestämd, framgår deraf, att Y, Zr, Nb af MEYER och SEUBERT hafva betecknats med V (de på flere enheter osäkra), och hvad Mo angår, synes dess värde vara för litet, dels därför att det beräknadt ur atomanalogerna skulle blifva 99,6, dels därför att differensen Mo—Rb, motsvarande 5 enkla differenser, blott utgör 10,7, då de motsvarande i närgränsande rader Cr—K, Se—Cu och Te—Ag äro resp. 13,42, 15,69, 17,34 (då Te antages = 125). Den svåraste afvikelsen eger rum i raden 3, der man måste antaga Sc = 44,5, Ti = 46, V = 50,5 ungefär, för att erhålla öfverensstämmelse med de andra raderna, hvilket åtminstone hvad Ti beträffar synes ligga utom gränserna för de möjliga felen. Då emellertid undantagen utslutande tillhöra de ofullständigt bestämda atomviktarna, kan man frestas till antagandet, att

- I. *differenserna mellan atomviktarna i trå närliggande grupper förändras efter en periodisk lag genom de olika raderna,*

- II. vid öfvergången från grupper med udda till grupper med jemn värdighet inträder först ett minimum; då man går från jemna till udda, deremot först ett maximum;
- III. de kända raderna (2—11) synas motsvara något mera än en hel period.

En sådan periodicitet kan för öfrigt a priori anses såsom ganska sannolik. Räkna vi nämligen antalet element, hvilkas atomvigt är mindre än 100, alltså H till och med Mo eller möjligtvis Ekamangan, utgör antalet 38 eller 39, så vida icke något obekant ämne kan antagas mellan H och Li. Mellan 100 och 200 från och med Em eller Ru till och med Hg hafva vi enligt systemet 40 eller 39, således, om Em antages < 100, lika många eller 39, i andra fallet 38 och 40 resp. på de båda första hundratalen. Medeldifferensen blir då

$$\text{antingen} \quad \frac{100}{39} = 2,564 \text{ eller}$$

$$\text{från 0—100} \quad \frac{100}{38} = 2,632,$$

$$\text{från 100—200} \quad \frac{100}{40} = 2,500.$$

Den kan således i alla händelser antagas vara konstant genom hela den kända serien af grundämnena. Den största af de med temlig säkerhet kända differenserna är Ba—Cs = 4,16, den minsta Ca—K = 0,88,

$$\text{den förra är} = 2,56 + 1,60,$$

$$\text{den senare} = 2,56 - 1,68.$$

De afvika således lika mycket från medelvärde. Af de enstaka stående Te—Sb = 5,40 och Ga—Zn = 5,02 är den förra ytterst oviss, alldenstund icke någon af de ingående atomviktarna är med säkerhet känd; i den senare synes Ga vara för stort, kanske en enhet¹⁾.

Det finnes numera icke mer än två möjligheter: antingen äro differenserna mellan atomvikterna för motsvarande ämnen i två närliggande grupper lika stora, hvaraf skulle följa t. ex. att äfven differenserna:

¹⁾ CLARKE's värde 68,854 (A recalculation of the atomic weights, pag. 219) måste bero på ett räknefel. Den första analysen gifver nämligen 69,926 och icke 68,071, hvadan medelvärde blir 69,732 i st. f. 68,854.

$$\text{Cl—Na} = 12,375,$$

$$\text{Br—Cu} = 16,58,$$

$$\text{J—Ag} = 18,88$$

måste vara lika, och hvilket antagande alltså är orimligt, *eller* förändras de från rad till rad och i sådant fall måste *diffärensorna omvärlande ökas och minskas, allidenstund medeldiffärensan är konstant och afvikelsena ej öfverstiga ett visst maximum.*

Antager man nu antalet rader obegränsadt, blir knappast någon annan möjlighet qvar än att antaga diffärensorna såsom periodiska funktioner af radernas ordningsnummer; åtminstone är detta den utan jämförelse enklaste hypotes, som kan uppställas. Att ett maximum i diffärens mellan ett par grupper skall motsvara ett minimum mellan något närliggande par, är äfven klart, då ju medeldiffärensan är konstant. Det enklaste fallet är då äfven här det, som synes framgå af figuren, att nämligen maxima och minima omvexla, då man går från grupp till grupp.

Utan att vilja fästa allt för mycken vikt vid det nu anförda, får man dock medgifva, att en periodisk föränderlighet hos den mängd materia, som fordras för att förvandla ett ämne af gifven värdighet till ett annat af närmast högre eller lägre, står ganska väl tillsammans med antagandet att atomerna äro olika rörelseformer af samma urmateria.

Skulle det verkligen bekräfta sig att diffärensorna periodiskt förändras, måste man antaga, att atomviktarna sjelfva växa efter en periodisk lag, då man skrider framåt i systemet, och således äro att betrakta såsom periodiska funktioner af deras ordningsnummer.



II-I III-II IV-III V-IV VI-V VII-VI

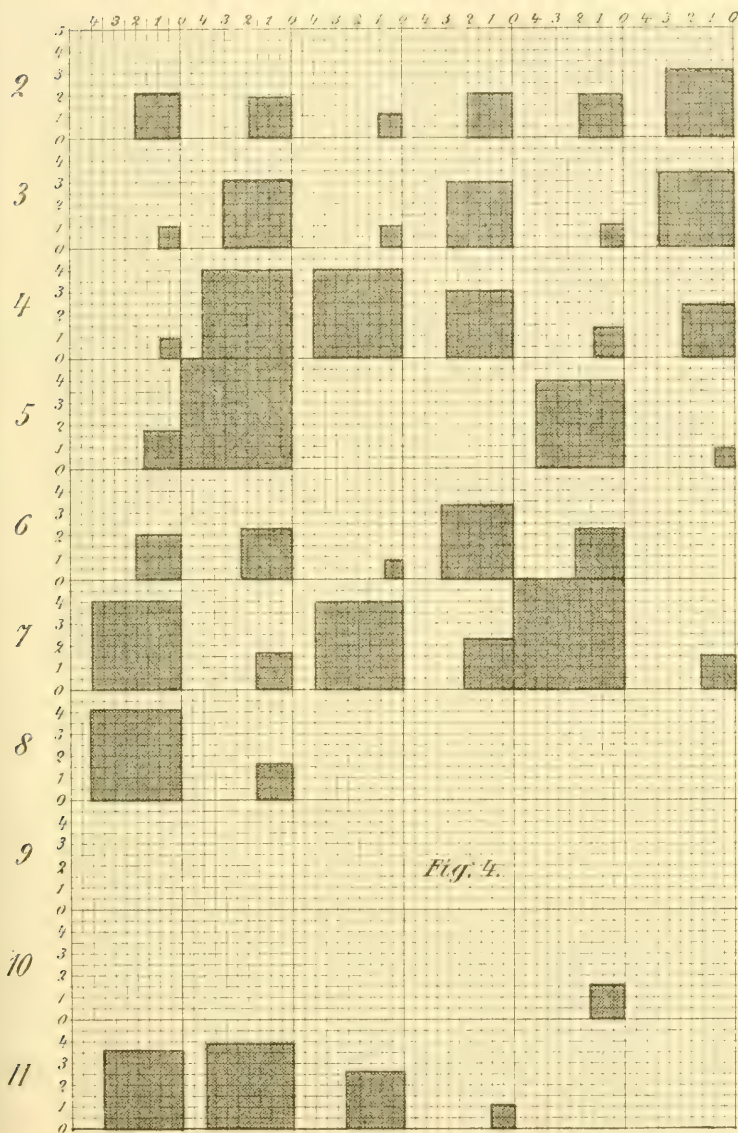


Fig. 4.

OBSERVATIONS

SUR

LES TABLES D'INTÉGRALES DÉFINIES

DE

MR BIERENS DE HAAN.

(AMSTERDAM 1858).

PAR

C. F. LINDMAN.

COMMUNIQUÉ A L'ACADÉMIE ROY. DES SCIENCES DE SUÈDE LE 10 SEPTEMBRE 1884.



STOCKHOLM, 1885.

KONGL. BOKTRYCKERIET.

P. A. NORSTEDT & SÖNER.

On sait que dans plus d'une recherche théorique il est de rigueur, de connaître telle et telle intégrale définie et souvent le géomètre pratique même ne peut s'en passer. Autrefois, on était réduit à chercher l'intégrale dont on avait besoin dans plusieurs ouvrages sans toutefois la trouver. De nos jours, les savants se trouvent dans une situation plus avantageuse, depuis que Mr BIERENS DE HAAN a eu l'heureuse idée de classer et de rassembler en tables une quantité d'intégrales définies tirées de mémoires spéciaux ou publiées par les académies des sciences de presque tous les pays de l'Europe. Mais cet éminent géomètre ne s'en est pas tenu là. Il a continué son immense travail et il a augmenté son mérite déjà si considérable en faisant les corrections et les observations en partie critiques qui étaient souvent indispensables. De plus, aux tables publiées en 1858 par l'Académie royale des sciences à Amsterdam le même auteur a ajouté en 1862 un autre ouvrage du plus grand mérite, je veux dire son «Exposé de la théorie, des propriétés, des formules de transformation et des méthodes d'évaluation des intégrales définies», publié par la même académie.

Ayant fait connaissance de ce livre précieux, j'eus un vif désir de pouvoir contribuer, pour ma faible part, à l'oeuvre que Mr BIERENS DE HAAN avait entreprise, en soumettant à un nouvel examen les tables en question et en les corrigeant, s'il y avait des fautes malgré les corrections déjà faites. D'autres occupations m'empêchèrent longtemps de réaliser mon projet, mais en 1876 et en 1878 j'eus l'honneur de présenter

a l'Académie Royale un examen de certaines intégrales tirées des tables de Mr BIERENS DE HAAN. Depuis, je m'étais proposé, si cela m'était possible, une revision complète de toutes les intégrales contenues dans les tables. Cependant j'appris, mais l'année passée seulement, que Mr BIERENS DE HAAN, grâce à l'entremise de sa Majesté le Roi des Pays-Bas, était parvenu à publier, déjà en 1867, de nouvelles tables d'intégrales définies. A cette nouvelle, je crus d'abord que ces tables rendraient mon travail inutile, mais en les parcourant j'y ai trouvé tant d'intégrales prises des anciennes tables que j'ai cru devoir continuer mes recherches.

C'est la première partie de ces recherches, contenant les tables 1—284 que j'ose maintenant offrir à l'Académie Royale en la priant de vouloir bien les admettre dans ses mémoires. Les autres tables suivront aussitôt que cela me sera possible.

Avant de passer à la révision même, je dois faire connaître les principes qui m'ont guidé et les notations dont j'ai fait usage.

En général, je pose en fait que les corrections faites par Mr BIERENS DE HAAN sont observées, quoique je diffère quelquefois de lui. Les intégrales données par Mr OETTINGER sont ordinairement laissées de côté, parce qu'elles sont souvent fautives ou valables seulement à des conditions rarement indiquées.

Il m'a été impossible d'examiner plusieurs des formules de LOBATSCHESKY, publiées dans les mémoires de l'Académie de Kasan lesquelles probablement je ne parviendrai jamais à voir. Quelques formules du même auteur contiennent des fonctions hyperboliques: elles me semblent douteuses.

Généralement, j'ai employé les notations usuelles. Cependant je me sers quelquefois de quelques transcendentes que j'ai proposées dans *Nova Acta regiae societatis scientiarum Upsaliensis* (1874). Elles sont

$$H(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{Cot} ax dx \quad \text{et} \quad L(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{\sin ax}$$

entre lesquelles on a la relation

$$L(a) = H\left(\frac{a}{2}\right) - H(a).$$

Pour éviter un double signe de sommation j'ai quelquefois employé le signe

$$S_r = \frac{1}{1^r} + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{4^r} + \text{etc.} \quad (r > 1)$$

dont les valeurs sont données par plusieurs auteurs, entre autres par moi (1864) dans Vième Tome de Kongl. Vetenskaps-Akademiens Handlingar (Handl. Stockh. selon l'abréviation de M:r BIERENS de HAAN).

Tab. 1.

6 jusqu'à la formule N:r 16 sont toutes comprises en N:r 8 et pour cela inutiles.

21 donnée par Plana est fautive. Lisez

$$\int_0^1 (1 - x^b)^p x^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma\left(\frac{q}{b}\right)}{b\Gamma\left(p+1+\frac{q}{b}\right)} = \frac{p}{b^p+q} \cdot \frac{\Gamma(p)\Gamma\left(\frac{q}{b}\right)}{\Gamma\left(p+\frac{q}{b}\right)}.$$

23. Je préfère la forme

$$\int_0^1 (1 - x^b)^{a-1} x^{ab-1} dx = \frac{1}{b} \cdot \frac{[\Gamma(a)]^2}{\Gamma(2a)}$$

25. On peut écrire

$$\int_0^1 (x^{a-1} - 1)(1 - x)^b dx = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)} - \frac{1}{b+1}.$$

26 est fautive. On peut l'avoir par N:o 8. On trouve donc

$$\int_0^1 (x^b - x^{b+c})^g x^{a-1} dx = \frac{1}{c} \cdot \frac{\Gamma(g+1)\Gamma\left(\frac{a+bq}{c}\right)}{\Gamma\left(g+1+\frac{a+bq}{c}\right)}.$$

Tab. 2.

Toutes les intégrales de cette table hors N:o 1 sont données par OETTINGER et elles sont plus ou moins inexactes. Quoique je me sois déterminé à omettre les formules de cet auteur, pourtant je veux examiner les formules de cette table.

2. Par Tab. 1 N:o 20 on trouve

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^b}\right)^c x^{a-1} dx = (-1)^c \cdot \frac{\Gamma(c+1)\Gamma\left(\frac{a}{b} - c\right)}{a\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)}, \quad a > bc$$

La condition est omise ainsi que le facteur $(-1)^c$.

3. Ajoutez: $1 > p \geq 0$.

4 vaut, si l'on a $0 > p > -1$,

5 est en général fautive,

6 vaut, si $1 > p \geq 0$.

Tab. 3.

3. Cauchy a trouvé l'intégrale $= \mathfrak{L} \frac{p}{1-p}$, $p < 1$, mais on doit plutôt écrire

$$\int_0^1 \frac{dx}{p-x} = \frac{1}{2} \mathfrak{L} \left(\frac{p}{p-1} \right)^2, \quad p > 1 \text{ ou } p < 0.$$

Pour $1 > p > 0$ c'est la valeur principale.

6. Legendre a donné

$$\int_0^1 \frac{1-x^k}{1-x} dx = A + \mathfrak{L}k + \frac{1}{2k} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu k^{2\nu}} B_{2\nu-1}$$

d'où Mr B. d. H. déduit

$$\lim \int_0^1 \frac{1-x^k}{1-x} dx = A + \mathfrak{L}k \text{ pour } k = \infty;$$

on peut aussi bien dire

$$\int_0^1 \frac{1-x^k}{1-x} dx = \infty \text{ pour } k = \infty.$$

10. Échangez cette formule contre

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^{b-a-1}}{1-px} \cdot x^{a-1} dx = \Gamma(b-a) \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} p^{\nu} \cdot \frac{\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(b+\nu)},$$

$$b > a > 0; \quad p < 1.$$

11. Deux fautes d'impression sont corrigées, mais une reste.
Lisez

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-x)^p \cdot \frac{1-(ax)^c}{1-ax} \cdot dx &= \sum_{\nu=1}^{\nu=c} \frac{a^{\nu-1} \cdot \Gamma(p+1) \Gamma(\nu)}{\Gamma(p+\nu+1)} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\nu=c} \frac{a^{\nu-1} \cdot 1^{\nu-1/1}}{(p+1)^{\nu/1}}. \end{aligned}$$

22, 23 semblent être fautives.

26. Je n'ai pas pus trouver cette formule donnée par Mr Dienger (Crelle 38. 331) et je pense que quelque chose y soit omise. D'abord il faut distinguer entre a pair et impair. Désignons la variable par y et posons $a=2\alpha+1$, $y = xe^{-pi}$: nous aurons

$$J_{2\alpha+1} = \int_0^1 \frac{e^{pi} dy}{1 + (e^{pi} y)^{2\alpha+1}} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^{2\alpha+1}}.$$

On peut avoir cette intégrale par une formule de Mr Minding¹⁾, savoir

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{m-1} dx}{1+x^n} &= \frac{(-1)^{m-1}}{n} \mathcal{U}(1+x) - \frac{2}{n} \sum_{\mu=0}^{\mu=\frac{1}{2}(n-3)} P_{\mu} \cdot \text{Cos} \frac{(2\mu+1)m\pi}{n} \\ &+ \frac{2}{n} \sum_{\mu=0}^{\mu=\frac{1}{2}(n-3)} Q_{\mu} \text{Sin} \frac{(2\mu+1)m\pi}{n} \end{aligned}$$

où on a $m=1$, $n=2\alpha+1$ et

¹⁾ Integral-Tafeln. Berlin 1849 pag. 57.

$$P_{\mu} = \frac{1}{2}l \left(1 - 2x \cos \frac{2u+1}{2\alpha+1} \cdot \pi + x^2 \right),$$

$$Q_{\mu} = \text{Arc tg} \frac{x \sin \frac{2u+1}{2\alpha+1} \cdot \pi}{1 - x \cos \frac{2u+1}{2\alpha+1} \cdot \pi}.$$

Pour la limite inférieure tous les termes d'évanouissent; pour la limite supérieure on a moyennant quelques formules en l'exposé¹⁾ de Mr B. d. H.

$$/e^{pi} P_{\mu} = \frac{1}{2}(pi + l2) + \frac{1}{2}l \left(\cos p - \cos \frac{2u+1}{2\alpha+1} \cdot \pi \right)$$

$$/e^{pi} Q_{\mu} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{2u+1}{2\alpha+1} \right) + \frac{i}{4}l \frac{1 - \cos \left(\frac{2u+1}{2\alpha+1} \cdot \pi + p \right)}{1 - \cos \left(\frac{2u+1}{2\alpha+1} \cdot \pi - p \right)}$$

$$/e^{pi} l(1+x) = \frac{pi}{2} + l2 + l \cos \frac{p}{2}.$$

En insérant tout cela on trouvera

$$\begin{aligned} J_{2\alpha+1} = & \frac{1}{2\alpha+1} \left\{ \frac{pi}{2} + l2 + l \cos \frac{p}{2} - (pi + l2) \sum_{\mu=0}^{\mu=\alpha-1} \cos \frac{2u+1}{2\alpha+1} \cdot \pi \right. \\ & + \pi \sum_{\mu=0}^{\mu=\alpha-1} \left(1 - \frac{2u+1}{2\alpha+1} \right) \sin \frac{2u+1}{2\alpha+1} \cdot \pi \\ & - \sum_{\mu=0}^{\mu=\alpha-1} \cos \frac{2u+1}{2\alpha+1} \cdot \pi l \left(\cos p - \cos \frac{2u+1}{2\alpha+1} \cdot \pi \right) \\ & \left. + \frac{i}{2} \sum_{\mu=0}^{\mu=\alpha-1} \sin \frac{2u+1}{2\alpha+1} \cdot \pi l \frac{1 - \cos \left(\frac{2u+1}{2\alpha+1} \cdot \pi + p \right)}{1 - \cos \left(\frac{2u+1}{2\alpha+1} \cdot \pi - p \right)} \right\}, \end{aligned}$$

mais quelques reductions se peuvent faire ici.

¹⁾ Pages 185, 186.

Par des formules connues¹⁾ on a

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\alpha-1} \text{Cos } \frac{2\mu+1}{2\alpha+1} \cdot \pi = \frac{1}{2}, \quad \sum_{\mu=0}^{\mu=\alpha-1} \text{Sin } \frac{2\mu+1}{2\alpha+1} \cdot \pi = \frac{\text{Sin } \frac{2}{2\alpha+1} \cdot \frac{\alpha\pi}{2}}{\text{Sin } \frac{\pi}{2\alpha+1}};$$

en différenciant la formule

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\alpha-1} \text{Cos } \frac{2\mu+1}{2\alpha+1} \cdot z = \frac{\text{Sin } \frac{2\alpha z}{2\alpha+1}}{2 \text{ Sin } \frac{z}{2\alpha+1}}$$

par rapport à z et en posant après cela $z = \pi$ on aura

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\alpha-1} \frac{2\mu+1}{2\alpha+1} \cdot \text{Sin } \frac{2\mu+1}{2\alpha+1} \cdot \pi = \frac{1}{2} \text{Cot } \frac{\pi}{2\alpha+1}.$$

En observant tout cela on trouve enfin

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^{pi} dy}{1 + (e^{pi} y)^{2\alpha+1}} &= \frac{1}{2\alpha+1} \left\{ \frac{1}{2} l^2 + l \text{Cos } \frac{p}{2} + \frac{\pi}{2 \text{Sin } \frac{\pi}{2\alpha+1}} \right. \\ &\quad - \sum_{\mu=0}^{\mu=\alpha-1} \text{Cos } \frac{2\mu+1}{2\alpha+1} \cdot \pi l \left(\text{Cos } p - \text{Cos } \frac{2\mu+1}{2\alpha+1} \cdot \pi \right) \\ &\quad \left. + \frac{i}{2} \sum_{\mu=0}^{\mu=\alpha-1} \text{Sin } \frac{2\mu+1}{2\alpha+1} \cdot \pi l \frac{1 - \text{Cos } \left(\frac{2\mu+1}{2\alpha+1} \cdot \pi + p \right)}{1 - \text{Cos } \left(\frac{2\mu+1}{2\alpha+1} \cdot \pi - p \right)} \right\} \end{aligned}$$

avec la condition

$$p^2 < \frac{\pi^2}{(2\alpha+1)^2}.$$

Pour $a = 2\alpha$ on trouve à la même manière

¹⁾ Voyez Grunert, Supplemente zu G. S. KLÜGEL's Math. Wörterbuch. Leipzig 1836 Zw. Abtheil, pag. 637.

$$\int_0^1 \frac{e^{piy} dy}{1 + (e^{piy})^{2a}} = \frac{1}{2a} \left\{ -\frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi}{2a}} \right. \\ \left. - \sum_{\mu=0}^{\mu=a-1} \cos \frac{2\mu+1}{2a} \cdot \pi l \left(\cos p - \cos \frac{2\mu+1}{2a} \cdot \pi \right) \right. \\ \left. + \frac{i}{2} \sum_{\mu=0}^{\mu=a-1} \sin \frac{2\mu+1}{2a} \cdot \pi l \frac{1 - \cos \left(\frac{2\mu+1}{2a} \cdot \pi + p \right)}{1 - \cos \left(\frac{2\mu+1}{2a} \cdot \pi - p \right)} \right\}$$

avec la condition

$$p^2 < \frac{\pi^2}{4a^2}.$$

Je ne sais pas expliquer la dissemblance entre mes formules et celle de M^r DIENGER.

27. Je l'ai calculé de la même manière que N:o 26 (J_{2a}) et j'ai obtenu la même formule que M^r DIENGER. Peut-être faut-il que dans N:o 26 a soit un nombre pair.

Tab. 4.

1. M^r B. d. H. y a corrigé une faute d'impression. Pour plus de sûreté je récris la formule, savoir

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1} dx}{(1+x)^b} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu (b-a-1)_\nu}{(a+\nu) \cdot 2^{a+\nu}}.$$

- 2 est compliquée en pure perte. On l'aura en posant $2a + b$ au lieu de b en N:o 1.
- 10 est fautive.
12. La signification de la lettre ξ n'est pas indiquée, mais elle est probablement le signe d'une fonction. Si a et b sont des nombres entières et que $a > 1$, $p > -1$, on trouvera par la substitution $x = \frac{y-1}{p}$

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1} dx}{(1+px)^b} = \frac{1}{p^a} \sum_{r=0}^{r=a-1} \frac{(-1)^r (a-1)_r [(1+p)^{a-b-r} - 1]}{a-b-r}$$

où il faut observer que l'expression

$$\frac{(1+p)^{a-b-r} - 1}{a-b-r} \text{ soit } = \mathcal{U}(1+p) \text{ pour } a = b + r.$$

17 est corrigée par M:r B. d. H. Lisez

$$\int_0^1 \frac{x^{b-1} (1-x)^{c-b-1}}{(1-qx)^a} dx = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} \cdot \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{a^{r/1}}{1^{r/1}} \cdot \frac{b^{r/1}}{c^{r/1}} \cdot q^r.$$

19 vaut à condition que $1 > p > \frac{1}{2}$.

$$23. \text{ Je trouve la valeur } = \frac{2p\pi}{q^2 \left(e^{\frac{p\pi}{q}} - e^{-\frac{p\pi}{q}} \right)}.$$

Tab. 5.

6 est la même formule que N:o 2.

16. En posant $x = y^{\frac{1}{q}}$ dans l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{x^p + x^q - p}{1 + x^q} \cdot \frac{dx}{x}$$

on aura

$$J = \frac{1}{q} \int_0^1 \frac{y^{\frac{p}{q}-1} + y^{-\frac{p}{q}}}{1+y} dy;$$

mais si dans N:o 1 on remplace p par $\frac{p}{q}$, on trouve

$$\int_0^1 \frac{y^{\frac{p}{q}-1} + y^{-\frac{p}{q}}}{1+y} dy = \pi \operatorname{Cosec} \frac{p\pi}{q}$$

or

$$\int_0^1 \frac{x^p + x^{q-p}}{1+x^q} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{q} \operatorname{Cosec} \frac{p\pi}{q}, \quad q > p.$$

Il faut donc ôter le facteur 2 dans le dénominateur.

27. Mr B. d. H. dit dans ses corrections qu'il faut lire $\iota_{\frac{a}{b}+1}^{\frac{a}{b}}$, mais dans son exposé (pag. 381) il donne $\iota_{\frac{a}{b}}$ comme dans le texte.

Tab. 6.

Plusieurs formules sont corrigées par Mr B. d. H., mais néanmoins je les écris ci-après

$$1. \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{dx}{1+px} = \frac{1}{1+p^2} \left[\frac{p\pi}{4} - \iota_{\frac{1+p}{2}}^{\frac{1+p}{2}} \right].$$

2. La condition $1 > q > 0$ manque.

$$3. \int_0^1 \frac{1-x^a}{(1+x)^{a+1}} \cdot \frac{dx}{1-x} = \frac{1}{2^{a+1}} \sum_{r=1}^{r=a} \frac{2^r}{r}.$$

$$4. \int_0^1 \frac{x^{q-1}}{(1-x)^q} \cdot \frac{dx}{x+a} = \frac{a^{q-1}}{(1+a)^q} \cdot \pi \operatorname{Cosec} q\pi, \quad 1 > q > 0.$$

$$5. \int_0^1 \frac{x^{q-1}}{(1-x)^{1-r}} \cdot \frac{dx}{(x+p)^{q+r}} = \frac{\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)} \cdot \frac{1}{p^r(1+p)^q}.$$

C'est la même intégrale que Tab. 4 N:o 13, si l'on pose a, p au lieu de p, r .

$$8. \int_0^1 \frac{x^{r-1}}{(1-x)^r} \cdot \frac{dx}{(1+px)(1+qx)} = \frac{\pi}{(p-q) \sin r\pi} \left[\frac{p}{(1+p)^r} - \frac{q}{(1+q)^r} \right],$$

$$1 > r > 0.$$

- 10 s'obtient en différentiant N:o 9 par rapport à a , mais il y a une faute d'impression: en le dénominateur à droite

il faut être $(a-b)^{c+1-p}$ au lieu de $(a-b)^{c-1-p}$. Du reste, la formule ne paraît pas parfaitement nette. Je préfère de l'écrire ainsi:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p(1-x)^{1-p}} \cdot \frac{dx}{(a-bx)^{c+1}} = \frac{1}{\Gamma(c+1)} \sum_{r=0}^{r=c} \frac{c_r \Gamma(c-p+1-r) \Gamma(p+r)}{a^{p+r} (a-b)^{c-p+1-r}},$$

$1 > p > 0$; a ni $= 0$ ni $= b$ ou plutôt a pos. et $> b$.

12, 13 sont au fond la même formule.

15 est fautive et d'ailleurs superflue. Lisez

$$\int_0^1 \left(\frac{b x^{b-1}}{1-x^b} - \frac{1}{1-x} \right) dx = -Z'(ab) + \frac{1}{b} \sum_{r=1}^{r=b} Z\left(a + \frac{b-r}{b}\right).$$

Le membre droit a la même valeur quelque soit a , ce que doit être. N:o 16 est la même, mais de signe contrair.

19 a probablement été obtenue par développement en série, mais je trouve alors le facteur $2i$ au lieu de 2 dans le membre droit. Autrement les formules N:o 18 et N:o 19 sont contraires à Tab. 3 N:o 26.

Tab. 7.

11. On peut écrire

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x dx}{1-2px+x^2} &= \frac{1}{2} \mathcal{I} 2(1-p) + \frac{p}{1-p^2} \text{Arc tg } \sqrt{\frac{1+p}{1-p}}, \quad p < 1 \\ &= \mathcal{I} \left(2 \sin \frac{1}{2} \lambda \right) + \frac{1}{2} (\pi - \lambda) \text{Cot } \lambda \end{aligned}$$

en posant $p = \cos \lambda$.

13. La limite supérieure de la somme est $= b-1$ et l'inférieure $= 1$; divisez le membre droit par $2b$.

14. La limite supérieure de la somme est $= \frac{1}{2}(b-1)$ et l'inférieure $= 1$; divisez le membre droit par b .

- 22 est donnée par une série infinie, quoique on puisse l'avoir en forme finie. En effet elle n'est que la différence du N:o 3 et N:o 11 ci-dessus. Donc nous aurons

$$\int_0^1 \frac{1-x}{1-2x \cos \lambda + x^2} dx = \frac{1}{2}(\pi - \lambda) \operatorname{tg} \frac{1}{2}\lambda - l(2 \sin \frac{1}{2}\lambda)$$

Tab. 8.

4. Il faut que le terme deuxième ait le signe +. Les intégrales N:o 2, 3, 4 sont d'ailleurs des cas particuliers d'une intégrale plus générale que l'on aura comme il suit. Posons

$$J = \int_0^1 \frac{x^c dx}{\left(1 + 2x \cos \frac{a\pi}{b} + x^2\right)^2}$$

et pour abréger $1 + 2x \cos \frac{a\pi}{b} + x^2 = N$.

En intégrant par parties on trouve

$$\int \frac{x^c dx}{N^2} = \frac{x^c \left(x + \cos \frac{a\pi}{b}\right)}{2 \sin \frac{2a\pi}{b} \cdot N} - \frac{c-1}{2 \sin \frac{2a\pi}{b}} \int \frac{x^c dx}{N} - \frac{c \cos \frac{a\pi}{b}}{2 \sin \frac{2a\pi}{b}} \int \frac{x^{c-1} dx}{N}.$$

Si nous introduisons les limites, il vient

$$J = \frac{1}{4 \sin \frac{2a\pi}{b}} - \frac{c-1}{2 \sin \frac{2a\pi}{b}} \int_0^1 \frac{x^c dx}{N} - \frac{c \cos \frac{a\pi}{b}}{2 \sin \frac{2a\pi}{b}} \int_0^1 \frac{x^{c-1} dx}{N}.$$

Les intégrales dans le membre droit sont données en Tab. 7 N:o 13 et 14 par lesquelles on trouve

$a + b$ impair

$$J = \frac{1}{4 \sin \frac{2a\pi}{b}} - \frac{c-1}{4b \sin \frac{3a\pi}{b}} \sum_{r=1}^{r=b-1} (-1)^{r-1} \sin \frac{ra\pi}{b} \left[Z\left(\frac{b+c+r}{2b}\right) - Z\left(\frac{c+r}{2b}\right) \right] \\ - \frac{c \cos \frac{a\pi}{b}}{4b \sin \frac{3a\pi}{b}} \sum_{r=1}^{r=b-1} (-1)^{r-1} \sin \frac{ra\pi}{b} \left[Z\left(\frac{b+c+r-1}{2b}\right) - Z\left(\frac{c+r-1}{2b}\right) \right].$$

$a + b$ pair

$$J = \frac{1}{4 \sin \frac{2a\pi}{b}} - \frac{c-1}{2b \sin \frac{3a\pi}{b}} \sum_{r=1}^{r=\frac{1}{2}(b-1)} (-1)^{r-1} \sin \frac{ra\pi}{b} \left[Z\left(\frac{b+c-r}{b}\right) - Z\left(\frac{c+r}{2b}\right) \right] \\ - \frac{c \cos \frac{a\pi}{b}}{2b \sin \frac{3a\pi}{b}} \sum_{r=1}^{r=\frac{1}{2}(b-1)} (-1)^{r-1} \sin \frac{ra\pi}{b} \left[Z\left(\frac{b+c-r-1}{b}\right) - Z\left(\frac{c+r-1}{b}\right) \right].$$

Lorsqu'on déduit N:o 3 de celle-là, on trouve que le signe du terme deuxième est +.

5 est fautive à plus d'un titre. D'abord il faut ajouter les conditions $1 > q > 0$; $p > 0$. Puis on a

$$\int_0^1 \frac{x^q - 1}{1 + 2px \cos \lambda + p^2 x^2} \cdot \frac{dx}{(1-x)^2} = \frac{\pi \sin \left(\lambda - q \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{p \sin \lambda}{1 + p \cos \lambda} \right)}{\sin \lambda \sin q\pi (1 + 2p \cos \lambda + p^2)^{\frac{q}{2}}}.$$

6, 7. Ajoutez les conditions: $p^2 < 1$; $\lambda^2 < \pi^2$.

9, 10, 12. $q^2 > p^2$.

Tab. 9.

10 est fautive. Je trouve

$$\int_0^1 x^{2a} (1-x^2)^{b+\frac{1}{2}} dx = \frac{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(b + \frac{3}{2}\right)}{2\Gamma(a+b+2)}.$$

- 14 donnée par Ramus semble très singulière. Il est nécessaire que plusieurs conditions soient remplies, si elle serait vraie, mais aucunes ne sont données.

Tab. 11.

- 1, 2. Ajoutez $p < \frac{1}{2}$.

Tab. 12.

3. Ajoutez la condition $1 > \frac{a}{b} > 0$.
 9. Cette intégrale peut être trouvée, en multipliant le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{1-x^2}$, mais elle peut aussi s'exprimer par des intégrales elliptiques. En posant $x = \text{Cos } \varphi$ on trouve

$$\int_0^1 dx \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{1 + \cos^2 \varphi} = \sqrt{2} \left[F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right].$$

14. En posant $x = \text{Sin } \varphi$ on aura

$$\int_0^1 dx \sqrt{\frac{1-p^2x^2}{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1-p^2 \sin^2 \varphi} = E(p) \quad p < 1.$$

On aperçoit par la forme de la valeur du texte que *Ohm* a développé $\sqrt{1-p^2x^2}$ en série, mais la condition $p < 1$ manque aussi bien que le facteur $\frac{\pi}{2}$.

- 15, 16 peuvent s'exprimer par la fonction $\Gamma(\dots)$. On a

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)} = 1,29355478.$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} = 1,12025130.$$

17. Ajoutez la condition $\frac{1}{2} > p > -\frac{1}{2}$.

18 est parfaitement exacte, mais il y a l'inconvénient que le

facteur $\frac{\sin(2p-1)\frac{\pi}{4}}{2p-1}$ devient indéterminé pour $p = \frac{1}{2}$.

Sa valeur dans ce cas est $= \frac{\pi}{4}$. On peut écrire

$$\int_0^1 \frac{x^{p-\frac{1}{2}} dx}{(1-x^2)^p} = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2} + \frac{1}{4}\right) \Gamma(1-p)}{2\Gamma\left(\frac{5}{4} - \frac{p}{2}\right)}, \quad p < 1.$$

19. Otez le facteur $(-1)^{b-1}$. On a

$$\int_0^1 \frac{x^{2a-1} dx}{(1-x^2)^{b-\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(a) \Gamma(\frac{3}{2} - b)}{\Gamma(2a - b + \frac{3}{2})}, \quad b < \frac{3}{2}.$$

20 est fautive.

21. Otez le facteur $(-1)^{b-1}$.

22 est fautive.

23. 24. Il faut que $p + q$ soit < 2 .

Tab. 13.

La plupart de ces intégrales sont données par Legendre et exprimées par des intégrales elliptiques, mais elles peuvent aussi s'exprimer par la fonction $\Gamma(\dots)$. Cela est à mon avis plus commode. On trouve

$$1. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(\frac{5}{6})} = 1,402182105.$$

$$2. \int_0^1 \frac{dx}{(1-x^3)^{2/3}} = \frac{\Gamma(\frac{4}{3}) \Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})} = 1,76663875.$$

$$3. \int_0^1 \frac{x dx}{(1-x^3)^{1/3}} = \frac{(\Gamma(\frac{2}{3}))^2}{3\Gamma(\frac{4}{3})} = 0,684463405.$$

$$6. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \sqrt{\pi} \cdot \frac{I(\frac{5}{4})}{I(\frac{3}{4})} = 1,31102878.$$

$$9. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^6}} = \sqrt{\pi} \cdot \frac{I(\frac{7}{6})}{I(\frac{5}{6})} = 1,21432532.$$

$$10. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^8}} = \sqrt{\pi} \cdot \frac{I(\frac{9}{8})}{I(\frac{7}{8})} = 1,16359257.$$

$$11. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{12}}} = \sqrt{\pi} \cdot \frac{I(\frac{13}{12})}{I(\frac{11}{12})} = 1,11107930.$$

Tab. 14.

- 1, 2, 3. Ajoutez la condition $a > b$.
4. Le nombre q est > 1 .
5. La condition est $q > p$.
23. est valable pour $1 > b > 0$.
24. vaut pour $1 > bq > 0$.

Tab. 15.

$$11. \int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}} \sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{I(\frac{1}{6})}{I(\frac{5}{6})} = 3,64297597.$$

$$12. \int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}} \sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{I(\frac{1}{3})}{I(\frac{2}{3})} = 2,10327316.$$

- 15 est Tab. 6 N:o 9 où l'on a posé $p = \frac{1}{2}$. La condition nécessaire est a pos. et $> b$.
- 16 s'obtient en différentiant N:o 15 c fois par rapport à a . Par là on aura

$$\int_0^1 \frac{1}{(a-bx)^{c+1}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{\sqrt{a(a-b)} I(c+1)} \sum_{\nu=0}^{\nu=c} \frac{c_{\nu} I(c-\nu+\frac{1}{2}) I(\nu+\frac{1}{2})}{a^{c-\nu} (a-b)^{\nu}}.$$

18. Une faute d'impression a été corrigée, une autre reste.
Si dans la formule connue (Voyez Tab. 5 N:o 6)

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x} dx = \pi \operatorname{Cot} p\pi, \quad 1 > p > 0$$

on pose $p = \frac{a}{2b} + \frac{1}{2}$, on aura

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{a}{2b}-1} - x^{-\frac{a}{2b}-1}}{1-x} dx = \pi \operatorname{Cot} \left(\frac{a\pi}{2b} + \frac{\pi}{2} \right) = -\pi \operatorname{tg} \frac{a\pi}{2b}$$

ou en changeant les signes

$$\int_0^1 \frac{x^{-\frac{a}{2b}} - x^{\frac{a}{2b}}}{1-x} \cdot \frac{dx}{x} = \pi \operatorname{tg} \frac{a\pi}{2b}, \quad b > a > -b.$$

Tab. 16.

- 8 proviendrait en posant $p = \operatorname{tg} \lambda$ en N:o 7, mais cela n'arrive pas; on la trouve, si l'on pose $p = i \operatorname{tg} \lambda$. Alors on aura

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{q}{2}} dx}{[(1-x)(1+x \operatorname{tg}^2 \lambda)]^{\frac{q+1}{2}}} = \frac{\sin q\lambda \operatorname{Cos} q\lambda}{q \operatorname{tg} \lambda} B\left(\frac{2+q}{2}, \frac{1-q}{2}\right), \quad 1 > q.$$

10. Lisez

$$\int_0^1 \left(\frac{a}{1-x} - \frac{x^{p-1}}{1-\sqrt[p]{x}} \right) dx = aA + \sum_{\nu=1}^{\nu=a} Z\left(p + \frac{a-\nu}{a}\right).$$

Tab. 17.

- 1 à 6. Toutes ces formules sont fautives¹⁾.

¹⁾ Voyez Serret, Calcul intégral. Paris 1868, pag. 104, 105.

- 11, 12. Lisez — $2pqx$ dans le dénominateur de la dérivée.
Voyez N:o 9 et 10.
- 13 est juste pour $1 > q > p$, mais si l'on a $1 > p > q$, il vient

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-2pqx+p^2q^2)\left(1-\frac{2p}{q}x+\frac{p^2}{q^2}\right)}} = \frac{1}{p} \mathcal{U}\left(\frac{1+q}{1-q}\right).$$

- 14 à 17. sont justes, si p et q ont le même signe; autrement on trouve des fonctions circulaires inverses.

Tab. 18.

5. Il faut que a soit une quantité positive, mais elle peut être une fraction.
9. M:r B. d. H. dit que cette formule ne vaut qu'entre les limites a et $\pm \infty$. Cependant elle a besoin d'un examen ulterieur. Posons d'abord $a > b$: en faisant $x = a + (a-b)y$ on aura

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \frac{(x-a)^{p-1}}{b-x} dx &= -(a-b)^{p-1} \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{1+y} dy \\ &= -\frac{\pi(a-b)^{p-1}}{\sin p\pi}, \quad 1 > p > 0. \end{aligned}$$

Pour $a < b$ on trouve également

$$\int_a^\infty \frac{(a-x)^{p-1}}{b-x} dx = -\frac{\pi(b-a)^{p-1}}{\sin p\pi}, \quad 1 > p > 0.$$

Dans tous les autres cas l'intégrale est $= \infty$.

10. On retrouve ici la même fonction que dans Tab. 3 N:o 10 et Tab. 4 N:o 12.
17. L'introduction des facultés numériques ne sert pas à simplifier la formule, mais plutôt à l'embrouiller. La forme donne lieu à croire que p doit être > 1 , mais il n'en est pas ainsi. Un autre inconvenient est que la valeur devient indéterminée pour $p =$ un nombre entier. Cela

étant il vaut mieux à mon avis déduire l'intégrale directement. En posant $x = by$ on aura

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{(b+x)^{a+1}} = \frac{1}{b^{a-p+1}} \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1} dy}{(1+y)^{a+1}} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(a-p+1)}{b^{a-p+1}\Gamma(a+1)}$$

d'après une formule bien connue. Les seules conditions nécessaires sont que a et b soient positives et $a+1 > p > 0$.

18 provient de la formule précédente en faisant $b = 1$.

19 n'est pas tout-à-fait exacte. Écrivons

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a+p-1} dx}{(1+x)^{2a}} = \frac{\Gamma(a+p)\Gamma(a-p)}{\Gamma(2a)}, \quad a > p.$$

20. À cette formule on peut donner une forme à la fois plus simple et plus usuelle, savoir

$$\int_0^{\infty} \frac{x^a dx}{(1+x)^{a+p+1}} = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(p)}{\Gamma(a+p+1)}, \quad p > 0.$$

29. Ajoutez la condition $q+1 > p > q$.

Tab. 19.

3, 4. Mr B. d. H. a démontré¹⁾ que toutes ces intégrales sont = 0.

6. Les conditions $2 \geq p \geq 0$ sont bien justes, mais pour $p = 2$ et $p = 0$ les deux membres deviennent infinies. On peut donc se borner aux conditions $2 > p > 0$.

12 est fautive. Sa valeur principale est = $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ ²⁾.

Tab. 20.

9. La formule a été corrigée, mais non suffisamment. Lisez

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2bc+c-1} dx}{1+x^{2ac}} = \frac{\pi}{2ac} \operatorname{Cosec} \frac{2b+1}{2a} \cdot \pi, \quad 2a > 2b+1 > 0.$$

14. Les conditions sont $2a > 2b+1 > 0$.

¹⁾ Voyez B. d. H. Exposé pag. 228. ²⁾ Exposé pag. 229.

Tab. 21.

1 peut recevoir la forme

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^a} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(a - \frac{1}{2})}{\Gamma(a)}, \quad a > \frac{1}{2}.$$

3. On peut écrire

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(p+x^2)^{a+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(a + \frac{1}{2})}{p^{a+\frac{1}{2}} \Gamma(a+1)}, \quad p > 0.$$

7 est infinie.

10. Si l'on fait $x = y^{\frac{1}{a}}$, on aura $dx = \frac{1}{a} y^{\frac{1}{a}-1} dy$. Les limites restent les mêmes, or

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{b-1} dx}{(1+x^a)^c} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{b}{a}-1} dy}{(1+y)^c} = \frac{\Gamma(\frac{b}{a}) \Gamma(c - \frac{b}{a})}{a \Gamma(c)}, \quad c > \frac{b}{a}.$$

Cette formule paraît très différente de celle du texte, donnée par *EULER*, mais celle-ci peut être réduite à celle-là. En effet en multipliant les égalités

$$\left(1 - \frac{b}{a}\right) \Gamma\left(1 - \frac{b}{a}\right) = \Gamma\left(2 - \frac{b}{a}\right)$$

$$\left(2 - \frac{b}{a}\right) \Gamma\left(2 - \frac{b}{a}\right) = \Gamma\left(3 - \frac{b}{a}\right)$$

.

$$\left(c - 1 - \frac{b}{a}\right) \Gamma\left(c - 1 - \frac{b}{a}\right) = \Gamma\left(c - \frac{b}{a}\right)$$

et en chassant les facteurs communs on a

$$\left(1 - \frac{b}{a}\right) \left(2 - \frac{b}{a}\right) \dots \left(c - 1 - \frac{b}{a}\right) \Gamma\left(1 - \frac{b}{a}\right) = \Gamma\left(c - \frac{b}{a}\right)$$

et, en divisant par $\Gamma(c)$,

$$\left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(1 - \frac{b}{2a}\right)\left(1 - \frac{b}{3a}\right) \dots \left(1 - \frac{b}{(c-1)a}\right) \Gamma\left(1 - \frac{b}{a}\right) = \frac{\Gamma\left(c - \frac{b}{a}\right)}{\Gamma(c)}.$$

Par une formule connue on trouve enfin

$$\frac{\Gamma\left(\frac{b}{a}\right)\Gamma\left(c - \frac{b}{a}\right)}{a\Gamma(c)} = \left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(1 - \frac{b}{2a}\right) \dots \left(1 - \frac{b}{(c-1)a}\right) \cdot \frac{\pi}{a \sin \frac{b\pi}{a}}$$

ou la formule d'EULER. La fraction $\frac{1 - \frac{b}{a}}{\sin \frac{b\pi}{a}}$ devient

indeterminée pour $b = a$, mais la vraie valeur est alors $= \frac{1}{\pi}$.

Remarque. La démonstration précédente suppose $\frac{b}{a} < 1$, mais ma formule exige seulement $\frac{b}{a} < c$.

15. On trouve facilement

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1} dx}{(1+x^q)^2} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{p}{q}\right) \Gamma\left(2 - \frac{p}{q}\right).$$

La condition nécessaire est $2q > p > 0$.

Tab. 22.

9. Ajoutez $a > b > 0$.
 13. Mr B. d. H. révoque en doute la justesse de cette formule. Pourtant elle peut être déduite de l'intégrale (Tab. 20 N:o 13)

$$\int_0^\infty \frac{x^{r-1} dx}{1-x^s} = \frac{\pi}{s} \cot \frac{r\pi}{s}, \quad s > r > 0;$$

en posant $r = q - p$, $s = 2q$, on trouve

$$\int_0^\infty \frac{x^{q-p-1} dx}{1-x^{2q}} = \frac{\pi}{2q} \cot \frac{(q-p)\pi}{2q} = \frac{\pi}{2q} \operatorname{tg} \frac{p\pi}{2q}.$$

et

$$\int_0^1 \frac{x^{-p} dx}{x^q - x^{-q}} \cdot \frac{dx}{x} = -\frac{\pi}{2q} \operatorname{tg} \frac{p\pi}{2q}, \quad q > p.$$

C'est la formule de Cauchy.

16 est la même formule que Tab. 18 N:o 29.

Tab. 23.

7. La lettre a s'y est glissée par faute d'impression. Lisez

$$\frac{q^{p-1} - q^{-p}}{q-1} \cdot \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad p < 1.$$

13, 14. La première formule est étrange en ce qu'elle a un arc dont le Cosinus est plus grand que l'unité $\left(= \frac{p+q}{2\sqrt{pq}} \right)$, si p et q sont des quantités réelles. La chose s'éclaircit ainsi. Si dans l'intégrale connue

$$\int_0^\infty \frac{x^{r-1}}{(1+tx)^s} = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s-r)}{t^r \Gamma(s)}, \quad s > r$$

on pose $r = a$, $s = b$, $t = p$ et puis $t = q$, on trouve en additionnant et en soustrayant

$$J_1 = \int_0^\infty \frac{(1+px)^{-b} + (1+qx)^{-b}}{2} \cdot x^{a-1} dx = \frac{q^a + p^a}{2p^a q^a} \cdot \frac{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)}, \quad b > a$$

$$J_2 = \int_0^\infty \frac{(1+px)^{-b} - (1+qx)^{-b}}{2} \cdot x^{a-1} dx = \frac{q^a - p^a}{2p^a q^a} \cdot \frac{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)}, \quad b > a.$$

Si au contraire les lettres p et q désignent des complexes conjugués, soit

$$p = c(\cos \vartheta + i \sin \vartheta), \quad q = c(\cos \vartheta - i \sin \vartheta),$$

on aura

$$J_1 = \frac{\cos a\vartheta}{c^a} \cdot \frac{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)}, \quad J_2 = \frac{i \sin a\vartheta}{c^a} \cdot \frac{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)}, \quad b > a.$$

Ces formules sont celles du texte.

Tab. 24.

16. En posant $\frac{2b+1}{a} = \alpha$, $x = y^{\frac{1}{a}}$ on trouve

$$J = \int_0^{\infty} \frac{x^{2b}}{1+x^{2a}} \cdot \frac{dx}{1+x^{3a}} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \frac{y^{a-1} dy}{(1+y^2)(1+y^3)}$$

et puis, à l'aide de la formule (Tab. 20 N:o 1)

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{q-1}}{1+x^p} dx = \frac{\pi}{p \operatorname{Sin} \frac{q\pi}{p}}, \quad p > q > 0,$$

$$J = \frac{\pi}{4a} \left[\frac{1}{\operatorname{Sin} \frac{a\pi}{2}} + \frac{1}{\operatorname{Cos} \frac{a\pi}{2}} \right] + \frac{\pi}{6a} \left[\frac{1}{\operatorname{Sin} \frac{a\pi}{3}} - \frac{1}{\operatorname{Sin} \frac{(a+1)\pi}{3}} - \frac{1}{\operatorname{Sin} \frac{(a+2)\pi}{3}} \right],$$

$$\alpha < 1.$$

La valeur, donnée par Cauchy, s'obtient par quelques transformations, mais cela ne sert guère à rien. Une formule, alors mise en usage, mérite toutefois d'être notée, savoir

$$\operatorname{Sin} \frac{a\pi}{3} \cdot \operatorname{Sin} (\alpha+1)\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{Sin} (\alpha+2)\frac{\pi}{3} = \frac{1}{4} \operatorname{Sin} a\pi.$$

18. Je trouve

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{x}{p^2 p^2 + x^2} - \frac{x}{q^2 p^2 + x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \ell \frac{q^2}{p^2},$$

non $\frac{1}{2} \ell \frac{q}{p}$ comme dans le texte.

Tab. 25.

14 est provenue par une faute d'écriture. Lisez

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1-2x \operatorname{Cos} \frac{2a\pi}{b} + x^2} = \frac{\pi - \frac{2a\pi}{b}}{\operatorname{Sin} \frac{2a\pi}{b}} \quad b \geq 2a,$$

comme on peut voir par la formule N:o 2 de cette table.

17 à 20 se déterminent par quelques formules de M:r MIN-DING¹⁾.

Tab. 26.

5. Le facteur b manque dans le dénominateur de la valeur. Ajoutez $p^2 < 1$.
- 6 est fautive et superflue.
- 13 à 15 sont données par Poisson. M:r B. d. H. rend compte de la méthode dans son Exposé (pag. 224 et suiv.) et montre que l'équation auxiliaire toujours est d'un degré plus élevé que le dénominateur. Cela étant, le mieux est, ce me semble, de résoudre l'équation $x^6 + ax^4 + bx^2 + c = 0$ elle-même et puis décomposer la fraction.

Tab. 27.

1. Ajoutez $a > \frac{p}{2}$.
- 3, 4. Ajoutez $\frac{1}{2} > p > -\frac{1}{2}$.
- 13 aussi bien que quelques autres peut s'exprimer par la fonction $\Gamma(\dots)$. On trouve

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{(\Gamma(\frac{1}{4}))^2}{4\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = 1,85407468.$$

14. Ici se trouve une grave faute d'impression. Lisez

$$\int_0^{\infty} \frac{1-x}{(1+x^4)^{\frac{3}{4}}} dx = 0.$$

$$15. \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^6}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = 1,40218211.$$

$$17. \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^8}} = \frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = 1,25946352.$$

¹⁾ Voyez Integral-Tafeln, pag. 73.

$$18. \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^{12}}} = \frac{\Gamma(\frac{5}{12})\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = 1,15027393.$$

et en général

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^a)^{1/2}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{a})\Gamma(\frac{1+a}{a})}{\Gamma(\frac{1}{2})}, \quad a > 2.$$

$$20. \text{ Ajoutez } \frac{1}{2} > \frac{a}{b}.$$

21. Si $B(\dots)$ comme de coutume désigne l'intégrale Eulerienne de la première espèce, je ne peux pas obtenir la valeur, donnée par Plana. Je trouve plutôt

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt{1+x^q}} = \frac{\Gamma(\frac{p}{q})\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{p}{q})}{q\Gamma(\frac{1}{2})}, \quad \frac{1}{2} > \frac{p}{q} > 0.$$

22. Même remarque. Je trouve

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{q-p-1} dx}{\sqrt{1+x^q}} = \frac{\Gamma(1 - \frac{p}{q})\Gamma(\frac{p}{q} - \frac{1}{2})}{q\Gamma(\frac{1}{2})}, \quad 1 > \frac{p}{q} > \frac{1}{2}.$$

24, 25. Mr B. d. H. a déjà remarqué que ces formules ne valent qu'entre les limites 0 et 1. Ajoutez $b > a$.

Tab. 28.

$$23. \text{ La dérivée est } \frac{x^6 \sqrt{1 + (2 - 4p^2)x^2 + x^4}}{(1 + x^2)^5}.$$

Tab. 29.

7. Mr B. d. H. a déclaré que la valeur est fautive. La faute consiste en ce que le diviseur $2 \sin \frac{p\pi}{2}$ manque. En posant l'intégrale $= J$ et en subdivisant on aura

$$J = \int_{-\infty}^0 \frac{(-xi)^{p-1}}{1+x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{(-xi)^{p-1}}{1+x^2} dx.$$

Si dans celle-là on introduit $-x$ au lieu de x et qu'on met les puissances de i dehors, il viendra

$$J = [i^{p-1} + (-i)^{p-1}] \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{1+x^2}.$$

Parce qu'on a

$$\begin{aligned} i^{p-1} + (-i)^{p-1} &= e^{(p-1)\frac{\pi i}{2}} + e^{-(p-1)\frac{\pi i}{2}} = 2 \cos (p-1)\frac{\pi}{2} \\ &= 2 \sin \frac{p\pi}{2} \end{aligned}$$

et (Tab. 19 N:o 6)

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2 \sin \frac{p\pi}{2}}, \quad 2 > p > 0,$$

on trouvera

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-xi)^{p-1}}{1+x^2} dx = \frac{\pi[i^{p-1} + (-i)^{p-1}]}{2 \sin \frac{p\pi}{2}} = \pi$$

conformément à N:o 8.

9. Ajoutez $2 > p > 0$.

10 est la même que N:o 9, car $i^p + (-i)^p = 2 \cos \frac{p\pi}{2}$.

Tab. 31.

1. Il faut que nous considérions cette formule, puisque Mr B. d. H. en fait usage ci-après (Tab. 47 N:o 18). Elle est donnée sans aucune restriction par rapport à p , quoique cela soit nécessaire. Posons $x = 1 + y$: nous aurons (Tab. 18 N:o 2).

$$\int_1^{\infty} \frac{(x-1)^p}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{y^p dy}{1+y} = -\frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 > p > -1.$$

20. Voyez N:o 1.

24. La valeur est fautive. Lisez $\frac{\pi}{2q} \operatorname{tg} \frac{p\pi}{2q}$. Voyez Tab. 5 N:o 21.

Tab. 32.

$$1. \int_1^{\infty} \frac{(x-1)^{p-\frac{1}{2}}}{x} dx = \Gamma(\tfrac{1}{2}+p)\Gamma(\tfrac{1}{2}-p) = \frac{\pi}{\cos p\pi}, \quad \tfrac{1}{2} > p > -\tfrac{1}{2}$$

$$2. \int_1^{\infty} \frac{(x-1)^{p-\frac{1}{2}}}{x^2} dx = \Gamma(\tfrac{3}{2}-p)\Gamma(\tfrac{1}{2}+p) = \frac{(1-2p)\pi}{2 \cos p\pi}, \quad \tfrac{3}{2} > p > -\tfrac{1}{2}$$

$$3. \int_1^{\infty} \frac{(x-1)^{p+\frac{1}{2}}}{x^2} dx = \Gamma(\tfrac{1}{2}-p)\Gamma(\tfrac{3}{2}+p) = \frac{(1+2p)\pi}{2 \cos p\pi}, \quad \tfrac{1}{2} > p > -\tfrac{3}{2}.$$

$$11. \int_1^{\infty} \frac{(x^b-1)^{-\frac{a}{b}+c}}{x} dx = \frac{1}{b} \Gamma\left(\frac{a}{b}-c\right) \Gamma\left(1-\frac{a}{b}+c\right), \quad 1 > \frac{a}{b}-c > 0$$

$$= \frac{1}{b} \cdot \frac{\pi}{\sin\left(\frac{a}{b}-c\right)\pi} = \frac{(-1)^c}{b} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{a\pi}{b}}.$$

La dernière valeur vaut, si c est un nombre entier.

13. Ajoutez $q > 1$.

15. Je ne peux pas obtenir le resultat du texte, à moins que je ne pose $p + \frac{1}{2}$ au lieu de $p - \frac{1}{2}$. De la sorte je trouve

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x(x-1)^{p+\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{\cos p\pi}, \quad \tfrac{1}{2} > p > -\tfrac{1}{2}.$$

Tab. 34.

16. Si la dérivée est juste, l'intégrale est infinie. Du reste le développement en série semble inutile, puisque la fonction à intégrer peut être rendue rationnelle par un changement de la variable.

17. Le développement en série semble ni utile, ni juste. L'intégrale peut s'exprimer par une intégrale elliptique. Si l'on pose $x = p \sin^2 \varphi$, on aura

$$\int_0^p \frac{dx}{\sqrt{(p-x)(2bx-x^2)}} = \sqrt{\frac{2}{b}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{p}{2b} \sin^2 \varphi}} = \sqrt{\frac{2}{b}} E\left(\sqrt{\frac{p}{2b}}\right).$$

Si cependant on veut une série, on trouvera

$$\int_0^p \frac{dx}{\sqrt{(p-x)(2bx-x^2)}} = \frac{\pi}{\sqrt{2b}} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \left(\frac{1^{\nu/2}}{2^{\nu/2}}\right)^2 \left(\frac{p}{2b}\right)^{\nu},$$

non $\left(\frac{1^{\nu/2}}{2^{\nu/2}}\right)^{\nu-1}$ sous le signe de sommation.

Tab. 35:

2 J'aimerais mieux écrire

$$\int_0^{\frac{1}{p}} (1-p^2 x^2)^{q-\frac{1}{2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2p} \cdot \frac{\Gamma(q+\frac{1}{2})}{\Gamma(q+1)}.$$

4. Cette formule semble fort singulière, quand on n'est pas en mesure de consulter les mémoires cités. La suivante peut la remplacer:

$$\int_0^{\sqrt{1-p^2}} (x^2 + p^2)^{b+\frac{1}{2}} dx = \frac{\sqrt{1-p^2}}{2(b+1)} \sum_{\nu=0}^{\nu=b} \frac{(b+\frac{1}{2})_{\nu}}{b_{\nu}} p^{2\nu}$$

$$+ (b+\frac{1}{2})_{b+1} p^{2(b+1)} \frac{1+\sqrt{1-p^2}}{p}; \quad p \leq 1.$$

9. Lisez

$$b E\left(\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}}\right) \text{ au lieu de } \frac{1}{b} E\left(\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}}\right).$$

16, 17. Il faut les remplacer par les formules

$$\left. \begin{aligned} \int_r^\infty \frac{(y-r)^{p-1}}{y-q} dy &= \frac{\pi(r-q)^{p-1}}{\sin p\pi}, \quad r > q \\ \int_{-\infty}^r \frac{(r-y)^{p-1}}{q-y} dy &= \frac{\pi(q-r)^{p-1}}{\sin p\pi}, \quad r < q \end{aligned} \right\} 1 > p > 0$$

que Mr B. d. H. a données dans l'Exposé pag. 541.

22. Lisez $\sqrt{1+r^2}$ au lieu de $\sqrt{1-r^2}$.

Tab. 36.

11. Laplace a donné (en 1782) cette formule, mais à présent on l'écrit ainsi:

$$\int_0^\infty e^{-x^4} dx = \Gamma(\frac{5}{4}).$$

15. Je préfère la formule

$$\int_0^\infty e^{-x^{\frac{2}{1+\frac{2}{2a}}}} dx = \Gamma(a + \frac{3}{2})$$

16, 17 sont toutes deux infinies.

Tab. 37.

5 est fautive, comme j'ai autrefois¹⁾ démontré. Lisez

$$\int_0^\infty e^{-x^2+px} dx = e^{\frac{p^2}{4}} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\pi} + \int_0^{\frac{1}{2}p} e^{-y^2} dy \right].$$

Une table des valeurs de la dernière intégrale est donnée par Kramp dans son Analyse des réfractions astronomiques.

6 est fautive, ce qu'on peut faire voir comme il suit. Posons intégrale = J et introduisons $\cos px - i \sin px$ au lieu de e^{-pxi} : nous aurons

¹⁾ Voyez les Mémoires de l'Acad. roy. des sciences à Stockholm (Stockh. Handl.) Tom. V.

$$J = \int_0^{\infty} e^{-q^2 x^2} \cos p x dx - i \int_0^{\infty} e^{-q^2 x^2} \sin p x dx.$$

D'après la Tab. 280 N:o 4 et N:o 10 on a

$$\int_0^{\infty} e^{-q^2 x^2} \cos p x dx = e^{-\frac{p^2}{4q^2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2q} \dots\dots\dots (a)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-q^2 x^2} \sin p x dx = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2(\nu+1))} \cdot \frac{p^{2\nu+1}}{q^{2(\nu+1)}}, \dots\dots\dots (b)$$

or

$$J = \int_0^{\infty} e^{-(q^2 x^2 + p x i)} dx \\ = e^{-\frac{p^2}{4q^2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2q} - i \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2(\nu+1))} \cdot \frac{p^{2\nu+1}}{q^{2(\nu+1)}}.$$

La valeur donnée par MEYER est donc fautive non seulement en ce que le dernier terme manque, mais aussi parce qu'il a donné $\sqrt{\frac{\pi}{2q}}$ au lieu de $\frac{\sqrt{\pi}}{2q}$. Dans la Tab. 280 N:o 8 il donne la valeur fautive

$$\int_0^{\infty} e^{-q^2 x^2} \sin p x dx = 0$$

qui l'a probablement amené à la valeur fautive de l'intégrale J .

En différentiant la formule (a) par rapport à p , comme j'ai fait ailleurs, on peut avoir d'intégrales nouvelles. Si l'on différencie la formule (b), on trouve d'autres qui comprennent quelques intégrales de la Tab. 388 comme cas particuliers. D'abord on a

$$D_p^n \sin p x = x^n \sin \left(\frac{n\pi}{2} + p x \right)$$

ou en distinguant n pair d'avec n impair

$$D_p^{2m} \sin p x = (-1)^m x^{2m} \sin p x$$

$$D_p^{2m+1} \sin p x = (-1)^m x^{2m+1} \cos p x.$$

On voit facilement que la limite inférieure de la somme S en tout cas devient m et on trouve ainsi

$$\int_0^{\infty} x^{2m} e^{-q^2 x^2} \sin p x dx = \frac{1}{2} \sum_{\nu=m}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu-m} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu-2m+1)} \cdot \frac{p^{2\nu+1-2m}}{q^{2(\nu+1)}}$$

$$\int_0^{\infty} x^{2m+1} e^{-q^2 x^2} \cos p x dx = \frac{1}{2} \sum_{\nu=m}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu-m} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu-2m+1)} \cdot \frac{p^{2(\nu-m)}}{q^{2(\nu+1)}}$$

ou, en posant $\nu + m$ au lieu de ν ,

$$\int_0^{\infty} x^{2m} e^{-q^2 x^2} \sin p x dx = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu} \frac{\Gamma(m+\nu+1)}{\Gamma(2\nu+1)} \cdot \frac{p^{2\nu+1}}{q^{2(m+\nu+1)}}$$

$$\int_0^{\infty} x^{2m+1} e^{-q^2 x^2} \cos p x dx = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu} \frac{\Gamma(m+\nu+1)}{\Gamma(2\nu+1)} \cdot \frac{p^{2\nu}}{q^{2(m+\nu+1)}}$$

8 est fautive comme obtenue par la formule fausse N:o 5.

Tab. 38.

14. Lisez $e^{\pi x} + e^{-\pi x}$ au lieu de $e^{\pi x} + e^{-x}$.

Tab. 39.

10. Mr B. d. H. y a fait deux corrections et de cette manière il a trouvé

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{px} dx}{(1 + e^{2px})^2} = \frac{\pi + 2}{8p}.$$

En posant $e^{px} = y$ je trouve

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{px} dx}{(1 + e^{2px})^2} = \frac{\pi - 2}{8p}$$

qui est la vraie valeur.

11. M^r B. d. H. dit dans ses corrections que la valeur est $-\frac{1}{p}(1 - \mathfrak{I}2)$, mais en posant $e^{px} = y$ je trouve $+\frac{1}{p}(1 - \mathfrak{I}2)$ comme dans le texte.
12. On peut l'avoir comme il suit. Puisque

$$D_x \left(\frac{1}{(e^x + e^{-x})^{2p}} \right) = - \frac{2p(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^{2p+1}},$$

on obtient

$$\int_0^\infty \frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^{2p+1}} dx = \frac{1}{p \cdot 2^{2p+1}};$$

mais N^o 9 donne

$$\int_0^\infty \frac{e^x + e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^{2p+1}} dx = \frac{(\Gamma(p))^2}{4\Gamma(2p)};$$

par addition et soustraction on aura

$$\int_0^\infty \frac{e^x dx}{(e^x + e^{-x})^{2p+1}} = \frac{1}{p \cdot 2^{2p+2}} + \frac{(\Gamma(p))^2}{8\Gamma(2p)}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} dx}{(e^x + e^{-x})^{2p+1}} = -\frac{1}{p \cdot 2^{2p+2}} + \frac{(\Gamma(p))^2}{8\Gamma(2p)}.$$

La dernière ne se trouve point dans les tables.

Tab. 40.

2 n'est pas = 0, mais indéterminée.

Tab. 41.

1. Ajoutez $p < e^2$.
2. Je n'ai pas pu parvenir au résultat du texte, mais je trouve

$$\int_0^1 e^{-x^q} dx = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu}{(1+\nu q)\Gamma(\nu+1)}.$$

5. Mr B. d. H. a remarqué dans ses corrections que cette intégrale a la valeur $\frac{p^2-1}{q\Gamma p}$ pour $p < 1$, mais qu'elle devient infinie pour $p < 1$. Cela ne me semble pas ainsi, car en faisant $p = e$ (c'est à dire > 1) on trouve $\frac{e^2-1}{q}$, ce qui s'accord bien avec le texte.
- 7 est déduite moyennant un fort beau théorème de Cauchy. Elle vaut pour $p < 1$, mais la valeur pour $p > 1$ n'est pas donnée. Puisque on a $e^{xi} = \text{Cos } x + i \text{ Sin } x$, on peut écrire

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - pe^{xi}} = \int_0^{2\pi} \frac{(1-p \text{ Cos } x) dx}{1 - 2p \text{ Cos } x + p^2} + pi \int_0^{2\pi} \frac{\text{Sin } x dx}{1 - 2p \text{ Cos } x + p^2}.$$

Mr SERRET¹⁾ a démontré que pour $p < 1$ on a

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1-p \text{ Cos } x) dx}{1 - 2p \text{ Cos } x + p^2} = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \frac{1 - \frac{1}{p} \text{ Cos } x}{1 - \frac{2}{p} \text{ Cos } x + \frac{1}{p^2}} dx = 0$$

et toujours

$$\int_0^{2\pi} \frac{\text{Sin } x dx}{1 - 2p \text{ Cos } x + p^2} = 0.$$

Il s'ensuit que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - pe^{xi}} = 0 \text{ pour } p > 1.$$

Si p est $= 1$, l'intégrale est $= \pi$.

- 8, 9. Ohm a donné cette intégrale et Mr B. d. H. l'a traitée dans son Exposé (pag. 359). Tous les deux trou-

¹⁾ Voyez Calcul intégral pag. 144 et suiv.

vent l'intégrale $= 0$ pour $p < q$ et $= 2\pi$ pour $p > q$. Malgré cela la chose ne me semble pas entièrement décidée. Évidemment est

$$\frac{pe^{xi}}{pe^{xi} \pm qe^{ri}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{d}{dx} \mathcal{U}(pe^{xi} \pm qe^{ri})$$

or

$$\int_0^{2\pi} \frac{pe^{xi} dx}{pe^{xi} \pm qe^{ri}} = \frac{1}{2i} \cdot \int_0^{2\pi} \mathcal{U}(pe^{xi} \pm qe^{ri})^2 = \frac{1}{2i} \mathcal{U} \left(\frac{pe^{2\pi i} \pm qe^{ri}}{p \pm qe^{ri}} \right)^2 = 0$$

puisque $e^{2\pi i}$ est $= 1$. L'intégrale est donc $= 0$ indépendamment de p et q , supposées inégales. Si l'on a $p = q$ et qu'on prend le signe inférieure, la dérivée devient discontinue pour $x = r$, mais la valeur principale est $= 0$.

12. Il faut que p soit un nombre entier.

Tab. 42.

6 semble inexacte, parce que la dérivée est imaginaire dans toute l'espace de l'intégration. En plusieurs endroits (par ex. Tab. 273 N:o 1) se trouve la formule

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \mathcal{U} x dx = -A.$$

En faisant $e^{-x} = y$, nous aurons $x = \mathcal{U} \frac{1}{y}$, $dx = -\frac{dy}{y}$:
aux limites $x = 0$, $x = \infty$ répondent $y = 1$, $y = 0$ resp.
Par conséquent on aura

$$\int_0^1 \mathcal{U} \left(\mathcal{U} \frac{1}{y} \right) dy = -A.$$

C'est à mon avis la juste forme de l'intégrale en question.

7. Mr Ohm a-t-ici procédé, comme si les doubles parenthèses manqueraient, mais selon la notation de Cauchy on a

$$\mathcal{U}(x) = lx + 2\pi i^1).$$

On peut d'ailleurs faire d'autres objections contre cette formule.

Tab. 43.

3. Ajoutez $1 > p > 0$. L'expression la plus simple de la valeur est $\Gamma(1-p)$.
4. Il faut écrire

$$\int_0^1 \frac{dx}{\mathcal{U}\left(l\frac{1}{x}\right)} = 0.$$

Tab. 44.

2. Dans le texte le dénominateur est 2^{a-1} , mais M:r B. d. H. prétend qu'il doit être 2^a . Selon moi ce dénominateur est 2^{a+1} . Cela résulte de la formule incontestée

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{a+\frac{1}{2}} dx = \Gamma\left(a + \frac{3}{2}\right) = \frac{1^{a+1/2}}{2^{a+1}} \sqrt{\pi}.$$

- 5 est déduite de la Tab. 126 N:o 3. Toutes les deux sont infinies.
- 6 est en générale fautive, mais elle vaut pour $a < \frac{1}{2}$.

Tab. 45.

- 2, 3, 4. Toutes ces intégrales sont infinies. Elles ont été déduites de Tab. 142 N:o 8, 9, 7 resp. les quelles ne donnent pas les limites 0 et ∞ , mais 0 et 1.
- 6 est fautive non seulement en ce que le terme $\frac{1}{2}l\alpha^2$ existe, mais aussi parce qu'on a $\mathcal{U}(p)$ au lieu de $\mathcal{U}(e^p)$.
16. Lisez $\sqrt{\frac{\pi}{q}}$ au lieu de $\sqrt{\frac{\pi}{p}}$. Écrivons donc

¹⁾ Voyez B. d. H., Exposé pag. 184.

$$\int_0^{e^{-\frac{1}{q}}} \frac{dx}{\sqrt{q\left(\iota \frac{1}{x}\right) - 1}} = e^{-\frac{1}{q}} \sqrt{\frac{\pi}{q}}.$$

Tab. 46.

- 2 à 6. Toutes ces formules sont comprises en N:o 4 et 5.
 7. Une table, contenant les valeurs de la fonction $Z'(a)$ est ici et ailleurs fort commode. J'ai donné une telle table dans Kongl. Vetenskaps-Akademiens Handlingar (1864).

Peut-être il ne paraîtra pas superflu d'écrire ici les formules

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\operatorname{tg} \varphi} d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\iota(\sqrt{2} - 1) + \frac{\pi}{2} \right],$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[3]{\operatorname{tg} \varphi} d\varphi = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{3} - \iota 2 \right].$$

12. La valeur est $= \frac{\pi}{2} \operatorname{Cot} p\pi$, $p < 1$.
 14. La valeur admet la forme $-\frac{1}{2}[A + Z'(a + 1)]$.
 16 est fautive, mais autrement que M:r B. d. H. ne l'a dit (Il veut écarter le facteur $\frac{1}{2}$). Si l'on pose $x = \operatorname{Sin} 2y$ dans Tab. 5 N:o 2, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} [(\operatorname{Sin} 2y)^{p-1} - (\operatorname{Sin} 2y)^{-p}] \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + y \right) dy = \frac{\pi}{2} \operatorname{Cot} p\pi,$$

$$p < 1.$$

Telle est la juste forme de N:o 16, ce qui suit aussi de N:o 15 de cette table, en y posant $p - 1$ pour q et $-p$ pour p .

19. Puisque cette formule a subi plusieurs corrections, il ne sera peut-être inutile de la reproduire ici:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg}^p x + \operatorname{tg}^{-p} x) \sin 2x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{p}{e^{\frac{p\pi}{2}} - e^{-\frac{p\pi}{2}}}.$$

Tab. 47.

4. Mr B. d. H. dit dans les corrections qu'il faut introduire le facteur $\cos^4 x$ dans le dénominateur, mais il y en a tort. La formule du texte est donc juste, mais on peut écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x)^{2p-2}}{(\cos 2x)^p} dx = \frac{\Gamma(p - \frac{1}{2}) \Gamma(1-p)}{2\sqrt{\pi}}, \quad 1 > p > \frac{1}{2}.$$

18. En conséquence de la remarque au N:o 1 de la table 31 on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^q x dx}{\sin 2x (\cos x - \sin x)^q} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin 2x (\cot x - 1)^q} = \frac{\pi}{2 \sin q\pi},$$

$$1 > q > 0$$

- 21 est bien juste, mais la forme

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x (\cot x - 1)^p} = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 1 > p > 0$$

est plus simple.

Tab. 48.

- 6 est la même que N:o 7.
12, 13 sont toutes deux fautives. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} cx dx}{1 + \operatorname{Sin} 2x \operatorname{Cos} \frac{a\pi}{b}}$$

$$= -\frac{\operatorname{Cosec} \frac{a\pi}{b}}{2b} \sum_{\nu=0}^{\nu=b-1} (-1)^{\nu-1} \operatorname{Sin} \frac{\nu a\pi}{b} \left[Z' \left(\frac{b+c+\nu}{2b} \right) - Z' \left(\frac{c+\nu}{2b} \right) \right]$$

($a + b$ impair)

$$= -\frac{\operatorname{Cosec} \frac{a\pi}{b}}{b} \sum_{\nu=0}^{\nu=\frac{1}{2}(b-1)} (-1)^{\nu-1} \operatorname{Sin} \frac{\nu a\pi}{b} \left[Z' \left(\frac{b+c-\nu}{b} \right) - Z' \left(\frac{c+\nu}{b} \right) \right]$$

($a + b$ pair).

Tab. 49.

- 16 est juste, quoique Mr B. d. H. dise que le dénominateur doit être $\operatorname{Cos} x + \operatorname{Sin} x$. La formule est déduite de Tab. 5 N:o 2 où le dénominateur par une faute d'impression était $1 + x$ au lieu de $1 - x$. On a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^p x - \operatorname{tg}^{1-p} x}{\operatorname{Cos} x - \operatorname{Sin} x} \frac{dx}{\operatorname{Sin} x} = \pi \operatorname{Cot} p\pi, \quad 1 > p > 0.$$

- 18 dérive de Tab. 5 N:o 22, non de Tab. 31 N:o 24.

Tab. 50.

- 8 est déduite de Tab. 9 N:o 11.
 11. L'exposant doit être $p + \frac{1}{2}$ au lieu de $p - \frac{1}{2}$.
 16. Il est dit que cette formule dérive de Tab. 192 N:o 6. Je n'ai pas pu trouver la valeur donnée par BESSEL. Si l'on pose

$$J = \int_0^1 (1 - x^2)^{a-\frac{1}{2}} \operatorname{Cos} px dx$$

et qu'on développe $\operatorname{Cos} px$ en série, il vient

$$J = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu p^{2\nu}}{\Gamma(2\nu+1)} \int_0^1 x^{2\nu} (1-x^2)^{a-\frac{1}{2}} dx.$$

En faisant $x = y^{\frac{1}{2}}$ nous aurons

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu p^{2\nu}}{\Gamma(2\nu+1)} \int_0^1 y^{\nu-\frac{1}{2}} (1-y)^{a-\frac{1}{2}} dy \\ &= \frac{1}{2} \Gamma(a + \frac{1}{2}) \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu p^{2\nu} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(2\nu+1) \Gamma(a + \nu + 1)}; \end{aligned}$$

mais d'après une formule connue on trouve

$$\frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(2\nu+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\nu} \Gamma(\nu+1)}$$

et par conséquent

$$J = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma(a + \frac{1}{2}) \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{p}{2}\right)^{2\nu}}{\Gamma(\nu+1) \Gamma(a + \nu + 1)}.$$

Ce résultat s'accorde avec une formule donnée par Mr SCHLÖMILCH¹⁾, mais non avec celle de BESSEL. La formule Tab. 192 N:o 6 est donc fautive. Si dans J on pose $\operatorname{tg} x$ au lieu de x , on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos 2x)^{a-\frac{1}{2}} \cos(p \operatorname{tg} x)}{\cos^{2a+1} x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma(a + \frac{1}{2}) \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{p}{2}\right)^{2\nu}}{\Gamma(\nu+1) \Gamma(a + \nu + 1)}.$$

C'est la vraie valeur de l'intégrale dont il s'agit.

Tab. 51.

6 est déduite de la formule fautive Tab. 12 N:o 14. Lisez

¹⁾ Voyez Analytische Studien I pag. 150.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} \sqrt{\frac{\cos^2 x - p^2 \sin^2 x}{\cos^2 x}} \cdot dx = E(p).$$

8. Voyez la remarque à le Tab. 12 N:o 18.

9, 10 sont exactes, si $\frac{3}{2} > b$, mais autrement fautives. Otez le facteur $(-1)^{b-1}$.

13 est du reste exacte, mais le numerateur doit être $(\cos x - \sin x)^{p+\frac{1}{2}}$ et $p < \frac{1}{2}$. Lisez donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)^{p+\frac{1}{2}}}{\sin^{p+\frac{1}{2}} x \cos^2 x} \cdot dx = \frac{(p+\frac{1}{2})\pi}{\cos p\pi}, \quad p < \frac{1}{2}.$$

14. Même remarque. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)^{p-\frac{1}{2}}}{\sin^{p+\frac{1}{2}} x \cos x} \cdot dx = \frac{\pi}{\cos p\pi}, \quad p < \frac{1}{2}.$$

Tab. 52.

12, 13 sont déduites de Tab. 12 N:o 7, 8, non de N:o 6, 7. Le signe de la valeur en celle-ci est vicieux. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{p-\frac{1}{2}} x}{(\cos x - \sin x)^{p-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1-2p}{2} \cdot \frac{\pi}{\cos p\pi}, \quad p < \frac{1}{2}.$$

17. Écrivons plutôt

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{p-\frac{1}{2}} x}{(\cos x - \sin x)^{p+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{dx}{\cos x} = \pi \operatorname{Sec} p\pi, \quad p < \frac{1}{2}.$$

18 est fautive avec Tab. 16 N:o 8 dont elle dérive.

19 est déduite de Tab. 9 N:o 14 et sa justesse est par cette raison douteuse. Au reste la substitution de $\operatorname{tg} x$ au lieu de x semble incorrecte.

Tab. 53.

19, 20, 22, 23 sont superflues.

24 puisque plusieurs formules du même genre manquent. je les donne ici.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Sin}^{2a} 2b x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(a + \frac{1}{2})}{\Gamma(a + 1)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Cos}^{2a} 2b x dx.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Sin}^{2a} (2b + 1)x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(a + \frac{1}{2})}{\Gamma(a + 1)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Cos}^{2a} (2b + 1)x dx.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Sin}^{2a+1} 2b x dx = \frac{1 - (-1)^b}{2b} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(a + 1)}{\Gamma(a + \frac{3}{2})}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Sin}^{2a+1} (2b + 1)x dx = \frac{1}{2b + 1} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(a + 1)}{\Gamma(a + \frac{3}{2})}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Cos}^{2a+1} 2b x dx = 0.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Cos}^{2a+1} (2b + 1)x dx = \frac{(-1)^b}{2b + 1} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(a + 1)}{\Gamma(a + \frac{3}{2})}.$$

Tab. 54 55, 56.

Il y a quelques intégrales de la forme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Sin}^{\alpha} x \operatorname{Sin}^{\beta} x dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Sin}^{\alpha} x \operatorname{Cos}^{\beta} x dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos } ^ax \text{ Sin } ^\beta x dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos } ^ax \text{ Cos } ^\beta x dx$$

où a et β sont des nombres entiers.

Avant que je parcoure chacune de ces tables, je déduirai ces intégrales dont M^r B. d. H. dit dans son Exposé (pag. 242 et suiv.) que quelques-unes sont indéterminées, si ce n'est que certaines conditions sont remplies. Je ne suis point de même avis. C'est bien vrai qu'un terme quelquefois devient $= \frac{0}{0}$ ou indéterminé, mais alors la méthode ordinaire donne sa vraie valeur comme on peut voir aussi par des exemples particuliers. Nous distinguerons les cas que a et β sont pairs et impairs

Les intégrales sont déduites à l'aide des formules¹⁾

$$\text{Cos } ^{2c}x = \frac{1}{2^{2c-1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=c-1} (2c)_\nu \text{Cos } 2(c-\nu)x + \frac{(2c)_c}{2^{2c}}$$

$$\text{Cos } ^{2c+1}x = \frac{1}{2^{2c}} \sum_{\nu=0}^{\nu=c} (2c+1)_\nu \text{Cos } (2c-2\nu+1)x.$$

Les intégrales contenant des puissances de Sinus dérivent de celles en lesquelles entrent des puissances de Cosinus.

$$1. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin } 2ax \text{ Cos } ^{2c}x dx = \frac{1 - (-1)^a}{a} \cdot \frac{(2c)_c}{2^{2c+1}} \\ + \frac{a}{2^{2c}} \sum_{\nu=0}^{\nu=c-1} \frac{(2c)_\nu [1 - (-1)^{a+c-\nu}]}{(a+c-\nu)(a-c+\nu)}.$$

Si $a - c + \nu$ est $= 0$, le terme correspondant de la somme est zéro.

¹⁾ MINDING, Integral-Tafeln pag. 115.

$$\begin{aligned}
 2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2ax \sin^{2c} x dx &= \frac{1 - (-1)^a}{a} \cdot \frac{(2c)_c}{2^{2c+1}} \\
 &\quad - \frac{(-1)^a a}{2^{2c}} \sum_{\nu=0}^{r=c-1} \frac{(2c)_\nu [1 - (-1)^{a+c-\nu}]}{(a+c-\nu)(a-c+\nu)}
 \end{aligned}$$

Même remarque qu'au N:o 1.

$$\begin{aligned}
 3. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2ax \cos^{2c+1} x dx \\
 = \frac{a}{2^{2c-1}} \sum_{\nu=0}^{r=c} \frac{(2c+1)_\nu}{(2a+2c-2\nu+1)(2a-2c+2\nu-1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2ax \sin^{2c+1} x dx \\
 = \frac{(-1)^{a-1} a}{2^{2c-1}} \sum_{\nu=0}^{r=c} \frac{(2c+1)_\nu}{(2a+2c-2\nu+1)(2a-2c+2\nu-1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin (2a+1)x \cos^{2c} x dx &= \frac{(2c)_c}{(2a+1)2^{2c}} \\
 &\quad + \frac{2a+1}{2^{2c-1}} \sum_{\nu=0}^{r=c-1} \frac{(2c)_\nu}{(2a+2c-2\nu+1)(2a-2c+2\nu+1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos (2a+1)x \sin^{2c} x dx &= (-1)^a \frac{(2c)_c}{(2a+1)2^{2c}} \\
 &\quad + (-1)^a \frac{2a+1}{2^{2c-1}} \sum_{\nu=0}^{r=c-1} \frac{(2c)_\nu}{(2a+2c-2\nu+1)(2a-2c+2\nu+1)}
 \end{aligned}$$

$$7. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin (2a+1)x \cos^{2c+1}x dx$$

$$= \frac{1}{2^{2(c+1)}} \sum_{\nu=0}^{\nu=c} (2c+1)_{\nu} \frac{[2a+1 - (-1)^{a+c-\nu}(2c-2\nu+1)]}{(a+c-\nu+1)(a-c+\nu)}$$

Cette formule vaut pour $a > c$ et aussi pour $a \leq 0$, pourvu que l'on fasse la fraction

$$\frac{2a+1 - (-1)^{a+c-\nu}(2c-2\nu+1)}{(a+c-\nu+1)(a-c+\nu)} \text{ égale à } \frac{2}{2a+1}, \text{ lorsque } \nu$$

est $= c - a$.

$$8. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos (2a+1)x \sin^{2c+1}x dx$$

$$= \frac{(-1)^a}{2^{2(c+1)}} \sum_{\nu=0}^{\nu=c} (2c+1)_{\nu} \frac{[2a+1 - (-1)^{a+c-\nu}(2c-2\nu+1)]}{(a+c-\nu+1)(a-c+\nu)}$$

Même restriction qu'au N:o 7.

$$9. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2ax \cos^{2c}x dx = 0 \text{ pour } a > c$$

$$= \frac{\pi}{2^{2c+1}} \cdot (2c)_{c-a} \text{ pour } a \leq c$$

$$10. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2ax \sin^{2c}x dx = 0 \text{ pour } a > c$$

$$= \frac{(-1)^a \cdot \pi}{2^{2c+1}} \cdot (2c)_{c-a} \text{ pour } a \leq c$$

$$11. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2ax \cos^{2c+1}x dx$$

$$= \frac{1}{2^{2c}} \sum_{\nu=0}^{\nu=c} \frac{(-1)^{a+c+\nu+1}(2c-2\nu+1)(2c+1)_{\nu}}{(2a+2c-2\nu+1)(2a-2c+2\nu-1)}$$

$$12. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2ax \sin^{2c+1} x dx$$

$$= \frac{1}{2^{2c}} \sum_{\nu=0}^{\nu=c} \frac{(-1)^{c+\nu+1} (2c-2\nu+1)(2c+1)_{\nu}}{(2a+2c-2\nu+1)(2a-2c+2\nu-1)}$$

$$13. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos (2a+1)x \cos^{2c} x dx = \frac{(-1)^a (2c)_c}{(2a+1) \cdot 2^{2c}}$$

$$+ \frac{2a+1}{2^{2c-1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=c-1} \frac{(-1)^{a+c+\nu} (2c)_{\nu}}{(2a+2c-2\nu+1)(2a-2c+2\nu+1)}$$

$$14. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin (2a+1)x \sin^{2c} x dx = \frac{(2c)_c}{(2a+1) \cdot 2^{2c}}$$

$$+ \frac{2a+1}{2^{2c-1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=c-1} \frac{(-1)^{c+\nu} (2c)_c}{(2a+2c-2\nu+1)(2a-2c+2\nu+1)}$$

$$15. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos (2a+1)x \cos^{2c+1} x dx = 0 \dots\dots\dots \text{pour } a > c$$

$$= \frac{\pi}{2^{2(c+1)}} (2c+1)_{c-a} \dots\dots\dots \text{pour } a \leq c$$

$$16. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin (2a+1)x \sin^{2c+1} x dx = 0 \dots\dots\dots \text{pour } a > c$$

$$= \frac{(-1)^a \pi}{2^{2(c+1)}} \cdot (2c+1)_{c-a} \dots\dots \text{pour } a \leq c.$$

Tab. 54.

6 devient à mon avis plus facile à concevoir, si l'on écrit

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a} x \sin p x dx = \frac{(2a)_a}{2^{2a}} \cdot \frac{1 - \cos \frac{p\pi}{2}}{p} \\
& + \frac{(-1)^a - 1}{2^{2a-1}} \sum_{r=0}^{r=a-1} \frac{(-1)^r (2a)_r \left[1 - (-1)^{a-r} \cos \frac{p\pi}{2} \right]}{4(a-r)^2 - p^2}. \\
7. \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a+1} x \sin p x dx = \frac{p \cos \frac{p\pi}{2}}{2^{2a}} \sum_{r=0}^{r=a} \frac{(2a+1)_r}{(2a-2r+1)^2 - p^2}. \\
13. \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a} x \cos p x dx = \frac{\sin \frac{p\pi}{2}}{2^{2a}} \left[\frac{1}{2p} - p \sum_{r=0}^{r=a-1} \frac{(2a)_r}{4(a-r)^2 - p^2} \right]. \\
14. \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a+1} x \cos p x dx \\
& = \frac{1}{2a} \sum_{r=0}^{r=a} \frac{(2a+1)_r \left[(-1)^{a-r} (2a-2r+1) - p \sin \frac{p\pi}{2} \right]}{(2a-2r+1)^2 - p^2}.
\end{aligned}$$

15. est la même que Tab. 55 N:o 13.

Tab. 55.

$$\begin{aligned}
4. \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2a} x \sin p x dx = \frac{(2a)_a}{2^{2a}} \cdot \frac{1 - \cos \frac{p\pi}{2}}{p} \\
& - \frac{p}{2^{2a-1}} \sum_{r=0}^{r=a-1} \frac{(2a)_r \left[1 - (-1)^{a-r} \cos \frac{p\pi}{2} \right]}{4(a-r)^2 - p^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2a+1} x \sin p x dx \\
 = \frac{1}{2^{2a}} \sum_{r=0}^{r=a} \frac{(2a-1)_r \left[-p + (-1)^{a-r} (2a-2r+1) \sin \frac{p\pi}{2} \right]}{(2a-2r+1)^2 - p^2}.
 \end{aligned}$$

12. Mr B. d. H. dit qu'il faut avoir $a > b$; il faut plutôt que le nombre a est $> 2(b-1)$.

Du reste voyez Tab. 54--56 form (9) et (11) ci-dessus.

16 à 18 sont traitées auparavant. Il n'est pas nécessaire que $a > b$. Voyez Tab. 54--56 form (9) et (15) ci-dessus.

21. Je crois qu'il faut préférer la formule que Mr B. d. H. a donnée dans son Exposé (pag. 306), à savoir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+2a} x \cos p x dx = \frac{\pi}{2^{2a+p+1}} \cdot \frac{p^{a/1}}{1^{a/1}} \cdot \sum_{r=0}^{r=a} \frac{(a+r)^{2r/1}}{1^{r/1} \cdot (a+p-1)^{r/1}}.$$

Tab. 56.

Toutes les formules de cette table sont comprises dans la formule générale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^m (\sin x)^n dx = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n}{2} + 1\right)}, \quad \begin{aligned} m+1 > 0 \\ n+1 > 0 \end{aligned}$$

Parce qu'aucunes conditions pour la validité des formules de la table ne sont indiquées, le plus sûr est d'appliquer la formule ci-dessus dans les cas particuliers.

Tab. 57.

Les dix huit premières formules sont contenues en N:o 9 et 10, savoir

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x \cos (p+q)x dx &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \cos \frac{p\pi}{2} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x \sin (p+q)x dx &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \sin \frac{p\pi}{2} \end{aligned} \right\} 2 > p > 0.$$

Même remarque qu'à la table précédente.

Tab. 58.

1. Par Tab. 55 N:o 21 ci-dessus on trouve une formule qui peut remplacer N:o 1. En intégrant par parties on aura

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+2a} x \sin px \operatorname{tg} x dx \\ = \frac{p\pi}{(p+2a) \cdot 2^{2a+p+1}} \cdot \frac{p^{a/1}}{1^{a/1}} \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(a+r)^{2r/1-1}}{1^{r/1} \cdot (a+p-1)^{r/1-1}}. \end{aligned}$$

- 4 à 7. Mr B. d. H. a dit qu'elles ne valent que pour $c=0$. Je pense que N:o 4 et N:o 7 valent pour $c=1$ et N:o 5 et N:o 6 pour $c=0$, mais il faut qu'on calcule les intégrales résultantes séparément.

Tab. 59.

- 7, 12 à 15 sont infinies, comme déduites d'intégrales $=\infty$.

Tab. 60.

- 2 dérive de Tab. 192 N:o 1 en y posant $x = \sin y$. Alors on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2y \sin (a \sin y) dy = \frac{2}{a^2} (\sin a - a \cos a).$$

Si l'on y fait $a = b\pi$ (b entier), il vient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2y \sin (b\pi \sin y) dy = -\frac{2 \cos b\pi}{b\pi} = \frac{2(-1)^{b-1}}{b\pi}.$$

La formule corrigée n'est donc tout à fait juste.

3. La juste formule est

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2y \sin (b\pi \cos y) dy = -\frac{2 \cos b\pi}{b\pi} = \frac{2(-1)^{b-1}}{b\pi}.$$

4 est juste après la correction que M: B. d. H. y a faite, mais la fonction $Si(p)$ peut remplacer la série infinie.

6 est $= \infty$ avec Tab. 212 N:o 5.

7 est fautive, comme déduite de Tab. 212 N:o 14 quelle est infinie, à moins que a ne soit égale à l'unité. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin (p \cot y) \operatorname{tg} y dy = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-p}).$$

8 est fautive. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos (p \cot y) \operatorname{tg} y dy = \frac{\pi}{2}e^{-p}.$$

9 est fautive, comme déduite de Tab. 192 N:o 4 avant que celle-ci ait été corrigée.

10 vaut pour $p = 1$ et $p = 2$. Voyez Tab. 204 N:o 14.

11. Ajoutez $1 > p > -1$.

Tab. 61.

10 est déduite de Tab. 205 N:o 25 en posant $q = p$, $x = p \operatorname{tg} y$. En conséquence il faut être

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \left(\frac{a\pi}{2} - p \operatorname{tg} y \right) \operatorname{tg} y dy = \frac{\pi}{2}e^{-p}.$$

Tab. 62.

4, 5, 7, 8 sont déduites de Tab. 12 N:o 19 et 20 et valent si $b < \frac{3}{2}$. Posons $x = \cos \varphi$: il viendra

$$\left. \begin{aligned} \text{N:o 4} \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2a-1} \varphi d\varphi}{\sin^{2b-2} \varphi} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(\frac{3}{2}-b)}{2\Gamma(a-b+\frac{3}{2})} \\ \text{N:o 5} \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2a} \varphi d\varphi}{\sin^{2b-2} \varphi} = \frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2}-b)}{2\Gamma(a-b+2)} \end{aligned} \right\} b < \frac{3}{2}$$

ou en écrivant $b+1$ au lieu de b

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2a-1} \varphi d\varphi}{\sin^{2b} \varphi} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(\frac{1}{2}-b)}{2\Gamma(a-b+\frac{1}{2})} \\ & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2a} \varphi d\varphi}{\sin^{2b} \varphi} = \frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-b)}{2\Gamma(a-b+1)} \end{aligned} \right\} b < \frac{1}{2}.$$

Si dans ces formules on change φ contre $\frac{\pi}{2} - \varphi$, on aura N:o 8 et 9.

Le facteur $(-1)^b$ se trouve dans le texte sans de bonnes raisons.

Tab. 63.

2. Cette formule est également difficile à concevoir que Tab. 356 N:o 4 dont elle est tirée. D'abord je vais chercher celle-ci que je désigne par J . Alors nous avons

$$J = \int_0^{2\pi} \cos ax \sin \frac{1}{4} x dx$$

et en faisant $x = 4y$ nous obtiendrons

$$J = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos } 4ay \text{ Sin } y dy.$$

Intégration par parties donne

$$\int \text{Cos } 4ay \text{ Sin } y dy = \frac{\text{Sin } 4ay}{4a} \text{ Sin } y - \frac{1}{4a} \int \text{Sin } 4ay \text{ Cot } y dy.$$

Puisque le terme intégré s'évanouit pour les deux limites, nous aurons

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos } 4ay \text{ Sin } y dy = - \frac{1}{4a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin } 4ay \text{ Cot } y dy$$

et

$$J = - \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin } 4ay \text{ Cot } y dy.$$

À plus d'une manière on peut montrer que $\frac{\text{Sin } 4ay \text{ Cos } y}{\text{Sin } y}$
 $= 1 + 2 \text{ Cos } 2y + 2 \text{ Cos } 4y + \dots + 2 \text{ Cos } 2(2a - 1)y$
 $+ \text{Cos } 4ay$; or on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos } 2by dy = 0$$

et par conséquent

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin } 4ay \text{ Cot } y dy = \frac{\pi}{2}$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos } ax \text{ Sin } \frac{1}{4} x dx = - \frac{\pi}{2a}.$$

11 est = ∞ comme Tab. 21 N:o 7 dont elle est tirée.

Tab. 64.

- 5, 6, 7, 9 sont déduites de Tab. 31 N:o 1 et 5 où les conditions nécessaires sont exposées.
 8 dérive de Tab. 24 N:o 9 où l'on a fait $g = a$, $h = b$, $b = c = 1$. La formule devient

$$\int_0^{\infty} \frac{a + bx^2}{1 + x^2} \cdot \frac{dx}{1 - x^2} = (a - b) \frac{\pi}{4}.$$

En faisant ici $x = \operatorname{tg} \varphi$ on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a + b \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a \operatorname{Cos}^2 \varphi + b \operatorname{Sin}^2 \varphi}{\operatorname{Cos} 2\varphi} d\varphi = (a - b) \frac{\pi}{4}.$$

La formule du texte devient donc juste, si l'on met le facteur $\operatorname{Cos}^2 x$ dans le numérateur, non dans le dénominateur, comme M:r B. d. H. dit dans ses corrections.

Tab. 66.

- 9 est fautive. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Sin} x dx}{1 - \operatorname{Cos}^2 \lambda \operatorname{Sin}^2 x} = \frac{\pi - 2\lambda}{\operatorname{Sin} 2\lambda}.$$

19. Ajoutez $1 > r > 0$.
 21, 22. Je les écris ici, puisque on s'égare aisément à cause des corrections.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Sin} 2x dx}{a^2 \operatorname{Sin}^2 x + \operatorname{Cos}^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Sin} 2x dx}{a^2 \operatorname{Cos}^2 x + \operatorname{Sin}^2 x} = \frac{2\lambda}{a^2 - 1}.$$

Tab. 67.

- 4 est fautive. La juste valeur est

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Sin} 2x \operatorname{Cos} x dx}{(1 - \operatorname{Cos}^2 \lambda \operatorname{Sin}^2 x)^2} = \frac{\pi - 2\lambda - \operatorname{Sin} 2\lambda}{\operatorname{Sin} 2\lambda \operatorname{Cos}^2 \lambda}$$

laquelle on peut avoir sans Tab. 66 N:o 9.

21. Deux signes sont faux: lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x dx}{(p^2 \cos^2 x + q^2 \sin^2 x)^4} = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{5q^6 + p^2 q^4 - p^4 q^2 - 5p^6}{p^4 q^4}.$$

Tab. 68.

17 ne peut pas être obtenue par Tab. 31 N:o 24, mais je l'ai trouvée par Tab. 5 N:o 22.

25. Il y en a plusieurs fautes. D'abord l'exposant q doit être changé contre 2, mais cela ne suffit point. Selon qu'on pose $x = \operatorname{tg} q$ ou $x = \operatorname{tg}^2 \psi$, on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\operatorname{tg}^{\frac{p}{2}} q - \operatorname{Cot}^{\frac{p}{2}} q \right)^2}{(\cos q - \sin q)^2} dq = 2(1 - p\pi \operatorname{Cot} p\pi), \quad 1 > p > -1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{tg}^{p\psi} - \operatorname{Cot}^{p\psi})^2}{(\cos 2\psi)^2} \sin 2\psi d\psi = 2(1 - p\pi \operatorname{Cot} p\pi), \quad 1 > p > -1.$$

27. Mr B. d. H. a corrigé deux fautes ici; l'une semble être une faute d'impression (en membre droit il faut lire $1 - q$ au lieu de $1 - a$); l'autre est une faute en la formule originale de Mr SCHLÖMILCH. Après les corrections on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2a} x \operatorname{Cot}^p x dx}{(1 - q \cos^2 x)^{a+1}} = \frac{(p+1)^{a/2}}{2^{a/2}} \cdot \frac{\pi \operatorname{Sec} \frac{1}{2} p\pi}{2(1-q)^{a+\frac{1}{2}(p+1)}} \quad \begin{matrix} 1 > p > -1 \\ 1 > q > -1 \end{matrix}.$$

Tab. 69.

5 à 6. Au lieu de $p^2 < 1$ lisez $q^2 < 1$.

Tab. 70.

3, 4, 11 à 13. Toutes ces formules sont fautives, puisqu'elles dérivent de fautives formules.

5 à 6. À droite lisez q au lieu de p .

14. Il est indiqué que cette intégrale est déduite de Tab. 206 N:o 20. Mr B. d. H. traite celle-ci dans son Exposé pag. 676, mais il ne dit pas que la quantité q qui s'y trouve doit être négative. Cela est nécessaire, parce que la fonction $f(x)$ autrement devient infinie contre l'hypothèse. Si dans la formule de Mr B. d. H. (pag. 675 LXVII)

$$\int_0^{\infty} \frac{f(x) + f(-x)}{r^2 - x^2} \cdot r dx = \frac{\pi i}{2} [f(r) - f(-r)]$$

on pose

$$f(x) = x^{a-1} e^{-pxi} = x^{a-1} (\cos px - i \sin px) \quad (p > 0)$$

il viendra

$$f(-x) = -x^{a-1} [\cos (a\pi + px) + i \sin (a\pi + px)]$$

$$f(x) + f(-x) = 2x^{a-1} \left(\sin \frac{a\pi}{2} - i \cos \frac{a\pi}{2} \right) \sin \left(\frac{a\pi}{2} + px \right)$$

$$f(r) - f(-r) = 2r^{a-1} \left(\cos \frac{a\pi}{2} + i \sin \frac{a\pi}{2} \right) \cos \left(\frac{a\pi}{2} + pr \right).$$

En mettant cela dans la formula, on trouvera après quelque reduction

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1} \sin \left(\frac{a\pi}{2} + px \right)}{r^2 - x^2} dx = -\frac{\pi}{2} r^{a-2} \cos \left(\frac{a\pi}{2} + pr \right). \quad (a)$$

Cette formule s'accorde avec Tab. 206 N:o 20, si l'on change r, p avec $q, -p$

En posant $a = 2, r = 1$, la formule (a) donne

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin px}{1 - x^2} dx = + \frac{\pi}{2} \cos (\pi + p) = - \frac{\pi}{2} \cos p$$

conformément à Tab. 206 N:o 1 et Tab. 204 N:o 22.

En y faisant $x = \operatorname{tg} y$ on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} y \sin (p \operatorname{tg} y)}{\cos 2y} dy = -\frac{\pi}{2} \cos p$$

ou Tab. 70 N:o 5, non N:o 14 laquelle est fautive
 16, 17 sont déduites de Tab. 212 N:o 14 et 15, avant
 qu'elles aient été corrigées. Cependant elles sont infinies,
 à moins que a ne soit égale à l'unité. Mais en ce cas
 elles se changent den N:o 12 et 13 et deviennent inutiles.
 Par celles-ci on peut avoir des formules propres à rem-
 placer les formules fautives Tab. 70 N:o 16 et 17. En
 posant $x = \operatorname{tg} y$, $q = 1$ dans les dites formules on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin (p \operatorname{tg} y) \cot y dy = \frac{\pi}{2} (1 - e^{-p})$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos (p \operatorname{tg} y)) \cot^2 y dy = \frac{\pi}{2} [p - 1 + e^{-p}].$$

La dernière est précisément N:o 19.

20. Par la formule indiquée je trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\cos (\operatorname{tg} y)}{\cos^2 y} \right) \frac{dy}{\operatorname{tg} y} = A.$$

La formule du texte est donc fautive.

Tab. 71.

- 3, 4, 8, 9, 12, 13 sont infinies.
 14 est fautive. Voyez Tab. 70 N:o 14 ci-dessus.
 15. Lisez $\sin 2q$ au lieu de $\sin 2p$.
 16. Écrivons plutôt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin (p \sin x) \cot x dx = Si(p)$$

- 17 provient de Tab. 192 N:o 4, avant qu'elle ait été corrigée.
 Elle est donc fautive.

- 24 provient de Tab. 204 N:o 15 en y posant $x = \text{Cot } y$ et puis $p = 1$, $p = 0$ et en additionnant les résultats.

Tab. 72.

3. Le nombre q peut être $= 1$. En ce cas l'intégrale est $= \frac{1}{2}$.
 5. Le dernier terme est $-\frac{1-q^2}{3q^2}F(q)$.
 7. Otez le facteur $\text{Cos } 2\lambda \text{ Cosec } \lambda$.
 8 est juste, mais puisqu'elle est la différence des formules N:o 3 et N:o 6, elle doit peut-être s'écrire ainsi:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin } x \text{ Cos } 2x \sqrt{1-q^2 \text{ Sin } 2x} dx = \frac{1+q^2}{8q^2} - \frac{(1-q^2)^2}{16q^3} \text{I} \frac{1+q}{1-q}, q < 1.$$

Elle vaut pour $q = 1$ et alors l'intégrale est $= \frac{1}{4}$.

- 11 est fautive, comme déduite de Tab. 12 N:o 14. Mr B. d. H. pose $\text{Cos } x$ au lieu de x ; si au contraire on met $\text{Sin } x$ pour x , on voit à l'instant que l'intégrale est $= E(p)$.
 12 dérive de Tab. 9 N:o 14 et le même en est à dire.

Tab. 73.

- 5 est déduite de Tab. 27 N:o 14, avant qu'elle ait été corrigée. Au lieu de N:o 5 lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos } x - \text{Sin } x}{\sqrt{(1-2 \text{ Sin } 2x \text{ Cos } 2x)^3}} dx = 0.$$

- 15 à 18 sont tirées de Tab. 32 N:o 3 et 1 où les conditions de leur validité sont indiquées.

Tab. 74.

3. Mr B. d. H. y a fait des corrections, mais puisque elles ne me semblaient parfaitement claires, j'ai évalué l'intégrale de nouveau et j'ai trouvé

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt{a-b \cos x}} = \frac{2a}{b\sqrt{a+b}} \left\{ F(k_1) - E\left(\frac{\pi}{4}, k_1\right) \right\} \\ - \frac{2\sqrt{a+b}}{b} \left\{ E'(k_1) - E\left(\frac{\pi}{4}, k_1\right) \right\}$$

$$\text{où } k_1 = \sqrt{\frac{2b}{a+b}}, \quad a > b.$$

6 n'est pas tirée de Tab. 13 N:o 9 selon l'indication, mais de Tab. 12 N:o 9. Elle peut s'exprimer par des intégrales elliptiques, et on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x dx}{\sqrt{3 + \cos 2x}} = F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

10. Lisez $p + \frac{1}{2}$ au lieu de $p - \frac{1}{2}$.

12 est la même que N:o 11 dans laquelle on pose $p - 1$ au lieu de p .

Tab. 75.

2. On peut aussi écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x dx}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} = \sqrt{2} \left[F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

3 admet la forme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x dx}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} = \sqrt{2} E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

13, 14. Entre ces formules on peut introduire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 x}} = \frac{2}{p^2} (1 - \sqrt{1 - p^2}), \quad p^2 < 1.$$

23 est fautive avec Tab. 28 N:o 23. La véritable formule est

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx \sqrt{1 - p^2 \sin^2 x} = \frac{1}{8p^2} [(1 + 2p^2)E'(p) - (1 - p^2)F'(p)].$$

Quant à l'intégrale du texte on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^6 x \cos^4 x}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 x}} dx = \frac{1}{96p^4} [(2 + p^2)F'(p) - 2(1 + p^2)E'(p)].$$

26 est fautive, quoique une correction ait été faite. Lorsque les fautes restantes seront corrigées, il viendra

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^{2a} x dx}{\cos^2 x (1 + \sec^2 x)^{b + \frac{1}{2}}} = \frac{I(a + \frac{1}{2})I(b - a)}{2^{b-a+1}I(b + \frac{1}{2})}, \quad b > a.$$

Tab. 76.

3 est fautive. Il est bien vrai qu'on a

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \mathcal{A}} = \int \frac{dx}{\mathcal{A}} - \int \mathcal{A} dx - \mathcal{A} \cot x^1)$$

($\mathcal{A} = \sqrt{1 - p^2 \sin^2 x}$), mais lorsque nous prenons l'intégrale entre ses limites, le dernier terme devient $= \infty$. Il s'en suit que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{1 - p^2 \sin^2 x}} = \infty$$

4, 5 s'obtiennent très facilement, si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur par $1 + p \sin x$ et emploie Tab. 75 N:o 18, 19, 20. On trouve donc

¹⁾ Voyez VERHULST, Traité des fonctions elliptiques Bruxelles 1841 pag. 25.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1-p \sin x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-p^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{1-p^2} + \frac{1}{p(1-p^2)} E'(p) - \frac{1}{p} F'(p)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-p \sin x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-p^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{1-p^2} E'(p) + \frac{p}{1-p^2}.$$

13. Mr B. de H. y a fait les corrections nécessaires. Pour plus de clarté écrivons la formule ici.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^{\frac{1}{2}(p-q-1)} dx}{(\cos x + \sin x)^p + \frac{1}{2} (\cos x)^{1-\frac{p+q}{2}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{p-q+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}, p > q-1.$$

14. Lisez $p + \frac{1}{2}$ au lieu de $p - \frac{1}{2}$.

18, 19. Ajoutez $\frac{\pi}{2} - \mu > \lambda$.

21. Si l'on fait $p = r \cos \alpha$, $q = r \cos \beta$ ($\alpha > \beta$), $\cos x = y$, on aura

$$J = r^2 \cos \alpha \cos \beta \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2 \sin^2 \alpha)(1-y^2 \sin^2 \beta)}}.$$

Selon Mr VERHULST¹⁾ on trouve

$$J = r \cos \beta F\left(\alpha, \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}\right)$$

ce qui s'accorde avec la formule de JACOBI, mais est plus simple.

Tab. 78.

11, 12. Il faut peut-être ajouter ici que ces intégrales sont $= \frac{\pi}{2}$ pour $a = b$, ce qui N:o 9 et 10 aussi donnent.

14. Il faut la transporter à la Tab. 244 laquelle comprend de telles intégrales. Après la correction elle est

¹⁾ VERHULST, l. c. pag. 15.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos px \sin ax dx = \frac{\pi \cos p\pi}{1-p^2} + \frac{2p \sin p\pi}{(1-p^2)^2}.$$

15 est juste, pourvu qu'on échange $(-1)^a$ contre $(-1)^{a+1}$.

18, 19. Ajoutez $q > p - 2$.

25. J'ai autrefois¹⁾ démontré que l'on a

$$\int_0^{\pi} \cos^{a+b\frac{1}{2}} x \cos \frac{1}{2} ax \cos \frac{1}{2} bxdx = \frac{\pi}{2^{a+b+1}} [1 + (a+b)_b].$$

Cette forme est un peu plus simple que celle du texte

Tab. 79.

8. Mr B. de H. y a fait une correction, mais elle n'est pas satisfaisante. Selon son Exposé pag. 482 on a

$$\int_0^{\pi} (1 + p^2 - 2p \cos x)^a \cos bxdx = \pi (-p)^b \sum_{r=0}^{r=a} a_r \cdot a_{b+r} \cdot p^{2r}.$$

Tab. 80.

1 est fautive. En divisant la distances des limites on aura

$$\int_0^{\pi} \cos (a \sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos (a \sin x) dx.$$

Si l'on fait $\sin x = y$ et développe en serie, on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos (a \sin x) dx &= 2 \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^r a^{2r}}{1.2.3 \dots 2r} \int_0^1 \frac{y^{2r} dy}{\sqrt{1-y^2}} \\ &= \pi \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^r a^{2r} \cdot 1.3.5 \dots (2r-1)}{1.2.3 \dots 2r \cdot 2.4.6 \dots 2r} \\ &= \pi \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^r a^{2r}}{(2.4.6 \dots 2r)^2}. \end{aligned}$$

¹⁾ Aperçu des transactions de l'Acad. roy. des sciences à Stockholm 1864 pag. 373.

Il faut donc mettre $(2^{\nu/2})^2$ au lieu de $(2^{\nu+1/2})^2$ dans le dénominateur.

6 peut revêtir une forme plus simple. En divisant la distance des limites on aura

$$J = \int_0^r \text{Cos } (q \text{ Sin } x) \text{ Cos } 2bx dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos } (q \text{ Sin } x) \text{ Cos } 2bx dx,$$

et en développant en serie il viendra

$$J = 2 \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu q^{2\nu}}{\Gamma(2\nu+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin } 2^\nu x \text{ Cos } 2bx dx.$$

Mais suivant une formule précédente (Tab. 54, 55, 56 N:o 10) on a

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin } 2^\nu x \text{ Cos } 2bx dx &= 0 \dots\dots\dots \text{pour } b > \nu \\ &= \frac{(-1)^b \pi}{2^{2\nu+1}} (2\nu)_{\nu-b} \dots\dots\dots \text{pour } b \leq \nu; \end{aligned}$$

donc on trouve

$$J = \pi \sum_{\nu=b}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^{b+\nu} q^{2\nu}}{2^{2\nu} \Gamma(2\nu+1)} \cdot (2\nu)_{\nu-b} = \pi \sum_{\nu=b}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^{b+\nu} (\frac{q}{2})^{2\nu}}{\Gamma(\nu+b-1) \Gamma(\nu-b+1)}.$$

7. De la même manière à peu près on trouve

$$\int_0^{\pi} \text{Sin } (q \text{ Sin } x) \text{ Sin } (2b+1)x dx = \pi \sum_{\nu=b}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^{b+\nu} (\frac{q}{2})^{2\nu+1}}{\Gamma(\nu+b+2) \Gamma(\nu-b+1)}.$$

8 est en même cas. On aura

$$\int_0^{\pi} \text{Cos } \{2\alpha(x - q \text{ Sin } x)\} dx = \pi \sum_{\nu=\alpha}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^{\alpha+\nu} (\alpha q)^{2\nu}}{\Gamma(\nu+\alpha+1) \Gamma(\nu-\alpha+1)}$$

$$\int_0^{\pi} \text{Cos } \{(2\alpha+1)(x - q \text{ Sin } x)\} dx = \pi \sum_{\nu=\alpha}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^{\alpha+\nu} ((\alpha+\frac{1}{2})q)^{2\nu+1}}{\Gamma(\nu+\alpha+2) \Gamma(\nu-\alpha+1)}.$$

9 est fautive. En intégrant par parties on trouve

$$\int (1 - q \cos x)^2 \cos \{2(x - q \sin x)\} dx = \frac{\sin \{a(x - q \sin x)\}}{a} (1 - q \cos x) \\ - \frac{q}{a} \int \sin \{a(x - q \sin x)\} \sin x dx.$$

Puisque le terme intégré s'évanouit pour les deux limites, on aura

$$J_a = \int_0^\pi (1 - q \cos x)^2 \cos \{a(x - q \sin x)\} dx \\ = -\frac{q}{a} \int_0^\pi \sin \{a(x - q \sin x)\} \sin x dx \\ = -\frac{q}{2a} \left[\int_0^\pi \cos \{(a-1)x - aq \sin x\} dx \right. \\ \left. - \int_0^\pi \cos \{(a+1)x - aq \sin x\} dx \right].$$

Si l'on désigne les intégrales entre les crochets par J_1 et J_2 resp. et qu'on pose $a = 2\alpha$, on aura à l'aide de N:o 8

$$J_1 = \int_0^\pi \cos \left\{ (2\alpha - 1) \left(x - \frac{2aq}{2\alpha - 1} \sin x \right) \right\} dx$$

$$= \pi \sum_{\nu=\alpha-1}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^{\alpha+\nu-1} (aq)^{2\nu+1}}{\Gamma(\nu+\alpha+1) \Gamma(\nu-\alpha+2)}.$$

$$J_2 = \int_0^\pi \cos \left\{ (2\alpha + 1) \left(x - \frac{2aq}{2\alpha + 1} \sin x \right) \right\} dx$$

$$= \pi \sum_{\nu=\alpha}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^{\alpha+\nu} (aq)^{2\nu+1}}{\Gamma(\nu+\alpha+2) \Gamma(\nu-\alpha+1)}.$$

La différence de ces sommes donne une autre, et nous trouverons

$$J_{2\alpha} = -\frac{q\pi}{2\alpha} \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^r (\alpha+r)(\alpha q)^{2\alpha+2r-1}}{\Gamma(2\alpha+r+1)\Gamma(r+1)}.$$

Pour α = un nombre impair $= 2\alpha + 1$ nous aurons

$$J_{2\alpha+1} = -\frac{q}{2(2\alpha+1)} \left[\int_0^1 \text{Cos} \left\{ 2\alpha(x - \frac{(\alpha+\frac{1}{2})q}{\alpha} \text{Sin } x) \right\} dx \right. \\ \left. - \int_0^\pi \text{Cos} \left\{ (2\alpha+2)(x - \frac{(\alpha+\frac{1}{2})q}{\alpha+1} \text{Sin } x) \right\} dx \right].$$

Nous avons maintenant

$$J_1 = \int_0^\pi \text{Cos} \left\{ 2\alpha(x - \frac{(\alpha+\frac{1}{2})q}{\alpha} \text{Sin } x) \right\} dx$$

$$= \pi \sum_{r=\alpha}^{r=\infty} \frac{(-1)^{\alpha+r} ((\alpha+\frac{1}{2})q)^{2r}}{\Gamma(r+\alpha+1)\Gamma(r-\alpha+1)}$$

$$J_2 = \int_0^\pi \text{Cos} \left\{ (2\alpha+2)(x - \frac{(\alpha+\frac{1}{2})q}{\alpha+1} \text{Sin } x) \right\} dx$$

$$= \pi \sum_{r=\alpha+1}^{r=\infty} \frac{(-1)^{\alpha+r+1} ((\alpha+\frac{1}{2})q)^{2r}}{\Gamma(r+\alpha+2)\Gamma(r-\alpha)}.$$

En soustrayant nous aurons

$$J_{2\alpha+1} = -\frac{q\pi}{2(2\alpha+1)} \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^r (2\alpha+2r+1)((\alpha+\frac{1}{2})q)^{2(\alpha+r)}}{\Gamma(2\alpha+r+2)\Gamma(r+1)}.$$

Par comparaison on découvre qu'il faut être $\alpha^{n+1/2}$ au lieu de $(\alpha+1)^{n/2}$ sous le signe de sommation.

Les deux intégrales J_{2a} , J_{2a+1} peuvent se réunir en une seule formule, savoir

$$J_a = -\frac{q\pi}{2a} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^{\nu}(a+2\nu)(\frac{1}{2}aq)^{a+2\nu-1}}{\Gamma(a+\nu+1)\Gamma(\nu+1)}.$$

Tab. 81.

3 est fautive. En effet on trouve

$$\int_0^{\pi} \sin^{2a+1} x \cot \frac{1}{2}x dx = \int_0^{\pi} \sin^{2a} x dx + \int_0^{\pi} \sin^{2a} x \cos x dx,$$

parce qu'on a

$$\cot \frac{1}{2}x = \frac{1 + \cos x}{\sin x}.$$

La dernière intégrale est évidemment $= 0$; la première est donnée Tab. 78 N:o 4; donc

$$\int_0^{\pi} \sin^{2a+1} x \cot \frac{1}{2}x dx = \frac{\pi}{2^{2a}} \cdot \frac{\Gamma(2a+1)}{(\Gamma(a+1))^2} = \frac{\pi}{2^{2a}} (2a)_a.$$

On en peut avoir la formule du texte hors le facteur π qui y a été omis.

Tab. 82.

3 est fautive comme déduite de Tab. 25 N:o 14, avant qu'elle ait été corrigée. Par la vraie valeur ou directement on trouve

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{1 - \sin x \cos \frac{2a\pi}{b}} = \frac{2\left(\pi - \frac{2a\pi}{b}\right)}{\sin \frac{2a\pi}{b}}, \quad b \geq 2a.$$

10 est fautive, autant que je puis voir. Comme il y a toute apparence que la formule générale devient compliquée, je m'ai contenté de considérer quelques cas particuliers qui cependant ne s'accordèrent pas avec N:o 10. Il soit

notamment remarqué que l'intégrale doit contenir un logarithme, quand a est un nombre impair, mais N:o 10 n'en a rien.

13. Supprimez la condition $1 > p > 0$.

14 est tirée du journal de Crelle. Comme ce livre n'est pas à la main, je n'en peux pas puiser des renseignements, mais je vais chercher l'intégrale même. Par Tab. 82 N:o 6 on a

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{c + \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{c^2 - 1}}, \quad c^2 > 1. \quad (A)$$

En différentiant on aura

$$D_c^a \left(\frac{1}{c + \cos x} \right) = \frac{(-1)^a \Gamma(a+1)}{(c + \cos x)^{a+1}}$$

$$D_c^r \left(\frac{1}{\sqrt{c+1}} \right) = \frac{(-1)^r \Gamma(r + \frac{1}{2})}{(c+1)^{r+\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2})}$$

$$D_c^r \left(\frac{1}{\sqrt{c-1}} \right) = \frac{(-1)^r \Gamma(r + \frac{1}{2})}{(c-1)^{r+\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2})}$$

or par une formule connue

$$\begin{aligned} D_c^a \left(\frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} \right) &= \frac{(-1)^a}{\pi \sqrt{c^2 - 1}} \cdot \sum_{\nu=0}^{\nu=a} \frac{a \nu \Gamma(a - \nu + \frac{1}{2}) \Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{(c+1)^{a-\nu} (c-1)^{\nu}} \\ &= \frac{(-1)^a \Gamma(a+1)}{\pi \sqrt{c^2 - 1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=a} \frac{\Gamma(a - \nu + \frac{1}{2}) \Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{(c+1)^{a-\nu} (c-1)^{\nu} \Gamma(a - \nu + 1) \Gamma(\nu + 1)} \end{aligned}$$

Si l'on différentie l'intégrale (A) a fois en faisant usage des dérivées précédentes et qu'on supprime les facteurs communs, il viendra

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(c + \cos x)^{a+1}} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=a} \frac{\Gamma(a - \nu + \frac{1}{2}) \Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{(c+1)^{a-\nu} (c-1)^{\nu} \Gamma(a - \nu + 1) \Gamma(\nu + 1)}.$$

En posant $c = \frac{1}{\sin \lambda}$ et par quelques réductions on aura

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(1 + \sin \lambda \cos x)^{a+1}} = \frac{1}{\cos \lambda (1 + \sin \lambda)^a} \sum_{r=0}^{r=a} \frac{\Gamma(a-r+\frac{1}{2})\Gamma(r+\frac{1}{2})}{\Gamma(a-r+1)\Gamma(r+1)} \left(\frac{1 + \sin \lambda}{1 - \sin \lambda} \right)^r$$

$$= \frac{1}{\cos \lambda (1 + \sin \lambda)^a} \sum_{r=0}^{r=a} \frac{\Gamma(a-r+\frac{1}{2})\Gamma(r+\frac{1}{2})}{\Gamma(a-r+1)\Gamma(r+1)} \cdot \operatorname{tg}^{2r} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2} \right).$$

Telle est la valeur que j'ai su trouver.

15. De la même manière j'ai trouvé

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos^a x dx}{(1 + \sin \lambda \cos x)^{a+1}}$$

$$= \frac{1}{\cos \lambda (1 + \sin \lambda)^a} \sum_{r=0}^{r=a} (-1)^r \operatorname{tg}^{2r} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2} \right) \frac{\Gamma(a-r+\frac{1}{2})\Gamma(r+\frac{1}{2})}{\Gamma(a-r+1)\Gamma(r+1)}.$$

16 à 19. On aurait ces formules par la différentiation de N:o 10, si elle était juste. N:o 16 et 17 sont cependant exactes; N:o 18 et 19 semblent fautives. J'ai vainement cherché N:o 19 à l'endroit cité.

Tab. 84.

23. Ajoutez: $1 > p^2$.

26. Il y a une faute d'impression. Posons

$$J_c = \int_0^{\pi} \frac{1 - p^b \cos bx}{1 - 2p^b \cos bx + p^{2b}} \cdot \cos \frac{1}{2} cx \cos \frac{c}{2} x dx.$$

En faisant $x = \frac{c}{b} y$ on trouve

$$J_c = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - p^b \cos 2by}{1 - 2p^b \cos 2by + p^{2b}} \cos cy \cos \frac{c}{2} y dy$$

et par une formule connue¹⁾

¹⁾ SCHLÖMILCH, Handbuch der alg. Analysis 5te Auflage, Jena 1873 pag. 265.

$$J_c = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos cy \cos cy dy + 2 \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} p^{b\nu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2by \cos cy \cos cy dy.$$

Pour $c = 2\alpha$ on aura (Tab. 54—56 N:o 9)

$$J_{2\alpha} = \frac{\pi}{2^{2\alpha}} + \frac{\pi}{2^{2\alpha+1}} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} p^{b\nu} (2\alpha)_{b\nu};$$

pour $c = 2\alpha + 1$ on trouve (Tab. 54—56 N:o 15)

$$J_{2\alpha+1} = \frac{\pi}{2^{2\alpha+1}} + \frac{\pi}{2^{2(\alpha+1)}} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} p^{b\nu} (2\alpha + 1)_{b\nu}.$$

Ces deux formules peuvent se réunir en la seule formule

$$J_c = \frac{\pi}{2^c} + \frac{\pi}{2^{c+1}} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} p^{b\nu} (c)_{b\nu}.$$

Le premier terme manque dans le texte.

Tab. 85.

12, 13. Lisez à droite p^{2n} au lieu de a^{2n} .

20, 21. Je préfère la forme (Exposé pag. 483.)

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos ax dx}{(1 + p^2 - 2p \cos x)^{c+1}} = \frac{\pi p^{a(a+c)c}}{(1 - p^2)^{2c+1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=c} c_{\nu} \cdot \frac{(a-c)^{\nu-1}}{(a+1)^{\nu-1}} \cdot p^{2\nu}; \quad p^2 < 1$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos ax dx}{(1 + p^2 - 2p \cos x)^{c+1}} = \frac{\pi p^{-a(a+c)c}}{(p^2-1)^{2c+1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=c} c_{\nu} \cdot \frac{(a-c)^{\nu-1}}{(a+1)^{\nu-1}} \cdot p^{2(c-\nu)} \dots$$

$$p^2 > 1.$$

26 est superflue, car elle provient de N:o 20 et 21 en posant $b-1$ et $\sqrt{p}$ au lieu de c et p resp.

Tab. 86.

1. Lisez $F'(p)$ au lieu de $F(p)$.
- 2 est fautive. La valeur est $2\sqrt{2}$.
5. M^r B. d. H. prétend que le facteur $\frac{2}{p}$ en membre droit doit être changé contre $\frac{1}{p}$, mais il en a tort. En posant l'intégrale = J , $x = \pi - 2q$ et $1 - 2 \sin^2 q$ au lieu de $\cos 2q$, nous aurons

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 + p^2 - 2p \cos x}} = \frac{2}{1+p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 q - 1}{\sqrt{1 - \frac{4p}{(1+p)^2} \sin^2 q}} dq$$

$$= \frac{2}{1+p} \left[2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 q dq}{\mathcal{A}(p_1, q)} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dq}{\mathcal{A}(p_1, q)} \right]$$

en faisant pour abrégier $\frac{2\sqrt{p}}{1+p} = p_1$.

Selon des formules connues on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 q dq}{\mathcal{A}(p_1, q)} = \frac{1}{p_1^2} [F'(p_1) - E'(p_1)], \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dq}{\mathcal{A}(p_1, q)} = F'(p_1)$$

or

$$J = \frac{2}{1+p} \left[\frac{2}{p_1^2} \{F'(p_1) - E'(p_1)\} - F'(p_1) \right].$$

Par la transformation de LANDEN on trouve

$$F'(p_1) = (1+p)F'(p), \quad (1+p)E'(p_1) = 2E'(p) - (1-p^2)F'(p);$$

en mettant ces valeurs en J il viendra

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 + p^2 - 2p \cos x}} = \frac{2}{p} [F'(p) - E'(p)].$$

10. Il vaut mieux poser l'intégrale = ∞ .

13 est juste, mais on peut écrire

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1 + p^2 - 2p \cos 2x}} = 2F'(p).$$

14 est fautive. Lisez

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(p^2 - q^2 \cos x)^{3/2}} = \frac{2}{(p^2 - q^2)\sqrt{p^2 + q^2}} E'\left(\frac{q\sqrt{2}}{\sqrt{p^2 + q^2}}\right)$$

15 est aussi fautive. Lisez

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x dx}{(p^2 - q^2 \cos x)^{3/2}} = \frac{2}{q^2 \sqrt{p^2 + q^2}} \left[\frac{p^2}{q^2} E'\left(\frac{q\sqrt{2}}{\sqrt{p^2 + q^2}}\right) - F'\left(\frac{q\sqrt{2}}{\sqrt{p^2 + q^2}}\right) \right]$$

16. Lisez $\sum_0^{\infty}$ au lieu de $\sum_1^{\infty}$. En quelques cas cette intégrale s'exprime le mieux par des intégrales elliptiques¹⁾

Tab. 87.

7 n'est pas parfaitement juste. Par division de la distance des limites on aura

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (\cos x - \cos ax) \cos bxdx &= 2 \int_0^{\pi} (\cos x - \cos ax) \cos bxdx \\ &= \int_0^{\pi} \cos (b-1)x dx + \int_0^{\pi} \cos (b+1)x dx \\ &\quad - \int_0^{\pi} \cos (a-b)x dx - \int_0^{\pi} \cos (a+b)x dx. \end{aligned}$$

Pour a et b entiers l'intégrale deuxième et quatrième est toujours $= 0$ et les autres aussi, pourvu que b ne soit égale à l'unité ou à $a (> 1)$; pour $b = 1$, la première intégrale devient $= \pi$; pour $b = a$ la troisième est $= \pi$. On a donc ($a > 1$)

¹⁾ Voyez MINDING, Integral-Tafeln, la première formule de reduction pag. 174.

$$\int_0^{2\pi} (\cos x - \cos ax) \cos bxdx = 0 \quad \text{pour } b > 1, \text{ non } = a$$

$$= \pi \quad b = 1$$

$$= -\pi \quad b = a.$$

Tab. 88.

2. La valeur n'est point $(-1)^a \cdot 2\pi$, mais $(-1)^{a-1} \cdot 2\pi$, comme on trouve aussi par Tab. 356 N:o 5 dont elle est tirée. On peut aussi avoir cette intégrale par Tab. 84 N:o 5 en y posant $p = -1$.
-

Tab. 90.

26 est fautive. Lisez

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(r - q \cos \lambda + q^2 \sin \lambda \cos x)^2} = \frac{2\pi(r - q \cos \lambda)}{(r^2 - 2qr \cos \lambda + q^2)^{3/2}}.$$

Tab. 93.

- 1, 2. Ajoutez $b > a - 1$.
 4, 5. Ajoutez $b > a - 2$.
 6. Par Tab. 55 N:o 6 on trouve que les lettres p et q sont en partie renversées. Lisez

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p,r} \cos \{q(x - \lambda)\} dx = \frac{\pi \cos q\lambda}{2^p} \cdot \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{p-q}{2} + 1\right)},$$

$$p > q - 2.$$

Tab. 94.

2. Mr B. d. H. dit dans ses corrections que cette formule ne vaut que pour $a = \infty$. À mon avis elle vaut pour a égale à un nombre entier quelconque. En effet posons l'intégrale $= J$ et $x = 2y$: il viendra

$$J = 2 \int_{-\pi}^0 \frac{\sin (2a + 1)y}{\sin y} dy.$$

Suivant une formule connue¹⁾ on a pour $n =$ un nombre entier impair

$$\begin{aligned} \frac{\sin ny}{\sin y} &= n - \frac{n(n^2 - 1)}{2 \cdot 3} \sin^2 y + \frac{n(n^2 - 1)(n^2 - 9)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \sin^4 y \\ &\quad - \frac{n(n^2 - 1)(n^2 - 9)(n^2 - 25)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \sin^6 y + \text{etc.} \end{aligned}$$

En multipliant par dy et en intégrant depuis $-\pi$ jusqu'au zéro, on aura

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin ny}{\sin y} \cdot dy &= n\pi \left[1 - \frac{n^2 - 1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{(n^2 - 1)(n^2 - 9)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{3}{8} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(n^2 - 1)(n^2 - 9)(n^2 - 25)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot \frac{5}{16} + \text{etc.} \right]. \end{aligned}$$

En y faisant $n = 1, 3, 5, \dots$ l'intégrale devient $= \pi$, or

$$J = 2 \int_{-\pi}^0 \frac{\sin (2a + 1)y}{\sin y} dy = 2\pi.$$

On démontre de la manière suivante que cela a lieu généralement. Quelque nombre que a soit, on a

$$\frac{\sin (2a + 3)y}{\sin y} = \frac{\sin (2a + 1)y \cos 2y + \cos (2a + 1)y \sin 2y}{\sin y},$$

mais par les formules

$$\cos 2y = 1 - 2 \sin^2 y, \quad \sin 2y = 2 \sin y \cos y$$

on trouvera

$$\begin{aligned} \frac{\sin (2a + 3)y}{\sin y} &= \frac{\sin (2a + 1)y}{\sin y} - 2 \sin (2a + 1)y \sin y \\ &\quad + 2 \cos (2a + 1)y \cos y = \frac{\sin (2a + 1)y}{\sin y} \\ &\quad + 2 \cos 2(a + 1)y. \end{aligned}$$

¹⁾ Voyez GRUNERT, Supplemente zu KLÜGELS math. Wörterbuch, Leipzig 1836 Zweyte Abtheil. pag. 636.

En multipliant par dy et en intégrant depuis $y = -\pi$ jusqu'à $y = 0$ on aura

$$\int_{-\pi}^0 \frac{\sin (2a+3)y}{\sin y} dy = \int_{-\pi}^0 \frac{\sin (2a+1)y}{\sin y} dy$$

c'est à dire que l'intégrale reste $= \pi$, quand même le nombre a fût augmenté par l'unité; mais la valeur est $= \pi$ pour $a = 0$, $a = 1$; donc toujours.

- 3 est fautive. Comme la limite supérieure me semblait incompatible avec $\text{Arc tg } \sqrt{2}$, je soupçonnai qu'elle devrait être $= \frac{3}{4}\pi$. Ainsi je trouvai l'intégrale

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\sin x dx}{1 + \cos^2 x} = \frac{\pi}{4} + \text{Arc tg } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{4} - \text{Arc tg } \sqrt{2}$$

ou la formule du texte.

4. M^r B. d. H. pense que l'intégrale

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^a x \cos b(x-\lambda) dx = \frac{\pi}{2^a} \cdot \frac{(1 + (-1)^{a+b}) \cos b\lambda \Gamma(a+1)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{a-b}{2} + 1\right)}$$

est fautive. Pour examiner cela j'ai d'abord développé $\cos b(x-\lambda)$ et j'ai eu

$$J = \cos b\lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos^a x \cos bxdx + \sin b\lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos^a x \sin bxdx.$$

La dernière intégrale est $= 0$, puisque on a

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^a x \sin bxdx &= \int_{-\pi}^0 \cos^a x \sin bxdx + \int_0^{\pi} \cos^a x \sin bxdx \\ &= - \int_0^{\pi} \cos^a x \sin bxdx + \int_0^{\pi} \cos^a x \sin bxdx. \end{aligned}$$

En divisant la distance des limites dans la première intégrale on trouvera

$$J = \text{Cos } b\lambda \int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos } ax \text{ Cos } bxdx = 2 \text{ Cos } b\lambda \int_0^{\pi} \text{Cos } ax \text{ Cos } bxdx.$$

Par une autre subdivision des limites et en posant dans la seconde intégrale $\pi - x$ au lieu de x , on aura

$$\int_0^{\pi} \text{Cos } ax \text{ Cos } bxdx = (1 + (-1)^{a+b}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos } ax \text{ Cos } bxdx.$$

Ainsi nous avons

$$J = 2[1 + (-1)^{a+b}] \text{Cos } b\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos } ax \text{ Cos } bxdx.$$

On voit donc que J est $= 0$, lorsque $a + b$ est un nombre entier impair. Nous n'aurons donc que regarder le cas que a et b sont tous deux des nombres entiers pairs ou impairs. Posons d'abord $a = 2m$, $b = 2n$; d'après une formule précédemment donnée (Tab. 54—56 N:o 9) nous aurons

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos } 2mx \text{ Cos } 2nxdx &= 0 \text{ ----- pour } n > m \\ &= \frac{\pi}{2^{2m+1}} \cdot \frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(m+n+1)\Gamma(m-n+1)} \text{ ---- pour } n \leq m. \end{aligned}$$

Posons ensuite $a = 2m + 1$, $b = 2n + 1$: une formule précédente (Tab. 54—56 N:o 15) donnera

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos } 2m+1x \text{ Cos } (2n+1)xdx &= 0 \text{ ----- pour } n > m \\ &= \frac{\pi}{2^{2m+2}} \cdot \frac{\Gamma(2m+2)}{\Gamma(m+n+2)\Gamma(m-n+1)} \text{ ---- pour } n \leq m. \end{aligned}$$

Si l'on pose $2m=a$, $2n=b$ dans celle-la et $2m+1=a$, $2n+1=b$ dans celle-ci toutes les deux peuvent être comprises dans la seule formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos } ax \text{ Cos } bxdx = 0 \text{ ----- } b > a$$

$$= \frac{\pi}{2^{a+1}} \cdot \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}+1\right)} \text{ --- } b \leq a$$

dont celle-ci contient celle-là, parce que la fonction $\Gamma(\dots)$ est $= \infty$ pour un argument zéro ou négatif. En mettant cela en la valeur de J , nous aurons

$$J = \frac{\pi}{2^a} \text{Cos } b\lambda \cdot \frac{[1 + (-1)^{a+b}]\Gamma(a+1)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}+1\right)}$$

ou précisément la formule de LOBATSCHESKY.

Depuis qu'on eût trouvé

$$J = 2 \text{Cos } b\lambda \int_0^{\pi} \text{Cos } ax \text{ Cos } bxdx,$$

on aurait pu exprimer $\text{Cos } ax$ par le Cos des arcs multiples et puis faire usage de la formule

$$\int_0^{\pi} \text{Cos } ax \text{ Cos } \beta x dx = \begin{cases} 0, & \alpha < \beta \\ \frac{\pi}{2}, & \alpha = \beta, \end{cases}$$

mais j'ai préféré la manière précédente pour obtenir la formule de LOBATSCHESKY.

5 semble fautive. Pour ma part je trouve

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos } x dx \sqrt{1 - q^2 \text{Cos }^2 x} = \frac{1}{2} + \frac{1 - q^2}{4q} \ell^{\frac{1+q}{1-q}}, \quad q^2 < 1.$$

Tab. 95.

6 a été rectifiée par Mr B. d. H. Selon lui le membre droit est $= \pi$, non $= 1$, ce que Tab. 301 N:o 5 donne de laquelle la formule en question est déduite. Il faut

donc que nous examinions, si celle-ci est exacte. Posons l'intégrale = J et $\pi x = y$: nous aurons

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \text{Cos } 2a\pi x l \text{ Sin } \pi x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{Cos } 2ay l \text{ Sin } y dy \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos } 2ay l \text{ Sin } y dy . \end{aligned}$$

En intégrant par parties on trouvera

$$J = \frac{1}{a\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Sin } 2ay \text{ Cos } y}{\text{Sin } y} dy ;$$

mais comme on a

$$\frac{\text{Sin } 2ay \text{ Cos } y}{\text{Sin } y} = \frac{\text{Sin } (2a - 1)y}{\text{Sin } y} + \text{Cos } 2ay$$

on aura en multipliant par dy et en intégrant

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Sin } 2ay \text{ Cos } y}{\text{Sin } y} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Sin } (2a - 1)y}{\text{Sin } y} dy ,$$

car on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos } 2ay dy = 0 .$$

On démontre très facilement que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Sin } (2a - 1)y}{\text{Sin } y} dy = \frac{\pi}{2}$$

pour un a quelconque, d'où il suit que

$$J = \int_0^1 \text{Cos } 2a\pi x l \text{ Sin } \pi x dx = -\frac{1}{2a}$$

C'est la formule Tab. 301 N:o 5 laquelle est par conséquent juste. Or on a

$$\int_0^1 \frac{\sin 2a\pi x}{\operatorname{tg} \pi x} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2ax \operatorname{Cot} x dx = 1.$$

Tab. 99.

3, 4 sont fautives. Elles proviennent en différentiant les formules (1185) et (1186) dans l'Exposé. On trouve leurs valeurs = 0.

Tab. 103.

8 est fort singulière. Je pense qu'elle peut être remplacée par la formule¹⁾

$$\lim \int_0^h \frac{\sin kx}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2} \text{ pour } k = \infty \text{ et } h \leq \frac{\pi}{2}$$

9. Il y a une grave faute typographique; le dénominateur est $\cos 2x + 1$, non $\cos 2x - 1$. En outre je trouve la valeur $= \frac{\pi}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{1+p}{2}} \right)$.

Tab. 104.

13 à 15. Lisez partout $\frac{\sin \lambda}{\sqrt{1 - \cos^2 \lambda \cos^2 \mu}}$ au lieu de c .

Tab. 105.

3 a été corrigée par M^r B. d. H. Néanmoins je la récris ici.

$$\begin{aligned} & \int_2^{\mu} \sin^{2a+1} x \cos x dx \sqrt{(\sin^2 x - \sin^2 \lambda)(\sin^2 \mu - \sin^2 x)} \\ &= \frac{\pi}{16} (\sin^2 \mu - \sin^2 \lambda)^2 \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu} a_{\nu} \cdot \frac{3^{\nu/2}}{6^{\nu/2}} \cdot (\sin^2 \mu - \sin^2 \lambda)^{\nu} \sin^{2(a-\nu)\mu}. \end{aligned}$$

¹⁾ Voyez B. d. H., Exposé pag. 380.

Tab. 107.

3 est fautive. Lisez

$$\int_{\lambda}^{\mu} \frac{\sin^5 x \cos x dx}{V(\sin^2 x - \sin^2 \lambda)(\sin^2 \mu - \sin^2 x)}$$

$$= \frac{\pi}{16} [3 \sin^4 \lambda + 2 \sin^2 \lambda \sin^2 \mu + 3 \sin^4 \mu].$$

17 est fautive malgré les corrections que Mr B. d. H. y a faites. Lisez

$$\int_{\lambda}^{\mu} \frac{\sin^4 x dx}{V(\sin^2 x - \sin^2 \lambda)(\sin^2 \mu - \sin^2 x)}$$

$$= \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \lambda + \sin^2 \mu) \left[E' \left(\frac{\sin \vartheta}{\sin \mu} \right) F \left(\frac{\sin \vartheta}{\sin \mu}, \mu \right) - F' \left(\frac{\sin \vartheta}{\sin \mu} \right) E \left(\frac{\sin \vartheta}{\sin \mu}, \mu \right) \right]$$

$$+ \frac{(1 + \sin^2 \mu) \sin \mu}{2 \cos \lambda} F' \left(\frac{\sin \vartheta}{\sin \mu} \right) - \frac{\sin \mu \cos \lambda}{2} E' \left(\frac{\sin \vartheta}{\sin \mu} \right).$$

23. Au lieu de $\frac{\sin^2 \mu - \sin^2 \lambda}{\sin^2 \mu}$, $\operatorname{tg}^2 \mu$ lisez

$$\frac{\sin^2 \mu - \sin^2 \lambda}{\sin^2 \mu} \cdot \operatorname{tg}^2 \mu = \frac{\sin^2 \mu - \sin^2 \lambda}{\cos^2 \mu}.$$

Tab. 108.

5. Mr B. d. H. y a fait plusieurs corrections, mais je n'ai pas pu obtenir sa formule. Posons l'intégrale = J ; par integration indéfinie nous aurons

$$\int \operatorname{Arc} \operatorname{tg} (xe^{pi}) dx = x \operatorname{Arc} \operatorname{tg} (xe^{pi}) - \frac{e^{-pi}}{2} \mathcal{L}(1 + x^2 e^{2pi}).$$

Lorsque nous prenons l'intégrale entre ses limites, nous trouverons

$$J = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} (e^{pi}) - \frac{e^{-pi}}{2} \mathcal{L}(1 + e^{2pi}).$$

Mais on a¹⁾

¹⁾ Voyez B. d. H., Exposé pag. 156 form (49) et page 185 form (128).

$$\text{Arc tg}(e^{pi}) = \frac{\pi}{4} + \frac{i}{4} \frac{1 + \sin p}{1 - \sin p}$$

$$\mathcal{U}(1 + e^{2pi}) = \mathcal{U}(2 \cos p) + \mathcal{U}(\cos p + i \sin p) = \mathcal{U}(2 \cos p) + pi :$$

or, il viendra

$$J = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}p \sin p - \frac{1}{2} \cos p \mathcal{U}(2 \cos p) \\ + \frac{i}{4} \left[\frac{1 + \sin p}{1 - \sin p} - 2p \cos p + 2 \sin p \mathcal{U}(2 \cos p) \right].$$

La condition doit être $\frac{\pi^2}{4} > p^2$.

10. Cette intégrale, de même que plusieurs autres, peut s'exprimer par ma transcendente $H(a)$. On trouve donc

$$\int_0^1 (\text{Arc Cot } x)^2 dx = \frac{\pi^2}{16} + \pi \mathcal{U}2 - \frac{1}{2} H\left(\frac{1}{2}\right) = 1,3340742486.$$

Tab. 109.

est fautive avec Tab. 238 N:o 18. Lisez

$$\int_0^\infty (\text{Arc Cot } x)^p dx = p \left(\frac{\pi}{2} \right)^{p-1} \left[\frac{1}{p-1} - \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{S_{2r}}{p+2r-1} \cdot \frac{1}{2^{2r-1}} \right].$$

Tab. 110.

- 3 On peut écrire

$$\int_1^\infty (\text{Arc Cot } x)^2 dx = \frac{1}{2} H\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi^2}{16} = 0,8435118417.$$

- 4 a subi plusieurs corrections, mais pourtant elle n'est pas parfaitement juste. Lisez

$$\int_1^\infty (\text{Arc Cot } x)^p dx = - \left(\frac{\pi}{4} \right)^p \\ + \frac{p}{2} \left(\frac{\pi}{4} \right)^{p-1} \left[\frac{2}{p-1} - \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{S_{2r}}{p+2r-1} \cdot \frac{1}{4^{2r-1}} \right].$$

Tab. 112.

6. PLANA donne fautivement à cette intégrale la valeur $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ qu'elle a, quand elle est prise entre les limites 0 et ∞ . En faisant $x = y^2$ on trouvera

$$\int_0^1 e^{-x} \sqrt{x} dx = 2 \int_0^1 y^2 e^{-y^2} dy = -\frac{1}{e} + \int_0^1 e^{-y^2} dy$$

dont on calcule facilement la valeur¹⁾

- 7 est fautive, mais la vraie valeur s'obtient par la même substitution que nous venons de faire. Or, on a

$$\int_0^1 \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{x}} = 2 \int_0^1 e^{-y^2} dy.$$

Tab. 113.

9. La forme suivante est peut-être meilleure:

$$\int_0^\infty \{e^{-x} x^{q-1} - e^{-px} (1 - e^{-x})^{q-1}\} dx = \Gamma(q) \left[1 - \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)} \right].$$

10. Je l'ai cherchée directement et j'ai trouvé

$$\int_0^\infty e^{-px} (1 - e^{-qx})^a \cdot x^b dx = \Gamma(b+1) \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu \cdot a^\nu}{(p + \nu q)^{b+1}}.$$

La formule du texte a un facteur $(-1)^b$ qu'il faut supprimer. La série est finie, si a est un nombre entier.

Tab. 114.

4. Mr B. d. H. dit qu'il faut ajouter le facteur 2^{-a} , mais il en a tort. En effet, si l'on pose $x = y^{\frac{1}{2}}$, on trouve

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cdot x^{2a+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty y^a e^{-y} dy = \frac{1}{2} \Gamma(a+1)$$

¹⁾ Voyez KLÜGEL, Math. Wörterbuch Tom. V pag. 978 et suiv.

conformément à N:o 9 de cette table; mais on a aussi

$$3^{a-2/1} = 3.4.5 \dots (3+a-3) = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(3)} = \frac{1}{2}\Gamma(a+1).$$

8, 9. Je préfère d'écrire

$$\int_0^\infty e^{-px^2} x^{2a} dx = \frac{\Gamma(a + \frac{1}{2})}{2p^{a + \frac{1}{2}}}$$

$$\int_0^\infty e^{-px^2} x^{2a+1} dx = \frac{\Gamma(a+1)}{2p^{a+1}}$$

13.
$$\int_0^\infty r^{-p^2 x^2} x^{2a} dx = \frac{\Gamma(a + \frac{1}{2})}{2(p^2 r)^{a + \frac{1}{2}}}.$$

15 s'écrit à présent ainsi:

$$\int_0^\infty e^{-x^4} x^2 dx = \frac{1}{4}\Gamma(\frac{3}{4}) = \frac{1}{3}\Gamma(\frac{7}{4}) = 0,306554175.$$

17. Écrivons

$$\int_0^\infty e^{-x^6} x^3 dx = \frac{1}{6}\Gamma(\frac{2}{3}) = {}^1)\frac{1}{4}\Gamma(\frac{5}{3}) = 0,22568632.$$

Tab. 115.

10. Une faute d'impression a été corrigée, une autre reste.
Lisez

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-c^b x^b} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)}{b c^{\frac{a}{b}}}.$$

Tab. 116.

1 est fautive avec Tab. 37 N:o 5. On peut avoir la vraie valeur comme il suit. D'abord est

¹⁾ Voyez A. de MORGAN, Differential and integral calculus, London 1842, pag. 590.

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x^2+px} \cdot x dx = e^{\frac{p^2}{4}} \int_0^{\infty} e^{-(x-\frac{1}{2}p)^2} x dx.$$

En posant $x = y + \frac{p}{2}$ on trouve

$$\begin{aligned} J &= e^{\frac{p^2}{4}} \left[\int_{-\frac{p}{2}}^{\infty} e^{-y^2} y dy + \frac{p}{2} \int_{-\frac{p}{2}}^{\infty} e^{-y^2} dy \right] \\ &= e^{\frac{p^2}{4}} \left[\frac{1}{2} e^{-\frac{p^2}{4}} + \frac{p}{4} \sqrt{\pi} + \frac{p}{2} \int_0^{\frac{p}{2}} e^{-y^2} dy \right] \end{aligned}$$

parce qu'on a

$$\int_{-\frac{p}{2}}^0 e^{-y^2} dy = \int_0^{\frac{p}{2}} e^{-y^2} dy, \quad \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

En ôtant la parenthèse il vient

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2+px} x dx = \frac{1}{2} + \frac{p}{4} e^{\frac{p^2}{4}} \cdot \sqrt{\pi} + \frac{p}{2} e^{\frac{p^2}{4}} \int_0^{\frac{p}{2}} e^{-y^2} dy.$$

On aura le même resultat, si l'on différencie la vraie valeur de Tab. 37 N:o 5 par rapport à p .

4. Mr B. d. H. a parfaitement raison, lorsque il dit que cette formule ne vaut que pour $q = 1$. La formule est alors

$$\int_0^{\infty} e^{-(a+b)x} \cdot x^{p-1} dx = \frac{\Gamma(p)}{(a+b)^p}.$$

Cette formule a sa place dans Tab. 113.

8. J'écris la formule corrigée ainsi:

$$\int_0^{\infty} e^{-q\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} \cdot x^{2a} dx = \frac{e^{-2q}}{2\sqrt{q}} \sum_{\nu=0}^{\nu=a} \frac{(a+\nu)_{2\nu} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{q^{\nu}} 1).$$

11. Écrivons plutôt

$$\int_0^{\infty} e^{-x^{\frac{2a}{1+2b}}} \cdot x^{a-1} dx = \frac{1+2b}{2a} \Gamma(b + \frac{1}{2}).$$

12 est donnée en forme d'une différence finie; je la donnerai en une forme plus usuelle. En développant $(e^{-x} - 1)^a$ par la formule du binôme nous aurons

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (e^{-x} - 1)^a e^{-px} x^{b-1} dx &= \sum_{\nu=0}^{\nu=a} (-1)^{\nu} a_{\nu} \int_0^{\infty} e^{-(a+p-\nu)x} \cdot x^{b-1} dx \\ &= \Gamma(b) \sum_{\nu=0}^{\nu=a} \frac{(-1)^{\nu} a_{\nu}}{(a+p-\nu)^b}. \end{aligned}$$

Tab. 117.

11 est juste, mais il faut supposer $q < 1$ afin d'éviter une discontinuité. Alors on peut développer en série la fonction $\frac{1}{e^x - q} = \frac{e^{-x}}{1 - qe^{-x}}$, comme M^r HOPPE a fait. Pourtant la forme suivante semble meilleure.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x - q} dx = \Gamma(p+2) \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{q^{\nu}}{(1+\nu)^{p+2}}, \quad q < 1.$$

¹⁾ M^r B. de H. a traité cette intégrale dans son Exposé (pag. 433). Là aussi bien que dans la formule fondamentale II (152) (pag. 137) il faut

écrire $\sum_0^a$ au lieu de $\sum_0^{a+1}$.

Tab. 118.

4. Voyez Tab. 117 N:o 11.

5 a deux fautes: il s'y trouve e^{-px} au lieu de e^{-bx} et 1^a pour $I(a)$. Lisez donc

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-bx}}{1 - e^{-x}} \cdot e^{-x} \cdot x^{a-1} dx = I(a) \sum_{r=1}^{r=b} \frac{1}{r^a}.$$

11 est tirée de Tab. 152 N:o 15. Toutes les deux sont fautives en ce qu'elles ont π^3 au lieu de π^2 , comme on peut montrer directement. Lisez

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-3x}} \cdot e^{-x} \cdot x dx = \frac{2\pi^2}{27}.$$

18 est donnée en forme d'une différence finie. Cette forme est sans doute très concise, mais pourtant une somme finie me semble préférable. Cependant je ne vais pas déduire cette intégrale afin de trouver une telle expression, mais puisque je soupçonne qu'il y a une faute. En posant l'intégrale = J on peut écrire

$$J = p \int_0^{\infty} x^q e^{-px} (e^{-x} - 1)^c dx + c \int_0^{\infty} x^q e^{-(p+1)x} (e^{-x} - 1)^{c-1} dx.$$

Si l'on pose ces intégrales = J_1 , J_2 et q'on développe par la formule du binôme, on aura

$$J_1 = \sum_{r=0}^{r=c} (-1)^r c_r \int_0^{\infty} x^q e^{-(c+p-r)x} dx = I(q+1) \sum_{r=0}^{r=c} \frac{(-1)^r c_r}{(c+p-r)^{q+1}}$$

$$J_2 = \sum_{r=0}^{r=c-1} (-1)^r (c-1)_r \int_0^{\infty} x^q e^{-(c+p-r)x} dx = I(q+1) \sum_{r=0}^{r=c-1} \frac{(-1)^r (c-1)_r}{(c+p-r)^{q+1}}$$

d'après Tab. 113 N:o 5.

En les introduisant dans la valeur de J on trouve

$$\begin{aligned}
 J &= \Gamma(q+1) \left[\sum_{\nu=0}^{\nu=c} \frac{(-1)^\nu c_\nu \cdot p}{(c+p-\nu)^{q+1}} + \sum_{\nu=0}^{\nu=c-1} \frac{(-1)^\nu (c-1)_\nu \cdot c}{(c+q-\nu)^{q+1}} \right] \\
 &= \Gamma(q+1) \left[\sum_{\nu=0}^{\nu=c-1} \frac{(-1)^\nu \{c_\nu \cdot p + (c-1)_\nu \cdot c\}}{(c+p-\nu)^{q+1}} + \frac{(-1)^c \cdot c_c}{p^q} \right];
 \end{aligned}$$

mais on a

$$(c-1)_\nu = \frac{c-\nu}{c} \cdot c_\nu,$$

donc

$$\begin{aligned}
 c_\nu \cdot p + (c-1)_\nu \cdot c &= (c+p-\nu)c_\nu, \\
 J &= \Gamma(q+1) \left[\sum_{\nu=0}^{\nu=c-1} \frac{(-1)^\nu c_\nu}{(c+p-\nu)^q} + \frac{(-1)^c c_c}{p^q} \right] \\
 &= \Gamma(q+1) \sum_{\nu=0}^{\nu=c} \frac{(-1)^\nu c_\nu}{(c+p-\nu)^q}.
 \end{aligned}$$

Excepté le facteur $\Gamma(q+1)$ cette formule s'accorde avec celle du texte où il y a $\Gamma(q)$.

Tab. 119.

- 6 ne dérive pas de Tab. 117 N:o 10 selon l'indication, mais on peut l'avoir par Tab. 117 N:o 11. Elle est aussi fautive. En intégrant par parties on aura

$$\int \frac{x^{r+1} dx}{e^x - s} = \frac{x^{r+2}}{(r+2)(e^x - s)} + \frac{1}{r+2} \int \frac{x^{r+2} e^x dx}{(e^x - s)^2}$$

et en introduisant les limites (Tab. 117 N:o 11 ci-dessus)

$$\int_0^\infty \frac{x^{r+2} e^x dx}{(e^x - s)^2} = \Gamma(r+2) \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{s^\nu}{(1+\nu)^{r+2}}.$$

Si l'on change r et s ontere $q - 1$ et p resp. et qu'on multiplie le numérateur et le dénominateur par e^{-2x} , on aura

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{q+1} e^{-x}}{(1 - p e^{-x})^2} dx = \Gamma(q + 2) \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{p^{\nu}}{(1 + \nu)^{q+1}}, \quad p < 1,$$

laquelle diffère beaucoup de la formule du texte.

- 8 Il y a plusieurs fautes d'impression qui sont en partie corrigées, mais l'indication n' en est tout à fait évidente. Je récris donc la formule

$$\int_0^{\infty} \frac{(a+1)e^x - a}{(1 - e^x)^2} e^{-ax} dx = \Gamma(p + 1) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(a + \nu)^p}, \quad p > 1.$$

- 9, 10 sont déduites de Tab. 117 N:o 21, 22, non de N:o 20, 21.

Tab. 120.

1. Une faute est corrigée, une autre reste. La limite inférieure de la somme est $= 0$, non $= 1$.
- 2 est la même intégrale exprimée par la transcendente de LOBATSCHESKY. Elle peut aussi s'exprimer par la mienne. On trouve donc

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{2} L(1) = 0,915965594.$$

- 10, 15, 16 sont exprimées par une transcendente de RAABE. Elles peuvent être remplacées par

$$\int_0^{\infty} \frac{x^q dx}{e^{px} + e^{-px}} = \frac{\Gamma(q + 1)}{p^{q+1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu + 1)^{q+1}}.$$

- 11 est déduite de Tab. 187 N:o 7 (non N:o 6). La déduction directe est la plus facile. Du reste elle est contenue dans l'intégrale précédente.
- 12, 19 sont exprimées par une autre transcendente de RAABE. Elles sont comprises dans la formule

$$\int_0^{\infty} \frac{x^q dx}{e^{px} - e^{-px}} dx = \frac{\Gamma(q+1)}{p^{q+1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^{q+1}}, \quad q > 1.$$

20 est fautive: lisez $4a$ au lieu de $2a$ dans le dénominateur.
Voyez N:o 18.

Tab. 121.

- 3, 4 sont deduites de Tab. 152 N:o 19 et 20, mais M:r B. d. H. a ajouté la condition: $p < 1$. Lisez plutôt: $p > 1$.
5, 6, 8, 9. Changez la condition contre $p > q$. En N:o 9 lisez $\text{Sec } \frac{3q\pi}{2p}$ au lieu de $\text{Sec } \frac{3q\pi}{2q}$.
10 s'obtient par Tab. 154 N:o 4 (non N:o 2) ou directement.
-

Tab. 122.

7. Il y avait plusieurs fautes dont M:r B. d. H. a corrigé quelques-unes. Je récris la formule.

$$\int_0^{\infty} \frac{(p+q)(e^{(p-q)x} + e^{-(p-q)x}) - (p-q)(e^{(p+q)x} + e^{-(p+q)x})}{(e^{px} + e^{-px})^2} \cdot x^2 dx$$

$$= \frac{\pi^2}{2p^2} \cdot \text{Sin } \frac{q\pi}{2p} \cdot \text{Sec } \frac{2q\pi}{2p}, \quad p > q.$$

- 8 a une faute pareille que N:o 7. La formule est

$$\int_0^{\infty} \frac{(p+q)(e^{(p-q)x} + e^{-(p-q)x}) + (p-q)(e^{(p+q)x} + e^{-(p+q)x})}{(e^{px} - e^{-px})^2} \cdot x^2 dx$$

$$= \frac{\pi^2}{2p^2} \text{Sec } \frac{2q\pi}{2p}, \quad p > q.$$

12. Lisez 2^{2a} au lieu de 2^{2a+1} .

- 14, 15 sont exprimées par les transcendentes de RAABE. On peut avoir leurs valeurs en intégrant par parties dans Tab. 120 N:o 15 et 19 ci-dessus.
-

Tab. 124.

1 est fautive avec Tab. 153 N:o 3. Le juste formule est

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x - 1 + e^{-x}} = \frac{4}{9\sqrt{3}} H\left(\frac{1}{3}\right) = 1,1719536193.$$

2 est fautive, mais sa juste valeur est un quart de N:o 1.

3. À droite il faut échanger λ contre $\frac{\pi}{2} - \lambda$, comme on peut voir aussi par la formule suivante. Si l'on emploie ma transcendente au lieu de celle de LOBATSCHESKY, on aura

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x + e^{-x} - 2 \cos \lambda} = \frac{2}{\sin 2\lambda} \left[\left(\frac{2\lambda}{\pi} \right)^2 H\left(\frac{2\lambda}{\pi} \right) - \lambda (2 \sin \lambda) \right].$$

10 est exprimée par une transcendente de RAABE, mais elle peut aussi s'exprimer comme il suit. D'abord on a

$$J = \int_0^{\infty} \frac{x^{2a} dx}{e^x + e^{-x} - 2 \cos 2p\pi} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} x^{2a} dx}{e^{-2x} - 2e^{-x} \cos 2p\pi + 1}.$$

Par développement en serie¹⁾ on trouve

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{\sin 2p\pi} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \sin 2\nu p\pi \int_0^{\infty} x^{2a} e^{-\nu x} dx \\ &= \frac{\Gamma(2a+1)}{\sin 2p\pi} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{\sin 2\nu p\pi}{\nu^{2a+1}}. \quad p < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Plusieurs formules précédentes sont des cas particuliers de celle-ci. Prenons N:o 8 comme exemple et posons $2p\pi = \lambda$. Nous aurons donc

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x + e^{-x} - 2 \cos \lambda} = \frac{2}{\sin \lambda} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{\sin \nu \lambda}{\nu^3}.$$

¹⁾ Voyez p. ex. SCHLÖMILCH, Alg. Analysis 5:te Aufl. Jena 1873 pag. 265.

Cette série infinie peut être sommée. Si dans la formule connue¹⁾

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{\sin \nu \lambda}{\nu} = \frac{\pi}{2} - \frac{\lambda}{2}$$

on multiplie par $d\lambda$ et intègre, on aura

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{\cos \nu \lambda}{\nu^2} = C - \frac{\pi \lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{4} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi \lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{4},$$

parce qu'on a pour $\lambda = 0$

$$C = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{1}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Multiplions encore par $d\lambda$ et intégrons: puisque la constante devient $= 0$, nous aurons

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{\sin \nu \lambda}{\nu^3} = \frac{\pi^2 \lambda}{6} - \frac{\pi \lambda^2}{4} + \frac{\lambda^3}{12}$$

donc

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x + e^{-x} - 2 \cos \lambda} = \frac{2\lambda}{\sin \lambda} \left[\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi \lambda}{4} + \frac{\lambda^2}{12} \right].$$

11, 12 sont des cas particuliers de N:o 10 et proviennent en posant $p = \frac{1}{3}$, $p = \frac{1}{6}$ resp.

Tab. 125.

4, 5. N'ayant pas l'occasion de consulter les ouvrages de LOBATSCHESKY j'ai tâché de vérifier ces formules par le calcul. D'abord je vais chercher N:o 5. En posant $e^{-x} = y$ on aura

$$J = \int_0^{\infty} \frac{(e^x - e^{-x})x dx}{e^{2x} + e^{-2x} + e^{2p} + e^{-2p}} = \int_0^1 \frac{(y^2 - 1)y dy}{1 + (e^{2p} + e^{-2p})y^2 + y^4}.$$

¹⁾ Voyez CATALAN, Traité élém. des séries. Paris 1860 pag. 106.

Par intégration indéfinie on trouve¹⁾

$$\int \frac{y^2 dy}{1 + (e^{2p} + e^{-2p})y^2 + y^4} = - \frac{e^{-2p}}{e^{2p} - e^{-2p}} \int \frac{dy}{y^2 + e^{-2p}} \\ + \frac{e^{2p}}{e^{2p} - e^{-2p}} \int \frac{dy}{y^2 + e^{2p}}$$

$$\int \frac{dy}{1 + (e^{2p} + e^{-2p})y^2 + y^4} = \frac{1}{e^{2p} - e^{-2p}} \int \frac{dy}{y^2 + e^{-2p}} \\ - \frac{1}{e^{2p} - e^{-2p}} \int \frac{dy}{y^2 + e^{2p}}$$

or

$$\int \frac{(y^2 - 1)dy}{1 + (e^{2p} + e^{-2p})y^2 + y^4} \\ = - \frac{1}{e^p - e^{-p}} [\text{Arc tg } (ye^p) - \text{Arc tg } (ye^{-p})].$$

En intégrant par parties le terme intégré s'évanouit pour les deux limites et on trouve

$$J = \frac{1}{e^p - e^{-p}} \left[\int_0^1 \frac{\text{Arc tg } (ye^p)}{y} dy - \int_0^1 \frac{\text{Arc tg } (ye^{-p})}{y} dy \right]$$

ou en faisant $e^{-p} = \text{tg } \alpha$

$$J = \frac{1}{2} \text{tg } 2\alpha \left[\int_0^1 \frac{\text{Arc tg } (y \text{ Cot } \alpha)}{y} dy - \int_0^1 \frac{\text{Arc tg } (y \text{ tg } \alpha)}{y} dy \right].$$

Si l'on pose $y = \text{tg } \alpha \text{ tg } \varphi$ dans la première intégrale et $y = \text{Cot } \alpha \text{ tg } \varphi$ dans la seconde, il vient

$$J = \text{tg } 2\alpha \left[\int_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha} \frac{\varphi d\varphi}{\text{Sin } 2\varphi} - \int_0^{\alpha} \frac{\varphi d\varphi}{\text{Sin } 2\varphi} \right]$$

ou en faisant $\varphi = \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi}\right)\psi$, $\varphi = \frac{2\alpha}{\pi}\psi$ resp.

¹⁾ Voyez MINDING, Integral-Tafeln pag. 73.

$$J = \operatorname{tg} 2\alpha \left[\left(1 - \frac{2\alpha}{\pi}\right)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\psi d\psi}{\operatorname{Sin}\left(2 - \frac{4\alpha}{\pi}\right)\psi} - \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\psi d\psi}{\operatorname{Sin} \frac{4\alpha}{\pi} \psi} \right]$$

$$= \operatorname{tg} 2\alpha \left[\left(1 - \frac{2\alpha}{\pi}\right)^2 L\left(2 - \frac{4\alpha}{\pi}\right) - \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2 L\left(\frac{4\alpha}{\pi}\right) \right].$$

Dans mon traité précité j'ai démontré sur la transcendente $L(\dots)$ le théorème

$$(1-b)^2 L(1-b) - (1+b)^2 L(1+b) = \pi l \operatorname{tg}(1-b) \frac{\pi}{4},$$

mais avant que le théorème puisse être employé, il faut introduire le facteur 4, c'est à dire il faut écrire

$$J = \frac{1}{4} \operatorname{tg} 2\alpha \left[\left(2 - \frac{4\alpha}{\pi}\right)^2 L\left(2 - \frac{4\alpha}{\pi}\right) - \left(\frac{4\alpha}{\pi}\right)^2 L\left(\frac{4\alpha}{\pi}\right) \right].$$

Maintenant on a

$$1-b = \frac{4\alpha}{\pi}, \quad 1+b = 2 - \frac{4\alpha}{\pi}$$

et par suite

$$J = -\frac{\pi}{4} \operatorname{tg} 2\alpha \cdot l \operatorname{tg} \alpha :$$

mais par ce qui précède on voit que

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2e^{-p}}{1 - e^{-2p}} = \frac{2}{e^p - e^{-p}}, \quad l \operatorname{tg} \alpha = -p;$$

donc nous trouvons

$$J = \int_0^{\infty} \frac{(e^x - e^{-x})x dx}{e^{2x} + e^{-2x} + e^{2p} - e^{-2p}} = \frac{p}{2} \cdot \frac{\pi}{e^p - e^{-p}}$$

ou la formule N:o 5.

La formule N:o 4 est au fond la même que N:o 5, car la valeur montre que p est > 1 . Pour éviter de la confusion j'écrirai dans N:o 4 q au lieu de p , or

$$J_1 = \int_0^{\infty} \frac{(e^x - e^{-x})x dx}{e^{2x} + e^{-2x} + 2q}, \quad q > 1.$$

En faisant dans N:o 5 $e^{2p} + e^{-2q} = 2q$ on trouve

$$e^p = \sqrt{\frac{1}{2}(q+1)} + \sqrt{\frac{1}{2}(q-1)}, \quad e^{-p} = \sqrt{\frac{1}{2}(q+1)} - \sqrt{\frac{1}{2}(q-1)}$$

donc

$$e^p - e^{-p} = \sqrt{2(q-1)}, \quad p = \frac{\sqrt{q+1} + \sqrt{q-1}}{\sqrt{2}}.$$

En introduisant ces valeurs en N:o 5 on aura

$$\int_0^\infty \frac{(e^x - e^{-x})x dx}{e^{2x} + e^{-2x} + 2q} = \frac{\pi}{2\sqrt{2(q-1)}} \frac{\sqrt{q+1} + \sqrt{q-1}}{\sqrt{2}}.$$

Cette valeur s'accorde avec N:o 4, quoique elle semble différente.

6. On peut l'évaluer directement à l'aide d'une formule de M:R MINDING, mais plus facilement en substituant λi pour p dans N:o 5. Alors on trouvera

$$\int_0^\infty \frac{(e^x - e^{-x})x dx}{e^{2x} + e^{-2x} + 2 \cos 2\lambda} = \frac{\lambda i}{2} \cdot \frac{\pi}{e^{\lambda i} - e^{-\lambda i}} = \frac{\pi \lambda}{4 \sin \lambda}.$$

7. En posant $e^{-x} = y$ on trouvera

$$J = \int_0^\infty \frac{(e^x + e^{-x})x dx}{e^{2x} + e^{-2x} - 2 \cos 2\lambda} = - \int_0^1 \frac{(1+y^2)y dy}{1 - 2y^2 \cos 2\lambda + y^4}.$$

En intégrant par parties et en employant une formule de MINDING on aura

$$\begin{aligned} \int \frac{(1+y^2)y dy}{1 - 2y^2 \cos 2\lambda + y^4} &= \frac{y}{2 \sin \lambda} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{2y \sin \lambda}{1 - y^2} \\ &\quad - \frac{1}{2 \sin \lambda} \int \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{2y \sin \lambda}{1 - y^2} \cdot \frac{dy}{y}. \end{aligned}$$

Lorsque on introduit les limites, le terme intégré s'évanouit et on trouve

$$J = \frac{1}{2 \sin \lambda} \int_0^1 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{2y \sin \lambda}{1 - y^2} \cdot \frac{dy}{y}.$$

Afin de pouvoir exprimer cette intégrale par ma transcendente il est nécessaire que nous subdivisions l'arc. En faisant

$$\text{Arc tg } \frac{2y \sin \lambda}{1 - y^2} = \text{Arc tg } \frac{y}{z - uy} + \text{Arc tg } \frac{y}{z + uy}$$

nous avons à déterminer les quantités z et u . Selon une formule bien connue on a

$$\text{Arc tg } \frac{y}{z - uy} + \text{Arc tg } \frac{y}{z + uy} = \text{Arc tg } \frac{2yz}{z^2 - (u^2 + 1)y^2};$$

en multipliant le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{2y \sin \lambda}{1 - y^2}$ par la quantité indéterminée v on aura

$$\frac{2yz}{z^2 - (u^2 + 1)y^2} = \frac{2vy \sin \lambda}{v - vy^2}$$

et par comparaison

$$z = v \sin \lambda, \quad z^2 = v, \quad u^2 + 1 = v.$$

Ces équations donnent

$$v = \frac{1}{\sin^2 \lambda}, \quad z = \frac{1}{\sin \lambda}, \quad u = \frac{\cos \lambda}{\sin \lambda}.$$

En substituant les valeurs de z et u on trouve

$$\text{Arc tg } \frac{2y \sin \lambda}{1 - y^2} = \text{Arc tg } \frac{y \sin \lambda}{1 - y \cos \lambda} + \text{Arc tg } \frac{y \sin \lambda}{1 + y \cos \lambda}$$

et par suite

$$J = \frac{1}{2 \sin \lambda} \left[\int_0^1 \frac{dy}{y} \text{Arc tg } \frac{y \sin \lambda}{1 - y \cos \lambda} + \int_0^1 \frac{dy}{y} \text{Arc tg } \frac{y \sin \lambda}{1 + y \cos \lambda} \right].$$

Posons les intégrales entre les crochets = J_1 , J_2 resp. en faisant dans la première $\text{Arc tg } \frac{y \sin \lambda}{1 - y \cos \lambda} = \varphi$, nous aurons

$$y = \frac{\sin \varphi}{\sin (\lambda + \varphi)}, \quad ly = l \sin \varphi - l \sin (\lambda + \varphi)$$

$$\frac{dy}{y} = \cot \varphi - \cot (\lambda + \varphi).$$

Aux limites $y = 0$, $y = 1$ repndent resp. $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}(\pi - \lambda)$. Ainsi nous trouvons

$$J_1 = \int_0^{\frac{1}{2}(\pi - \lambda)} \varphi \operatorname{Cot} \varphi d\varphi - \int_0^{\frac{1}{2}(\pi - \lambda)} \varphi \operatorname{Cot} (\lambda + \varphi) d\varphi.$$

En faisant $\varphi = \left(1 - \frac{\lambda}{\pi}\right)\psi$, on trouve

$$\int_0^{\frac{1}{2}(\pi - \lambda)} \varphi \operatorname{Cot} \varphi d\varphi = \left(1 - \frac{\lambda}{\pi}\right)^2 H\left(1 - \frac{\lambda}{\pi}\right);$$

en faisant d'abord $\varphi = u - \lambda$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}(\pi - \lambda)} \varphi \operatorname{Cot} (\lambda + \varphi) d\varphi &= \int_0^{\frac{1}{2}(\pi + \lambda)} u \operatorname{Cot} u du - \int_0^{\lambda} u \operatorname{Cot} u du - \lambda \int_{\lambda}^{\frac{1}{2}(\pi + \lambda)} \operatorname{Cot} u du \\ &= \left(1 + \frac{\lambda}{\pi}\right)^2 H\left(1 + \frac{\lambda}{\pi}\right) - \left(\frac{2\lambda}{\pi}\right)^2 H\left(\frac{2\lambda}{\pi}\right) + \lambda U\left(2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\lambda\right), \end{aligned}$$

lorsqu'on fait $u = \left(1 + \frac{\lambda}{\pi}\right)\omega$, $u = \frac{2\lambda}{\pi}\omega$ resp. En introduisant les valeurs trouvées on aura

$$\begin{aligned} J_1 &= \left(1 - \frac{\lambda}{\pi}\right)^2 H\left(1 - \frac{\lambda}{\pi}\right) - \left(1 + \frac{\lambda}{\pi}\right)^2 H\left(1 + \frac{\lambda}{\pi}\right) + \left(\frac{2\lambda}{\pi}\right)^2 H\left(\frac{2\lambda}{\pi}\right) \\ &\quad - \lambda U\left(2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\lambda\right). \end{aligned}$$

Dans le traité mentionnée dans l'introduction j'ai démontré les formules

$$(1 - b)^2 H(1 - b) = \frac{\pi}{2} U\left(2 \operatorname{Cos} \frac{b\pi}{2}\right) + b^2 [L(2b) - H(2b)],$$

$$(1 + b)^2 H(1 + b) = \frac{\pi}{2} U\left(2 \operatorname{Cos} \frac{b\pi}{2}\right) - b^2 [L(2b) - H(2b)]$$

d'où en posant $b = \frac{\lambda}{\pi}$ on trouve

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\lambda}{\pi}\right)^2 H\left(1 - \frac{\lambda}{\pi}\right) - \left(1 + \frac{\lambda}{\pi}\right)^2 H\left(1 + \frac{\lambda}{\pi}\right) &= \frac{2\lambda^2}{\pi^2} \left[L\left(\frac{2\lambda}{\pi}\right) - H\left(\frac{2\lambda}{\pi}\right) \right] \\ &= \frac{2\lambda^2}{\pi^2} \left[H\left(\frac{\lambda}{\pi}\right) - 2H\left(\frac{2\lambda}{\pi}\right) \right]. \end{aligned}$$

Si l'on substitue cela dans la valeur de J_1 , on trouvera

$$J_1 = \frac{2\lambda^2}{\pi^2} H\left(\frac{\lambda}{\pi}\right) - \lambda \mathcal{U}(2 \sin \tfrac{1}{2}\lambda).$$

L'intégrale J_2 sera obtenue, si l'on met $\pi - \lambda$ pour λ dans la valeur de J_1 . De cette manière nous aurons

$$J_2 = 2\left(1 - \frac{\lambda}{\pi}\right)^2 H\left(1 - \frac{\lambda}{\pi}\right) - (\pi - \lambda) \mathcal{U}(2 \cos \tfrac{1}{2}\lambda)$$

ou par une des formules précédentes

$$J_2 = \frac{2\lambda^2}{\pi^2} H\left(\frac{\lambda}{\pi}\right) - \left(\frac{2\lambda}{\pi}\right)^2 H\left(\frac{2\lambda}{\pi}\right) + \lambda \mathcal{U}(2 \cos \tfrac{1}{2}\lambda).$$

Or, revenons à l'intégrale J : nous trouverons

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2 \sin \lambda} \left[\frac{4\lambda^2}{\pi^2} \left\{ H\left(\frac{\lambda}{\pi}\right) - H\left(\frac{2\lambda}{\pi}\right) \right\} - \lambda \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\lambda \right] \\ &= \frac{1}{2 \sin \lambda} \left[\frac{4\lambda^2}{\pi^2} L\left(\frac{2\lambda}{\pi}\right) - \lambda \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\lambda \right]. \end{aligned}$$

9 est exprimée par une transcendente de RAABE. Par une méthode auparavant (Tab. 124 N:o 10) mise en usage on trouve

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2p\pi - e^{-x}}{e^x + e^{-x} - 2 \cos 2p\pi} \cdot x^{2a+1} dx = \Gamma 2(a+1) \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{\cos 2\nu p\pi}{\nu^{2a+2}}.$$

16, 17 peuvent être jointes dans la formule plus générale

$$\int_0^{\infty} \frac{(e^x - e^{-x}) x^{2a+1} dx}{(e^x + e^{-x} - 2 \cos 2p\pi)^2} = \frac{\Gamma 2(a+1)}{\sin 2p\pi} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{\sin 2\nu p\pi}{\nu^{2a+1}}, \quad p < \tfrac{1}{2}$$

quelle on aura en intégrant par parties en Tab. 124 N:o 10.

Tab. 126.

Plusieurs formules de cette table sont fautives, comme M^r B. d. H. déjà a remarqué. J'ignore pourquoi il n'y a compris N:o 3 qui est $= \infty$.

8, 9. Ajoutez $1 > p > 0$.

14. M:r B. d. H. dit que cette formule ne vaut que pour b negative. Il a fait la même remarque sur N:o 10, 11, 12. Quant au N:o 14 M:r OETTINGER en a donné une valeur, mais je ne sais comment il l'a trouvée. En faisant $b = -\beta$ on trouve

$$\int_0^{\infty} x^{\beta-1} e^{-x^a} dx = \frac{1}{a} \Gamma\left(\frac{\beta}{a}\right) \quad \beta > 0.$$

15. LAPLACE a donné

$$\int_0^{\infty} x^{-p} e^{xi} dx = \frac{q}{1-p} \cdot (-1)^{\frac{1-p}{2}} \quad \text{où } q = 0,906402.$$

Cependant M:r MINDING a montré¹⁾ que l'on a

$$\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{ix} dx = \frac{e^{\frac{n\pi i}{2}} \Gamma(n)}{i^n}, \quad n < 1.$$

En posant $n = 1 - p$ ($p < 1$), $\beta = 1$, la formule de M:r MINDING donne

$$\int_0^{\infty} x^{-p} e^{xi} dx = e^{(1-p)\frac{\pi i}{2}} \Gamma(1-p). \quad p < 1.$$

Parce qu'on a $e^{\pi i} = -1$, il s'ensuit que

$$e^{(1-p)\frac{\pi i}{2}} = (-1)^{\frac{1-p}{2}}, \quad \text{donc } q = (1-p)\Gamma(1-p) = \Gamma(2-p).$$

La quantité q est par conséquent variable avec p , non constante. Cette quantité se trouve en plusieurs endroits de ces tables. Toutes les valeurs qui la contiennent sont fautives, mais les valeurs justes sont données par autres auteurs.

17 est fautive. Voyez Tab. 146 N:o 5.

¹⁾ Voyez Intégral-Tafeln pag. 157.

Tab. 127.

- 1 est fautive. Lisez: $U(1-p)$, $p < 1$.
 6. Voyez Tab. 128 N:o 3 ci-dessous.
 9. Ajoutez la condition $q < 1$.
 12, 14, 15. Voyez Tab. 128 N:o 3 ci-dessous.
 25 est deduite de Tab. 168 N:o 9, avant qu'elle ait été corrigée. Il faut que la limite inférieure de la première somme soit 0, non 1. Pourtant je préfère la forme qu'elle peut recevoir à l'aide d'une formule de M:r B. d. H. dans son Exposé (pag. 348), savoir

$$\int_0^{\infty} (1 - e^{-px})^a \frac{e^{-x}}{x^2} dx = \sum_{v=0}^{v=a} (-1)^{a+v} a_v \{(a-v)p+1\} U\{(a-v)p+1\}.$$

28. Lisez $\sum_{v=0}^{v=a}$ au lieu de $\sum_{v=1}^{v=\infty}$.

31. Lisez $-\frac{q}{x^3}$ au lieu de $+\frac{q}{x^3}$.

Tab. 128.

3. D'abord j'observe que la condition doit être $q < c$, non $a < c$. La valeur de l'intégrale est donnée par LAPLACE et CAUCHY. Faute de journal de l'École polyt. je ne sais comment CAUCHY l'a trouvée. Au contraire j'ai eu l'occasion de consulter le lieu cité de la Théorie Analyt. des probabilités, savoir l'art. 41 où en effet l'intégrale se trouve (pag. 163) et porte la signature (μ'''). La méthode employée par LAPLACE lui est propre. Elle consiste au fond à représenter une fonction par une intégrale définie. En l'art. 40 (pag. 158) il donne la formule

$$s^m = \frac{\int_0^{\infty} e^{-sx} x^{m-1} dx}{\int_0^{\infty} e^{-x} x^{m-1} dx} \dots\dots\dots (a).$$

où j'ai changé ses i et c contre m et e , puisque on a coutûme maintenant de désigner l'unité imaginaire par la lettre i et la base des logarithmes naturels par e , non par c , comme LAPLACE faisait. La formule (a) que LAPLACE a déduite avec un peu de peine n'est en effet qu'une identité en conséquence des formules à présent usuelles

$$\int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-x} dx = \Gamma(m), \quad \int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-sx} dx = \frac{\Gamma(m)}{s^m}.$$

En prenant les différences finies ($\Delta s = 1$) dans (a) on trouvera

$$\Delta^n \frac{1}{s^m} = \frac{\int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-sx} (e^{-x} - 1)^n dx}{\int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-x} dx}$$

ou

$$\int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-sx} (e^{-x} - 1)^n dx = \Gamma(m) \Delta^n \frac{1}{s^m}.$$

LAPLACE a obtenu sa formule (μ''') en posant $-m$ au lieu de m dans la formule (a), mais une telle procédure n'est point permise, car $\Gamma(m)$ devient $= \infty$ pour un argument négatif. Pourtant il ne s'ensuit que la formule (μ''') est fautive. LAPLACE la déduit encore d'une autre manière qui ne paraît pas bien simple. Cela étant je croirais qu'il ne serait inconvenable, si je tacherais de trouver l'intégrale par une autre voie. Mon point de départ soit donc l'intégrale proposée

$$J = \int_0^{\infty} e^{-bx} (e^{-x} - 1)^c \frac{dx}{x^{q+1}}$$

dans laquelle je pose $q = r + \beta$ où $r =$ un nombre entier, $\beta < 1$, $q < c$. Alors nous aurons

$$J = \int_0^{\infty} e^{-bx} (e^{-x} - 1)^c \cdot \frac{dx}{x^{r+\beta+1}}.$$

En développant $(e^{-x} - 1)^c$ par la formule du binôme il viendra

$$J = \sum_{\nu=0}^{\nu=c} (-1)^{\nu} c_{\nu} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(b+c-\nu)x}}{x^{r+\beta+1}} dx.$$

Considérons d'abord l'intégrale indéfinie $\int \frac{e^{-ax}}{x^{r+\beta+1}} dx$ et intégrons par parties: il viendra

$$\int \frac{e^{-ax}}{x^{r+\beta+1}} dx = -\frac{e^{-ax}}{(r+\beta)x^{r+\beta}} - \frac{a}{r+\beta} \int \frac{e^{-ax}}{x^{r+\beta}} dx.$$

En appliquant cette formule $r+1$ fois de suite nous aurons

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{-ax}}{x^{r+\beta+1}} dx &= -\frac{e^{-ax}}{\Gamma(r+\beta+1)} \sum_{\mu=0}^{\mu=r} \frac{(-1)^{\mu} a^{\mu} \Gamma(r+\beta-\mu)}{x^{r+\beta-\mu}} \\ &+ \frac{(-1)^{r+1} a^{r+1} \Gamma(\beta)}{\Gamma(r+\beta+1)} \int \frac{e^{-ax}}{x^{\beta}} dx. \end{aligned}$$

Si nous posons $b+c-\nu$ pour a , il viendra

$$\begin{aligned} \int e^{-\frac{(b+c-\nu)x}{x^{r+\beta+1}}} dx &= -\frac{e^{-(b+c-\nu)x}}{\Gamma(r+\beta+1)} \sum_{\mu=0}^{\mu=r} \frac{(-1)^{\mu} (b+c-\nu)^{\mu} \Gamma(r+\beta-\mu)}{x^{r+\beta-\mu}} \\ &+ \frac{(-1)^{r+1} (b+c-\nu)^{r+1} \Gamma(\beta)}{\Gamma(r+\beta+1)} \int \frac{e^{-(b+c-\nu)x}}{x^{\beta}} dx \end{aligned}$$

et puis

$$\begin{aligned} &\int \frac{e^{-bx}(e^{-x}-1)^c}{x^{r+\beta+1}} dx \\ &= -\sum_{\nu=0}^{\nu=c} \frac{(-1)^{\nu} c_{\nu} e^{-(b+c-\nu)x}}{\Gamma(r+\beta+1)} \sum_{\mu=0}^{\mu=r} \frac{(-1)^{\mu} (b+c-\nu)^{\mu} \Gamma(r+\beta-\mu)}{x^{r+\beta-\mu}} \\ &+ \frac{(-1)^{r+1} \Gamma(\beta)}{\Gamma(r+\beta+1)} \sum_{\nu=0}^{\nu=c} (-1)^{\nu} c_{\nu} (b+c-\nu)^{r+1} \int \frac{e^{-(b+c-\nu)x}}{x^{\beta}} dx \end{aligned}$$

Au premier terme du membre droit en peut donner la forme

$$-\frac{1}{\Gamma(r+\beta+1)} \sum_{\mu=0}^{\mu=r} \frac{(-1)^{\mu} \Gamma(r+\beta-\mu)}{x^{r+\beta-\mu}} \sum_{r=0}^{r=c} (-1)^r c_r (b+c-r)^{\mu} e^{-(b+c-r)x}$$

ce qui est la même chose que si l'on pose de suite $b+c$, $b+c-1$, $b+c-2 \dots$ pour a dans la valeur de

$$\int \frac{e^{-ax}}{x^{r+\beta+1}} \text{ et qu'on rassemble les termes qui ont la même}$$

puissance de x dans le dénominateur. Tous les termes intégrés s'évanouissent pour $x = \infty$. Pour $x = 0$ on a

$$\sum_{r=0}^{r=c} (-1)^r c_r (b+c-r)^{\mu} e^{-(b+c-r)x} = 0$$

en vertu de la formule connue

$$n_0 m^s - n_1 (m-1)^s + n_2 (m-2)^s - \dots + (-1)^{n-1} n_{n-1} (m-n+1)^s + (-1)^n n_n (m-n)^s = 0,$$

pourvu qu'on ait $m > n$, $n > s$. Dans le cas actuel on a

$$m = b+c, \quad n = c, \quad s = \mu;$$

mais μ est au plus $= r$, donc $< c$ par l'hypothèse. Les conditions sont donc remplies. Mais le dénominateur $x^{r+\beta-\mu}$ s'annule aussi pour $x = 0$, de sorte que le tout devienne indéterminé. En différentiant le numérateur et le dénominateur de la fraction

$$\frac{\sum_{r=0}^{r=c} (-1)^r c_r (b+c-r)^{\mu} e^{-(b+c-r)x}}{x^{r+\beta-\mu}}$$

$r+1-\mu$ fois de suite on aura

$$\pm x^{1-\beta} \sum_{\nu=0}^{\nu=c} (-1)^{\nu} c_{\nu} (b+c-\nu)^{r+1} e^{-(b+c-\nu)x}.$$

La somme est $= 0$ pour $r+1 < c$, mais $= \Gamma(c+1)$ pour $r+1 = c$ ¹⁾; le facteur $x^{1-\beta}$ est $= 0$ pour $x = 0$, parce que par l'hypothèse on a $\beta < 1$. Il s'ensuit que les termes hors le signe de l'intégration s'évanouissent aussi pour $x = 0$.

Par conséquence on a simplement

$$J = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(r+\beta+1)} \sum_{\nu=0}^{\nu=c} (-1)^{\nu+r+1} c_{\nu} (b+c-\nu)^{r+1} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(b+c-\nu)x}}{x^{\beta}} dx.$$

Comme en outre on a

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-(b+c-\nu)x}}{x^{\beta}} dx = \frac{\Gamma(1-\beta)}{(b+c-\nu)^{1-\beta}},$$

on trouve enfin

$$\begin{aligned} J &= \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(r+\beta+1)} \sum_{\nu=0}^{\nu=c} (-1)^{\nu+r+1} c_{\nu} (b+c-\nu)^{r+\beta} \\ &= \frac{\pi}{\sin \beta\pi \Gamma(r+\beta+1)} \sum_{\nu=0}^{\nu=c} (-1)^{\nu+r+1} c_{\nu} (b+c-\nu)^{r+\beta}. \end{aligned}$$

C'est la formule qui puisse remplacer celle de LAPLACE.

L'intégrale Tab. 127 N:o 6 n'est qu'une cas particulier de celle-là: en y posant $r = 0$ on aura

$$\int_0^{\infty} e^{-bx} (e^{-x} - 1)^c \frac{dx}{x^{\beta+1}} = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\beta} \sum_{\nu=0}^{\nu=c} (-1)^{\nu+1} c_{\nu} (b+c-\nu)^{\beta}$$

où il faut poser $\beta = 0$ afin d'obtenir l'intégrale en question. Mais alors le membre droit devient indéterminé,

¹⁾ EYTELWEIN l. c. Tom I pag. 567.

puisque $(b + c - r)^\beta$ est = 1 pour $\beta = 0$ et la somme des coefficients binomiaux = 0. Cependant on trouve de la manière usuelle

$$\lim_{\beta=0} \frac{\sum_{r=0}^{r=c} (-1)^{r+1} c_r (b + c - r)^{\beta}}{\beta} = \sum_{r=0}^{r=c} (-1)^{r+1} c_r \mathcal{L}(b + c - r)$$

et par suite

$$\int_0^{\infty} e^{-bx} (e^{-x} - 1)^c \frac{dx}{x} = - \sum_{r=0}^{r=c} (-1)^r c_r \mathcal{L}(b + c - r)$$

qui est l'intégrale cherchée, si l'on change b et c avec a et b resp.

De la même manière on trouve Tab. 127 N:o 12

$$\int_0^{\infty} e^{-px} (e^{-x} - 1)^a \frac{dx}{x^2} = \sum_{r=0}^{r=a} (-1)^r a_r (a + p - r) \mathcal{L}(a + p - r).$$

Tab. 127 N:o 14 et 15 sont les mêmes que Tab. 128 N:o 3 après changement de quelques lettres.

5. En substituant en N:o 3 qx au lieu de x et en posant $r = c - 1$, $b = \frac{p}{q}$, on aura

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-px} (e^{-qx} - 1)^c \cdot \frac{dx}{x^{c+\beta}} \\ = \frac{\Gamma(\beta) \Gamma(1-\beta)}{\Gamma(c+\beta)} \sum_{r=0}^{r=c} (-1)^{r+c} c_r (p + q(c-r))^{c+\beta-1} \end{aligned}$$

et il s'agira de trouver la limite pour $\beta = 0$. Comme on a

$$\Gamma(c + \beta) = (c + \beta - 1)(c + \beta - 2) \dots (\beta + 1) \cdot \beta \Gamma(\beta)$$

il faut déterminer

$$\lim_{r=0} \frac{\sum_{r=0}^{r=c} (-1)^{c+r} c_r (p + q(c-r))^c + \beta - 1}{(c + \beta - 1)(c + \beta - 2) \dots (\beta + 1)\beta}.$$

Par la méthode usuelle on trouve cette limite égale à

$$\frac{\sum_{r=0}^{r=c} (-1)^{c+r} c_r (p + q(c-r))^{c-1} U(p + q(c-r))}{\Gamma(c)},$$

donc

$$\int_0^\infty e^{-px} (e^{-qx} - 1)^c \cdot \frac{dx}{x^c} \\ = \frac{1}{\Gamma(c)} \sum_{r=0}^{r=c} (-1)^{c+r} c_r (p + q(c-r))^{c-1} U(p + q(c-r)).$$

- 6 provient du N:o 3 par une substitution. Cette formule aussi bien que N:o 5 est obtenue de Tab. 168 N:o 18 et 17 resp. qui en son tour peuvent être tirées de celles-ci.

Tab. 129.

12. Lisez $Ei(pq)$ au lieu de $Ei(-pq)$.

Tab. 130.

- 1 à 3. Ces formules peuvent être supprimées comme comprises en N:o 4 et 5.

Tab. 131.

2. On peut l'avoir directement, mais aussi par Tab. 43 N:o 16 (non N:o 19).
 8. Mr B. d. H. dit que cette formule est fautive. Je démontrerai qu'il a parfaitement raison, et en même temps je vais chercher la vraie valeur de l'intégrale en question et avec elle quelques autres qui ne se trouvent pas dans les tables. Cherchons d'abord les quatre intégrales

$$J_1 = \int_0^{\infty} \frac{e^{pxi}}{q + xi} dx = q \int_0^{\infty} \frac{e^{pxi}}{q^2 + x^2} dx - \int_0^{\infty} \frac{xie^{pxi}}{q^2 + x^2} dx$$

$$J_2 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-pxi}}{q - xi} dx = q \int_0^{\infty} \frac{e^{-pxi}}{q^2 + x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{xie^{-pxi}}{q^2 + x^2} dx$$

$$J_3 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-pxi}}{q + xi} dx = q \int_0^{\infty} \frac{e^{-pxi}}{q^2 + x^2} dx - \int_0^{\infty} \frac{xie^{-pxi}}{q^2 + x^2} dx$$

$$J_4 = \int_0^{\infty} \frac{e^{pxi}}{q - xi} dx = q \int_0^{\infty} \frac{e^{pxi}}{q^2 + x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{xie^{pxi}}{q^2 + x^2} dx$$

où les intégrales à droite sont provenues en multipliant le numérateur et le dénominateur à gauche par $q - xi$ et $q + xi$ resp. Selon M:R MINDING¹⁾ on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{pxi}}{q^2 + x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-pxi}}{q^2 + x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{e^{pxi}}{q^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{q} e^{-pq}$$

et d'après Tab. 130 N:o 6

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{pxi}}{q^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2q} e^{-pq} + \frac{i}{2q} [e^{-pq} \text{li}(e^{pq}) - e^{pq} \text{li}(e^{-pq})] \quad \text{-----} \quad (1)$$

donc

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-pxi}}{q^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2q} e^{-pq} - \frac{i}{2q} [e^{-pq} \text{li}(e^{pq}) - e^{pq} \text{li}(e^{-pq})] \quad \text{-----} \quad (2)$$

Si l'on différentie (1) et (2) par rapport à p en observant que l'on a

$$D_p \text{li}(e^{pq}) = \frac{e^{pq}}{p}, \quad D_p \text{li}(e^{-pq}) = \frac{e^{-pq}}{p} \quad \text{-----} \quad (3)$$

on trouvera

¹⁾ Integral-Tafeln pag. 160.

$$\int_0^{\infty} \frac{x i e^{p x i}}{q^2 + x^2} dx = -\frac{\pi}{2} e^{-p q} - \frac{i}{2} [e^{-p q} \text{li}(e^{p q}) + e^{p q} \text{li}(e^{-p q})] \dots (4)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x i e^{-p x i}}{q^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-p q} - \frac{i}{2} [e^{-p q} \text{li}(e^{p q}) + e^{p q} \text{li}(e^{-p q})] \dots (5)$$

Si l'on introduit les valeurs (1), (2), (4), (5) chacune à la place dans $J_1 \dots J_4$, on aura

$$J_1 = \int_0^{\infty} \frac{e^{p x i}}{q + x i} dx = e^{-p q} [\pi + i \text{li}(e^{p q})] \dots (6)$$

$$J_2 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-p x i}}{q - x i} dx = e^{-p q} [\pi - i \text{li}(e^{p q})] \dots (7)$$

$$J_3 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-p x i}}{q + x i} dx = i e^{p q} \text{li}(e^{-p q}) \dots (8)$$

$$J_4 = \int_0^{\infty} \frac{e^{p x i}}{q - x i} dx = -i e^{p q} \text{li}(e^{-p q}) \dots (9)$$

Ces intégrales peuvent être différenciées r fois par rapport q , si l'on a préalablement déterminé les dérivées des membres droits. En posant

$$e^{-p q} [\pi + i \text{li}(e^{p q})] = f(q)$$

et en rappelant les formules (3), on aura

$$f'(q) = -p f(q) + \frac{i \Gamma(1)}{q}$$

$$f''(q) = -p f'(q) - \frac{i \Gamma(2)}{q^2}$$

$$= p^2 f(q) - \frac{p i}{q} \Gamma(1) - \frac{i \Gamma(2)}{q^2}$$

$$f'''(q) = p^2 f'(q) + \frac{p i}{q^2} \Gamma(2) + \frac{i \Gamma(3)}{q^3}$$

$$= -p^3 f(q) + \frac{p^2 i}{q} \Gamma(1) + \frac{p i}{q^2} \Gamma(2) + \frac{i \Gamma(3)}{q^3}.$$

On observe ici une loi évidente, et il y a lieu de présumer que l'on a généralement

$$f^{(r)}(q) = (-1)^r p^r \left[f(q) - i \sum_{\nu=1}^{\nu=r} \frac{\Gamma(\nu)}{(pq)^\nu} \right].$$

Cette formule ayant été vérifiée pour $r = 1, 2, 3$, sa généralité peut être établie de la manière connue de BERNOUILLI. On a donc

$$\begin{aligned} D_q^r e^{-pq} [\pi + i\mathbf{li}(e^{pq})] \\ = (-1)^r p^r \left[e^{-pq} (\pi + i\mathbf{li}(e^{pq})) - i \sum_{\nu=1}^{\nu=r} \frac{\Gamma(\nu)}{(pq)^\nu} \right]. \quad (10) \end{aligned}$$

En posant $-i$ au lieu de i il viendra

$$\begin{aligned} D_q^r e^{-pq} [\pi - i\mathbf{li}(e^{pq})] \\ = (-1)^r p^r \left[e^{-pq} (\pi - i\mathbf{li}(e^{pq})) + i \sum_{\nu=1}^{\nu=r} \frac{\Gamma(\nu)}{(pq)^\nu} \right]. \quad (11) \end{aligned}$$

De la même manière à peu près on trouve

$$D_q^r e^{pq} \mathbf{li}(e^{-pq}) = p^r \left[e^{pq} \mathbf{li}(e^{-pq}) + \sum_{\nu=1}^{\nu=r} (-1)^{\nu-1} \frac{\Gamma(\nu)}{(pq)^\nu} \right]. \quad (12)$$

En différentiant les formules (6) . . . (9) par rapport à q on trouvera maintenant

$$\int_0^\infty \frac{e^{pxi} dx}{(q + xi)^{r+1}} = \frac{p^r e^{-pq}}{\Gamma(r+1)} \left[\pi + i\mathbf{li}(e^{pq}) - i e^{pq} \sum_{\nu=1}^{\nu=r} \frac{\Gamma(\nu)}{(pq)^\nu} \right] \dots \quad (13)$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-pxi} dx}{(q - xi)^{r+1}} = \frac{p^r e^{-pq}}{\Gamma(r+1)} \left[\pi - i\mathbf{li}(e^{pq}) + i e^{pq} \sum_{\nu=1}^{\nu=r} \frac{\Gamma(\nu)}{(pq)^\nu} \right] \dots \quad (14)$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-pxi} dx}{(q + xi)^{r+1}} = \frac{(-1)^r p^r i}{\Gamma(r+1)} \left[e^{pq} \mathbf{li}(e^{-pq}) + \sum_{\nu=1}^{\nu=r} (-1)^{\nu-1} \frac{\Gamma(\nu)}{(pq)^\nu} \right] \quad (15)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{px} dx}{(q - x)^{r+1}} = \frac{(-1)^{r+1} p^r}{\Gamma(r+1)} \left[e^{pq} \text{Ei}(-pq) + \sum_{v=1}^{r=1} (-1)^{v-1} \frac{\Gamma(v)}{(pq)^v} \right]. \quad (16)$$

En faisant dans (13) $p = 1$, $r = p - 1$, on aura

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{xi} dx}{(q + xi)^p} = \frac{e^{-q}}{\Gamma(p)} \left[\pi + i \text{Ei}(e^q) - i e^q \sum_{v=1}^{v=p-1} \frac{\Gamma(v)}{q^v} \right]. \quad \text{-----} \quad (17)$$

C'est la vraie valeur de Tab. 131 N^o 8.

Tab. 132.

Les six dernières formules de cette table sont atteintes de fautes graves. M^r B. d. H. les a corrigées, mais en corrigeant il a été contraint de changer l'ordre naturels des formules. Le mieux, ce me semble, est de récrire toutes ces formules autrement rangées qu'en le texte. Ainsi on trouve

$$9. \int_0^{\infty} \frac{e^{-px} dx}{q^3 + q^2x + qx^2 + x^3} = \frac{1}{2q^2} \left[-e^{pq} \text{Ei}(-pq) + \text{Ci}(pq) (\sin pq + \cos pq) - \left(\frac{\pi}{2} - \text{Si}(pq) \right) (\sin pq - \cos pq) \right]$$

$$10. \int_0^{\infty} \frac{x e^{-px} dx}{q^3 + q^2x + qx^2 + x^2} = \frac{1}{2q} \left[e^{pq} \text{Ei}(-pq) + \text{Ci}(pq) (\sin pq - \cos pq) + \left(\frac{\pi}{2} - \text{Si}(pq) \right) (\sin pq + \cos pq) \right]$$

$$11. \int_0^{\infty} \frac{x^2 e^{-px} dx}{q^3 + q^2x + qx^2 + x^3} = \frac{1}{2} \left[-e^{pq} \text{Ei}(-pq) - \text{Ci}(pq) (\sin pq + \cos pq) + \left(\frac{\pi}{2} - \text{Si}(pq) \right) (\sin pq - \cos pq) \right]$$

$$12. \int_0^{\infty} \frac{e^{-px} dx}{q^3 - q^2x + qx^2 - x^3} = \frac{1}{2q^2} \left[e^{-pq} \text{Ei}(pq) + \text{Ci}(pq) (\sin pq - \cos pq) + \left(\frac{\pi}{2} - \text{Si}(pq) \right) (\sin pq + \cos pq) \right]$$

$$13. \int_0^{\infty} \frac{x e^{-p x} dx}{q^3 - q^2 x + q x^2 - x^3} = \frac{1}{2q} \left[e^{-pq} Ei(pq) - Ci(pq) (\sin pq + \cos pq) \right. \\ \left. + \left(\frac{\pi}{2} - Si(pq) \right) (\sin pq - \cos pq) \right]$$

$$14. \int_0^{\infty} \frac{x^2 e^{-p x} dx}{q^3 - q^2 x + q x^2 - x^3} = \frac{1}{2} \left[e^{-pq} Ei(pq) - Ci(pq) (\sin pq - \cos pq) \right. \\ \left. - \left(\frac{\pi}{2} - Si(pq) \right) (\sin pq + \cos pq) \right].$$

Tab. 133.

6 est fautive. On peut écrire

$$\int_0^{\infty} \left\{ \frac{e^{-xi}}{\left(1 - \frac{xi}{q}\right)^q} + \frac{e^{xi}}{\left(1 + \frac{xi}{q}\right)^q} \right\} dx = q^q \left[\int_0^{\infty} \frac{e^{-xi} dx}{(q - xi)^q} + \int_0^{\infty} \frac{e^{xi} dx}{(q + xi)^q} \right].$$

En faisant $p = 1$, $r = q - 1$ dans les formules (14) et (13) qui sont proposées ici auprès de Tab. 131 N:o 8 on trouvera

$$\int_0^{\infty} \left\{ \frac{e^{-xi}}{\left(1 - \frac{xi}{q}\right)^q} + \frac{e^{xi}}{\left(1 + \frac{xi}{q}\right)^q} \right\} dx = \frac{2\pi}{\Gamma(q)} \left(\frac{q}{e} \right)^q.$$

Tab. 134.

7, 8, 9 Ajoutez $\frac{1}{2} > q > 0$.

11. Il y a une faute d'impression, comme je vais montrer: il faut être e^{-qx} . Posons

$$J = \int_0^{\infty} \frac{(e^{px} - e^{-px})^2}{1 - e^{-x}} \cdot \frac{e^{-qx}}{x} dx.$$

En faisant $e^{-x} = y$ on aura

$$J = - \int_0^1 \frac{y^{2p} + y^{-2p} - 2}{1 - y} \cdot \frac{y^q}{y} \cdot \frac{dy}{y}$$

et après différentiation par rapport à p

$$\begin{aligned}
\frac{dJ}{dp} &= -2 \int_0^1 \frac{y^{2p} - y^{-2p}}{1 - y} \cdot y^q \cdot \frac{dy}{y} \\
&= 2 \int_0^1 \frac{y^{q-2p} - y^{q+2p}}{1 - y} \cdot \frac{dy}{y} \\
&= 2[Z'(q+2p) - Z'(q-2p)]
\end{aligned}$$

selon Tab. 5 N:o 8; mais on a

$$2[Z'(q+2p) - Z'(q-2p)] = \frac{d}{dp} \mathcal{U} \Gamma(q+2p) \Gamma(q-2p),$$

donc par intégration

$$J = C + \mathcal{U} \Gamma(q+2p) \Gamma(q-2p).$$

Pour $p = 0$ l'intégrale est $= 0$, donc $C = -\mathcal{U}(\Gamma(q))^2$ et enfin

$$\int_0^\infty \frac{(e^{px} - e^{-px})^2}{1 - e^{-x}} \cdot \frac{e^{-qx}}{x} dx = \mathcal{U} \frac{\Gamma(q+2p) \Gamma(q-2p)}{(\Gamma(q))^2}, \quad q > 2p.$$

12, 13. C'est effectivement la même formule

14. Otez le signe — devant le membre droit.

Tab. 135.

4 est juste, mais la forme

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{be^{-bqx}}{1 - e^{-x}} - \frac{be^{-bx}}{x} \right\} dx = b[\mathcal{U} - Z'(bq)]$$

me semble meilleure.

10 est la même que N:o 7, si l'on pose $p-1 = a$.

11 devient N:o 4, en introduisant bx au lieu de x et en changeant le signe.

Tab. 136.

1 est fautive avec Tab. 172 N:o 2.

5. Supprimez le signe — devant le membre droit.

6. Changez la condition $q > 1$ contre $q > -1$.
 10 est fautive avec Tab. 172 N:o 7.
 17, 18. Ajoutez: $p < 1$.

Tab. 137.

- 1, 2 sont fautives avec Tab. 174 N:o 2 et 3.
 3, 4 sont totalement fautives. Elles sont corrigées par Mr B. d. H., mais puisque le numérateur de la dérivée est $(1 - e^{-x})^2$, il est évident que l'intégrale n'est pas déduite de Tab. 174 N:o 5 et 6. Elle dérive plutôt de Tab. 174 N:o 9 et 10. Alors on aura N:o 9 et 10 de cette table.
 6 est déduite de Tab. 174 N:o 13 selon l'indication et elle a subi une correction. À mon avis cette correction n'est pas légitime, comme je montrerai en traitant Tab. 174 N:o 13. Si l'on prend celle-ci comme elle selon moi doit être et y pose $x = e^{-y}$, on aura

$$\int_0^{\infty} \frac{e^y + e^{-y}}{e^{2y} + e^{-2y} + 2 \cos \lambda} \cdot \frac{dy}{y^{1-q}} = \frac{\Gamma(q)}{\cos \frac{1}{2}\lambda} \cdot \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu} \frac{\cos(\nu + \frac{1}{2})\lambda}{(2\nu + 1)^q}.$$

La valeur dans le texte est en tout cas fautive.

Tab. 138.

- 7 est fautive, mais la juste valeur se trouve en N:o 6.
 12. Il est indiqué qu'elle dérive de Tab. 387 N:o 3. Je ne vois pas comment cela s'est fait, mais je l'ai trouvée en posant $p = 0$ dans N:o 6.
 21. Lisez $\frac{1}{4q^2}$ au lieu de $\frac{1}{4q^4}$. Du reste il faut que le nombre q soit > 1 ici et dans N:o 22.

Tab. 139.

3. On a tout simplement

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx \sqrt[q]{x^b} = \Gamma\left(\frac{b}{q} + 1\right).$$

4. Je préfère d'écrire

$$\int_0^{\infty} e^{-bx} x^{a-\frac{1}{2}} dx = \frac{\Gamma(a + \frac{1}{2})}{b^{a+\frac{1}{2}}}.$$

8 est tirée d'un ouvrage de M^r SCHLÖMILCH¹⁾ par changement de quelques lettres. Elle est juste, outre qu'il faut que l'on mette $c + 1$ au lieu de c dans le membre droit, car M^r B. d. H. a posé à gauche $c + 1$ pour le n de M^r SCHLÖMILCH. La formule est donc

$$\int_0^{\infty} e^{-\left(\nu x + \frac{q}{x}\right)} x^{c-\frac{1}{2}} dx = \sqrt{\pi} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{c+1}{2}} e^{-2\sqrt{pq}} \sum_{\nu=0}^{r=c} \frac{(c+1-\nu)^{2\nu/4}}{2^{\nu/2} (2\sqrt{pq})^{\nu}}, \quad c \geq 1$$

où j'ai fait la limite supérieure de la somme égale à c , puisque la série s'arrête alors.

9. Je préfère d'écrire

$$\int_0^{\infty} e^{-x^a} x^{a(b+\frac{1}{2})-1} dx = \frac{1}{a} \Gamma(b + \frac{1}{2}).$$

10 est fautive. Lisez

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1+x^2}{2qx}} x^{b+\frac{1}{2}} dx = \frac{\sqrt{2pq}}{\frac{1}{2q}} \sum_{\nu=0}^{r=c} \frac{(b-\nu+2)^{2\nu/4}}{2^{\nu/4}} \cdot q^{\nu}.$$

La formule du texte est contraire à N^o 7 qui en est un cas particulier.

11. Je l'ai obtenue en développant $\frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-2x}}$ en série. De la même manière on trouve

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\pi} \sum_{\nu=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)^{\frac{1}{2}}}$$

d'où en intégrant par parties on aura N^o 12.

¹⁾ Voyez Analytische Studien I pag. 89.

Tab. 140.

- 4 est la même que Tab. 139 N:o 4.
 10. Par une formule bien connue on trouve

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\frac{b}{q}-1} dx = \Gamma\left(\frac{b}{q}\right).$$

Elle est la même que Tab. 139 N:o 3.

- 11 est fautive: N:o 12 la remplace.
-

Tab. 141.

- 16 est fautive avec Tab. 163 N:o 8. Lisez

$$\int_0^{\infty} \frac{x e^{-x} dx}{\sqrt[3]{1 - e^{-2x}}} = \frac{9\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{5}{3})}{16\Gamma(\frac{1}{6})} \left[4 - \sqrt[3]{3} - \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right].$$

La déduction sera donnée sous Tab. 163 N:o 8.

17. Même observation que sur N:o 16. La vraie forme est

$$\int_0^{\infty} \frac{x e^{-2x} dx}{\sqrt[3]{1 - e^{-2x}}} = \frac{9}{16} \left[1 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \sqrt[3]{3} \right].$$

Voyez Tab. 163 N:o 9 ci-dessous.

24. M:r B. d. H. a corrigé quelques fautes, mais une reste:
 lisez $\{a\sqrt{e^x - 1} + bi\}^{-p}$ au lieu de $\{a\sqrt{e^x - 1} + bi\}^{-b}$.
-

Tab. 142.

- 14 est donnée par CAUCHY, mais je n'ai pas pu la trouver.
 D'abord on peut écrire

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-px^2 - qx} x^a dx = e^{\frac{q^2}{4p}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x\sqrt{p} + \frac{q}{2\sqrt{p}}\right)^2} x^a dx.$$

En y posant $x\sqrt{p} + \frac{q}{2\sqrt{p}} = y$, on trouvera

$$J = \frac{e^{\frac{q^2}{4p}}}{\sqrt{p}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \left(\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{q}{2p} \right)^a dy.$$

Il faut faire ici distinction de a pair et de a impair. Posons premièrement $a = 2\alpha$ et désignons en ce cas l'intégrale par $J_{2\alpha}$. En développant d'après la formule du binôme, nous aurons

$$J_{2\alpha} = \frac{e^{\frac{q^2}{4p}}}{p^{\alpha + \frac{1}{2}}} \sum_{\nu=0}^{\nu=2\alpha} \frac{(-1)^{\nu} (2\alpha)_{\nu} q^{\nu}}{2^{\nu} p^{\frac{\nu}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} y^{2\alpha-\nu} dy.$$

Suivant Tab. 142 N:o 8, 9 on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} y^{2\beta} dy = \Gamma(\beta + \frac{1}{2}), \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} y^{2\beta+1} dy = 0;$$

donc, en posant 2ν au lieu de ν , on aura

$$J_{2\alpha} = \frac{e^{\frac{q^2}{4p}}}{p^{\alpha + \frac{1}{2}}} \sum_{\nu=0}^{\nu=\alpha} (2\alpha)_{2\nu} \left(\frac{q}{2\sqrt{p}} \right)^{2\nu} \Gamma(\alpha - \nu + \frac{1}{2}).$$

Posons maintenant $a = 2\alpha + 1$ et l'intégrale $= J_{2\alpha+1}$: nous trouverons de la même manière

$$J_{2\alpha+1} = - \frac{e^{\frac{q^2}{4p}}}{p^{\alpha+1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=\alpha} (2\alpha+1)_{2\nu+1} \left(\frac{q}{2\sqrt{p}} \right)^{2\nu+1} \Gamma(\alpha - \nu + \frac{1}{2}).$$

Ces formules diffèrent en apparence beaucoup de la formule de CAUCHY, laquelle cependant semble juste.

15, 16 proviennent de N:o 14, en y posant $-pi$, $-qi$ et pi , qi resp. au lieu de p , q .

Tab. 143.

5. Deux fautes d'impression sont corrigées, mais deux restent.
Lisez

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 - e^{-2ax}} \cdot e^{-(a-2)x} x dx = \left(\frac{\pi}{2a} \operatorname{tg} \frac{\pi}{a} \right)^2, \quad a > 2.$$

6. Les signes des exposants sont incorrects. Lisez

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 - e^{-2bx}} \cdot e^{-ax} x dx = \dots\dots\dots 2(b-1) > a > 0.$$

On peut bien avoir l'intégrale du texte, en posant ici $-x$ au lieu de x , mais alors faut-il changer le signe de la valeur.

8 est fautive. Lisez

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{q^2 e^{qx} + e^{-x}} = \frac{\pi}{2q} \mathcal{I} \frac{1}{q}.$$

9 est fautive. Lisez

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{p^2 e^{qx} + q^2 e^{-x}} = \frac{\pi}{2pq} \mathcal{I} \frac{q}{p}.$$

12, 13, 15 sont déduites de Tab. 185 N:o 6, 7, 8, non de N:o 7, 8, 9 resp.

Tab. 144.

3 est déduite de Tab. 185 N:o 9, non de N:o 10. Dans la valeur il faut être $\mathcal{I}q$ au lieu de $\mathcal{I}(q-1)$.

6. Lisez $(2q)^{2a+1}$ au lieu de $2q^{2a+1}$.

9 est déduite de Tab. 182 N:o 7, non de Tab. 180 N:o 7. On peut écrire aussi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^x dx}{(a + e^x)^{b+1}} = \frac{1}{ba^b} \left[\mathcal{I}a - \sum_{\nu=1}^{\nu=a} \frac{1}{\nu} \right].$$

12 est fautive: lisez $e^{(p+1)x}$ dans le numérateur. La juste formule est

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(p+1)x}}{e^x + q} \cdot \frac{x dx}{e^x + 1} = \frac{\pi}{q-1} \cdot \frac{q^p \mathcal{L}q \sin p\pi + (1-q^p)\pi \cos p\pi}{\sin^2 p\pi}$$

$$q > 1; \quad p^2 < 1.$$

Tab. 145.

14. Lisez $\{\pi^2 + (\mathcal{L}q)^2\}^2$ au lieu de $\{\pi + (\mathcal{L}q)^2\}^2$.

18, 19. On peut remplacer ces deux formules par

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2a} dx}{e^{px} + e^{-px}} = \frac{2\Gamma(2a+1)}{p^{2a+1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)^{2a+1}}, \quad a > 0.$$

20. Effacez le facteur $(-1)^a$.

21 est exprimée par une transcendente de RAABE et a subi plusieurs corrections. On trouve aussi par développement en série

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{qx} + e^{-qx}}{e^x + e^{-x}} \cdot x^{2a} dx$$

$$= 2\Gamma(2a+1) \left[\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1-q)^{2a+1}} + \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1+q)^{2a+1}} \right]$$

$$a > 0; \quad q < 1.$$

22. On aura presque de la même manière

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{qx} - e^{-qx}}{e^x - e^{-x}} \cdot x^{2a} dx$$

$$= 2\Gamma(2a+1) \left[\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{1}{(2\nu+1-q)^{2a+1}} - \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{1}{(2\nu+1+q)^{2a+1}} \right]$$

$$a > 0. \quad q < 1.$$

23 à 27. Toutes ces intégrales sont comprises en les deux suivantes:

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2a} dx}{e^x + e^{-x} + 2 \cos \lambda} = 2 \int_0^{\infty} \frac{x^{2a} e^{-x} dx}{1 + 2e^{-x} \cos \lambda + e^{-2x}}$$

$$J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2a} dx}{e^x + e^{-x} - 2 \cos \lambda} = 2 \int_0^{\infty} \frac{x^{2a} e^{-x} dx}{1 - 2e^{-x} \cos \lambda + e^{-2x}}.$$

Conformément à une formule connue on a

$$\frac{e^{-x}}{1 + 2e^{-x} \cos \lambda + e^{-2x}} = \frac{1}{\sin \lambda} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu-1} e^{-\nu x} \sin \nu \lambda$$

et par suite

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{2}{\sin \lambda} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu-1} \sin \nu \lambda \int_0^{\infty} e^{-\nu x} x^{2a} dx \\ &= \frac{2\Gamma(2a+1)}{\sin \lambda} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^{\nu-1} \sin \nu \lambda}{\nu^{2a+1}}. \end{aligned}$$

Ce résultat peut en cas particuliers avoir une autre forme. Si dans la formule¹⁾

$$\frac{\sin \lambda}{1} - \frac{\sin 2\lambda}{2} + \frac{\sin 3\lambda}{3} - \frac{\sin 4\lambda}{4} + \text{etc.} = \frac{\lambda}{2}$$

on multiplie par $d\lambda$ et intègre, on aura

$$-\frac{\cos \lambda}{1^2} + \frac{\cos 2\lambda}{2^2} - \frac{\cos 3\lambda}{3^2} + \frac{\cos 4\lambda}{4^2} - \text{etc.} = C + \frac{\lambda^2}{4};$$

mais en posant $\lambda = 0$ on trouve

$$-\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \text{etc.}\right) = C \text{ ou } C = -\frac{\pi^2}{12}^2)$$

et par conséquent

¹⁾ CATALAN, Traité élém. des séries. Paris 1860, pag. 106.

²⁾ Voyez EULER, Introductio in analysin infinitorum. Lausannæ 1748. ag. 133.

$$-\frac{\cos \lambda}{1^2} + \frac{\cos 2\lambda}{2^2} - \frac{\cos 3\lambda}{3^2} + \frac{\cos 4\lambda}{4^2} - \text{etc.} = -\frac{\pi^2}{12} + \frac{\lambda^2}{4}.$$

De la même manière on aura

$$-\frac{\sin \lambda}{1^3} + \frac{\sin 2\lambda}{2^3} - \frac{\sin 3\lambda}{3^3} + \frac{\sin 4\lambda}{4^3} - \text{etc.} = -\frac{\pi^2 \lambda}{12} + \frac{\lambda^3}{12}$$

$$\frac{\cos \lambda}{1^4} - \frac{\cos 2\lambda}{2^4} + \frac{\cos 3\lambda}{3^4} - \frac{\cos 4\lambda}{4^4} + \text{etc.} = \frac{7\pi^4}{720} - \frac{\pi^2 \lambda^2}{24} + \frac{\lambda^4}{48}$$

$$\frac{\sin \lambda}{1^5} - \frac{\sin 2\lambda}{2^5} + \frac{\sin 3\lambda}{3^5} - \frac{\sin 4\lambda}{4^5} + \text{etc.} = \frac{7\pi^4 \lambda}{720} - \frac{\pi^2 \lambda^3}{72} + \frac{\lambda^5}{240}.$$

En posant $a = 1$, on trouve donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x + e^{-x} + 2 \cos \lambda} = \frac{\lambda(\pi^2 - \lambda^2)}{3 \sin \lambda} \quad \text{ou N:o 23.}$$

En faisant $a = 2$, on aurait N:o 24, mais cela n'arrive pas. On trouve plutôt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 dx}{e^x + e^{-x} + 2 \cos \lambda} = \frac{\lambda(7\pi^2 - 3\lambda^2)(\pi^2 - \lambda^2)}{15 \sin \lambda}$$

qui n'est que le sixième de la valeur dans le texte. Cela vient de ce que Tab. 184 N:o 10 est fautive.

En posant $\pi - \lambda$ au lieu de λ dans la valeur de J_1 , on trouvera

$$J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2a} dx}{e^x + e^{-x} - 2 \cos \lambda} = \frac{2\Gamma(2a+1)}{\sin \lambda} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{\sin \nu \lambda}{\nu^{2a+1}}.$$

Tab. 146.

1 est fautive, car elle est contraire à N:o 2 dont elle est un cas particulier. La valeur est juste, si on lit p^2 au lieu de p à gauche. On peut écrire

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - \frac{p}{4x^2}} \cdot \frac{dx}{x^2} = 2e^{-\sqrt{p}} \sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

ou

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - \frac{p^2}{4x^2}} \cdot \frac{dx}{x^2} = \frac{2e^{-p}}{p} \sqrt{\pi}.$$

3 à 5. Je ne sais comment CAUCHY les a trouvées, mais j'ai obtenu ces formules par différentiation réitérée par rapport à q en les formules

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-px^2 - \frac{q}{x^2}} dx = e^{-2\sqrt{pq}} \sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(px^2 + \frac{q}{x^2})i} dx = e^{2i\sqrt{pq} + \frac{\pi i}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

qui dérivent de Tab. 37 N:o 3 et N:o 7 resp.

11. Otez le facteur π .

12. Effacez le facteur π . Cependant il y a une autre faute Si dans la formule (Tab. 19 N:o 9)

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{2} \cot \frac{p\pi}{2}, \quad p < 1$$

on multiplie par dp et intègre depuis $p = q$ jusqu'au $p = p$, on aura

$$\int_q^p dp \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{2} \int_q^p \cot \frac{p\pi}{2} dp = l \frac{\sin \frac{p\pi}{2}}{\sin \frac{q\pi}{2}}, \quad 1 > p > q.$$

En invertissant l'ordre des intégrations, on trouve

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{1-x^2} \cdot \frac{dx}{lx} = l \frac{\sin \frac{p\pi}{2}}{\sin \frac{q\pi}{2}}$$

qui est précisément Tab. 180 N:o 13 hormis le facteur π . En faisant ici $x = e^y$, on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(p-1)y} - e^{(q-1)y}}{1 - e^{2y}} \cdot \frac{e^y dy}{y} = l \frac{\sin \frac{p\pi}{2}}{\sin \frac{q\pi}{2}}$$

ou

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(p-1)y} - e^{(q-1)y}}{e^y - e^{-y}} \cdot \frac{dy}{y} = l \frac{\sin \frac{q\pi}{2}}{\sin \frac{p\pi}{2}}.$$

Il faut donc mettre le signe — devant le membre droit dans le texte.

Tab. 148.

1 est fautive.

5 est fautive.

Tab. 149.

5 est fautive avec Tab. 151 N:o 11. Cherchons donc celle-ci. En intégrant par parties, on trouve

$$\int_0^1 x^{a-1} l(1+x) dx = \frac{1}{a} \left[l2 - \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu}{a+\nu+1} \right].$$

Si l'on y pose $x = e^y - 1$, on aura

$$\int_0^{l2} (e^y - 1)^{a-1} e^y \cdot y dy = \frac{1}{a} \left[l2 - \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu}{a+\nu+1} \right]$$

qui est la vraie valeur du N:o 5.

Ces intégrales peuvent aussi s'exprimer par des sommes finies. En effet on a

$$\int_0^1 x^{a-1} \mathcal{U}(1+x) dx = \frac{1}{a} \sum_{\nu=0}^{\nu=a-1} \frac{(-1)^\nu}{\nu+1} \text{ pour } a \text{ pair}$$

$$= \frac{1}{a} \left[2\mathcal{U}2 - \sum_{\nu=0}^{\nu=a-1} \frac{(-1)^\nu}{\nu+1} \right] \text{ pour } a \text{ impair.}$$

8. Mr B. d. H. y a corrigé plusieurs fautes. Le mieux est, ce me semble, de récrire la formule. Elle est

$$\int_0^{\mathcal{U}2} \frac{e^x - 2e^{-x}}{(e^x + 2e^{-x} - 2)^2} x^2 dx = \frac{\pi}{4} \mathcal{U}2 - (\mathcal{U}2)^2.$$

11 est fautive, quoique Mr B. d. H. y ait corrigé nombre de fautes. Le mieux est de la déduire de nouveau.

Posons donc dans Tab. 186 N:o 2 $\mathcal{U} \frac{\sqrt{1+x^2} + p}{\sqrt{1+x^2} - p} = y$:

nous aurons $\sqrt{1+x^2} = \frac{p(e^y + 1)}{e^y - 1}$,

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = - \frac{2pe^y dy}{(e^y - 1)\sqrt{2(1+p^2)e^y - (1-p^2)(1+e^{2y})}}$$

$$= \frac{2p dy}{\left(e^{\frac{y}{2}} - e^{-\frac{y}{2}}\right)\sqrt{2(1+p^2) - (1-p^2)(e^y + e^{-y})}}.$$

Aux limites $x=0$, $x=\infty$ repondent $y = \mathcal{U} \frac{1+p}{1-p}$, $y=0$ et on trouve

$$\int_0^{\mathcal{U} \frac{1+p}{1-p}} \frac{y dy}{\left(e^{\frac{y}{2}} - e^{-\frac{y}{2}}\right)\sqrt{2(1+p^2) - (1-p^2)(e^y + e^{-y})}} = \frac{\pi}{2p} \text{ Arc Sin } p, p^2 \leq 1.$$

C'est N:o 11 après changement des signes, outre que le membre droit est fautivement $\frac{1}{p}$ Arc Sin p dans le texte.

12. Je l'ai déduite de nouveau et j'ai trouvé qu'elle est la même que N:o 11, toutes les corrections faites.

(Dans les corrections on lit $\frac{1}{e^{2x}-1}$, mais il doit être $\frac{1}{e^x-1}$).

Tab. 150.

- 7 est une formule fort compliquée qui suivant l'indication est tirée de l'Archive de GRUNERT Tom. X pag. 233. Mais à la page 235 se trouve une formule beaucoup plus simple, savoir

$$\int_p^\infty \frac{e^{-x}}{x^a} dx = \frac{1}{\Gamma(a)} \left[e^{-p} \sum_{r=1}^{r=a-1} \frac{(-1)^{r-1} \Gamma(a-r)}{p^{a-r}} + (-1)^a \text{Li}(e^{-p}) \right]$$

où j'ai échangé m contre a . Cette formule doit remplacer N:o 7. Elle contient aussi N:o 6.

Tab. 151.

9. En développant $(x-1)^c$ par la formule du binôme, on aura

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x-1)^c x^{b-1} \left(\frac{1}{x} \right)^{q-1} dx &= \sum_{r=0}^{r=c} (-1)^r c_r \int_0^1 x^{b+c-r-1} \left(\frac{1}{x} \right)^{q-1} dx \\ &= \Gamma(q) \sum_{r=0}^{r=c} \frac{(-1)^r c_r}{(b+c-r)^q} \end{aligned}$$

(Tab. 151 N:o 2).

10. Écrivons

$$\int_0^1 \left\{ \left(\frac{1}{x} \right)^{q-1} - x^{p-1} (1-x)^{q-1} \right\} dx = \frac{\Gamma(p+q) - \Gamma(p)}{\Gamma(p+q)} \cdot \Gamma(q).$$

11. Voyez les observations sur Tab. 149 N:o 5.

16 est déduite de Tab. 169 N:o 2, mais avant qu'elle fusse corrigée. Je trouve

$$\int_0^1 \mathcal{U}(q - lx)x^{p-1}dx = \frac{1}{p}[\mathcal{U}q - e^{pq}Ei(-pq)].$$

Tab. 152.

9 est juste, mais je préfère d'écrire

$$\int_0^1 \frac{1+x}{1-x} \cdot \mathcal{U}x dx = 1 - \frac{\pi^2}{3}.$$

15. Lisez $-\frac{2}{27}\pi^2$ au lieu de $-\frac{2}{27}\pi^3$.

Tab. 153.

1, 2 sont juste. À la suite de ces formules je veux proposer quelques autres dont dependent celles-là. Elles sont

$$\int_0^1 \frac{\mathcal{U}x dx}{1+x+x^2} = -\frac{8}{27\sqrt{3}}H\left(\frac{1}{3}\right) \dots\dots\dots (1)$$

$$\int_0^1 \frac{x\mathcal{U}x dx}{1+x+x^2} = -\frac{\pi^2}{18} + \frac{4}{27\sqrt{3}}H\left(\frac{1}{3}\right) \dots\dots\dots (2)$$

$$\int_0^1 \frac{\mathcal{U}x dx}{1-x+x^2} = -\frac{4}{9\sqrt{3}}H\left(\frac{1}{3}\right) \dots\dots\dots (3)$$

$$\int_0^1 \frac{x\mathcal{U}x dx}{1-x+x^2} = \frac{\pi^2}{36} - \frac{2}{9\sqrt{3}}H\left(\frac{1}{3}\right) \dots\dots\dots (4)$$

On trouve

$$N:o 1 = (1) + 2(2); \quad N:o 2 = (3) - 2(4).$$

3 est totalement fautive, mais sa vraie valeur est signée par (3) sous N:o 1 et 2. Cette intégrale m'a causé bien de peine. J'étais curieux de savoir, comment *EULER* l'avait

trouvée: son calcul intégral (Tome IV pag. 124) me donna des renseignements sur cela. On y trouve entre autre la formule

$$\int_0^1 \mathcal{L}x \cdot \frac{x^{p+q-1} + x^{p-q-1}}{1-x^{2p}} dx = -\frac{\pi^2}{4p^2} \cdot \text{Sec} \frac{2q\pi}{2p}$$

c'est à dire N:o 13 de cette table. En y posant $p=3$, $q=1$, il trouve

$$\int_0^1 \mathcal{L}x \cdot \frac{x(1+x^2)}{1-x^6} = -\frac{\pi^2}{27}$$

quelle est parfaitement juste; mais au lieu de celle-ci il écrit

$$\int_0^1 \mathcal{L}x \cdot \frac{x dx}{1-x^2+x^4} = -\frac{\pi^2}{27},$$

comme si le dénominateur aurait été $1+x^6$. De cette formule est provenu N:o 3, en posant x pour x^2 .

- 4 est fautive, car elle est trouvée par la formule fausse N:o 3. Sa vraie valeur est donnée sous N:o 2 ci-dessus et elle est signée par (4)
- 6 a subi plusieurs corrections, et je vais prouver leur justesse. Évidemment a-t-on

$$\int \frac{\cos \lambda - x}{1 - 2x \cos \lambda + x^2} dx = -\frac{1}{2} \mathcal{L}(1 - 2x \cos \lambda + x^2),$$

donc en intégrant par parties

$$\begin{aligned} \int \mathcal{L}x \cdot \frac{\cos \lambda - x}{1 - 2x \cos \lambda + x^2} dx &= -\frac{1}{2} \mathcal{L}(1 - 2x \cos \lambda + x^2) \cdot \mathcal{L}x \\ &+ \frac{1}{2} \int \mathcal{L}(1 - 2x \cos \lambda + x^2) \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

Lorsque on introduit les limites, le terme intégré s'évanouira et on aura

$$J = \int_0^1 x \cdot \frac{\cos \lambda - x}{1 - 2x \cos \lambda + x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - 2x \cos \lambda + x^2) \frac{dx}{x}$$

Maintenant on a¹⁾

$$\frac{1}{2}(1 - 2x \cos \lambda + x^2) = - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{x^{\nu}}{\nu} \cos \nu \lambda$$

donc

$$J = - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{\cos \nu \lambda}{\nu} \int_0^1 x^{\nu-1} dx = - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{\cos \nu \lambda}{\nu^2};$$

mais si dans la série connue²⁾

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{\sin \nu \lambda}{\nu} = \frac{\pi}{2} - \frac{\lambda}{2}$$

on multiplie par λ et intègre, on aura

$$- \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{\cos \nu \lambda}{\nu^2} = C + \frac{\pi \lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{4}.$$

En posant $\lambda = 0$, on trouve $C = - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{1}{\nu^2} = - \frac{\pi^2}{6},$

donc

$$\int_0^1 x \cdot \frac{\cos \lambda - x}{1 - 2x \cos \lambda + x^2} dx = - \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi \lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{4}$$

comme M:re B. d. H. a donné.

7 est fautive. La vraie valeur est un quart de celle du N:o 3. On a donc

$$\int_0^1 \frac{x \lambda dx}{1 - x^2 + x^4} = - \frac{1}{9\sqrt{3}} H\left(\frac{1}{3}\right).$$

¹⁾ CATALAN, Traité des séries pag. 105.

²⁾ CATALAN, ibid. pag. 106.

8. Ajoutez $p > 1$. Pour $p < 1$ on trouve par Tab. 125 N:o 6 que cette intégrale est égale à $-\frac{\pi}{8}\sqrt{\frac{2}{1-p}} \cdot \text{Arc Cos } p$, comme N:o 9 aussi donne.
14. Après cette formule manque

$$\int_0^1 \frac{x dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}L(1).$$

- 20, 21. Ajoutez: $p > 0$.

Tab. 154.

- 2 Cette intégrale donne la relation

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{11^3} - \frac{1}{13^3} - \frac{1}{15^3} + \text{etc.} = \frac{3\pi^3}{64\sqrt{2}}.$$

- 9 est bien juste, quoique je trouve la valeur

$$\begin{aligned} &= -6 \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu+1)^4}, \quad \text{c'est à dire} \\ &= -6 \left[\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.} \right] \\ &\quad + \frac{6}{2^4} \left[\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.} \right]. \end{aligned}$$

Selon *EULER* cela est égal à $-\frac{\pi^4}{16} + \frac{\pi^4}{240} = -\frac{7\pi^4}{120}$, comme N:o 10 donne. N:o 9 est superflue, puisque N:o 10 donne l'intégrale en forme finie.

Tab. 155.

- 6, 7 sont les mêmes que N:o 2 et 3, mais celles-ci sont préférables comme finies.

Tab. 156.

5 est fautive. Lisez

$$\int_0^1 \frac{(\mathcal{L}x)^4 dx}{1 + 2x \cos \lambda + x^2} = \frac{\lambda(\pi^2 - \lambda^2)(7\pi^2 - 3\lambda^2)}{30 \sin \lambda}.$$

La juste valeur se trouve dans les Exercices de LEGENDRE.

Tab. 157.

1 est fautive, comme M: r B. d. H. déjà a remarqué. N: o 2 et 3 la rendent superflue.

13. Lisez $\Gamma(q + 1)$ au lieu de $\Gamma(q)$.

14. Lisez $\Gamma(a)$ au lieu de $1^{a/1}$.

Tab. 158.

1. Lisez $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \dots$ au lieu de $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \dots$

2 est comprise en N: o 1.

3 a subi plusieurs corrections, mais elles sont difficiles à saisir, quand on ne possède le livre dont la formule est tirée. En posant q au lieu de b , je trouve

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (\mathcal{L}x)^{2a} \cdot \frac{x^q + x^{-q}}{1 + x^2} dx \\ &= \Gamma(2a + 1) \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^\nu \left[\frac{1}{(2\nu + q + 1)^{2a+1}} + \frac{1}{(2\nu - q + 1)^{2a+1}} \right] \\ & \quad q < 1. \end{aligned}$$

4. On trouve immédiatement

$$\int_0^1 (\mathcal{L}x)^{2a} \cdot \frac{dx}{1 - x^2} = \Gamma(2a + 1) \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{1}{(2\nu + 1)^{2a+1}}.$$

Cette valeur peut être transformée à celle du texte, mais cela ne sert rien.

- 6 est fautive. En posant $x^2 = y$ on aura $xdx = \frac{1}{2}dy$,
 $(lx)^{2a-1} = \frac{1}{2^{2a-1}}(ly)^{2a-1}$ et par suite

$$\int_0^1 (lx)^{2a-1} \cdot \frac{xdx}{1-x^2} = \frac{1}{2^{2a}} \int_0^1 (ly)^{2a-1} \cdot \frac{dy}{1-y} = -\frac{\pi^{2a}}{4a} B_{2a-1}$$

par Tab. 157 N:o 6. Il faut donc ôter le facteur $(-1)^a$ et poser le signe — dans le texte.

- 7 est tirée de Tab. 336 N:o 17 où cependant on ne lit pas p , mais a . Il faut que l'exposant soit un nombre entier sans quoi le facteur $(-1)^{p-1}$ n'est pas bien déterminé. Écrivons donc

$$\int_0^1 (lx)^{a-1} \cdot \frac{dx}{1-x^2} = (-1)^{a-1} \Gamma(a) \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^a}, \quad a > 1.$$

Par Tab. 157 N:o 8 et 9 on peut aussi avoir cette intégrale.

8. Même remarque que sur N:o 7.
 9. On en peut dire autant que de N:o 3.
 11, 12, 15, 16 sont exprimées par les transcendentes de RAABE.
 On peut les avoir en développant en séries les dérivées.

Tab. 159.

- 3 est un peu singulière et fort incommode. Par développement en série on trouve

$$\int_0^1 (lx)^{2a} \cdot \frac{dx}{1-2x \cos \lambda + x^2} = \frac{\Gamma(2a+1)}{\sin \lambda} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{\sin \nu \lambda}{\nu^{2a+1}}.$$

Pour de petites valeurs de a on aura une expression finie (Voyez Tab. 156).

N:o 1, 2 et 5 sont contenus dans cette formule.

- 4, 6 peuvent s'obtenir par N:o 7.

Tab. 160:

7 est selon l'indication tirée de Tab. 157 N:o 21, mais cette table n'a que quatorze intégrales.

Cependant j'ai ailleurs¹⁾ trouvé

$$\int_0^1 \frac{l(1+x^2)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} l2 - \frac{1}{2} L(1)$$

$$= \frac{\pi}{2} l2 - \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu}{2^\nu + 1)^2}.$$

La formule est donc exacte.

8. Après plusieurs corrections elle n'est pas bien nette. En intégrant par parties on aura

$$\int_0^1 \frac{l(1+x^2)}{(1+px)^2} dx = \frac{1}{1+p^2} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{p} l(1+p) + \frac{1-p}{1+p} l2 \right].$$

16 n'est pas juste, car la dérivée devient imaginaire entre les limites, puisque $\text{Cot } h p l$ toujours est plus grande que l'unité.

Tab. 161.

11 est juste, quoique tirée de la formule fautive Tab. 158 N:o 6. On en voit, que le facteur $(-1)^a$ y est survenu par faute d'impression.

12. On peut écrire

$$\int_0^1 (lx)^{2a} \cdot l(1 - 2x \text{Cos } 2p\pi + x^2) \frac{dx}{x}$$

$$= -2\Gamma(2a+1) \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{\text{Cos } 2\nu p\pi}{\nu^{2a+2}}, \quad p < 1.$$

16. Mr B. d. H. a changé le dénominateur n^{q+1} contre n^{q+2} , mais il faut être n^{p+2} .

¹⁾ Voyez Acta Societatis scient. Upsaliensis à Upsal 1874 pag. 3.

17. À cause des maintes corrections j'ai jugé à propos d'évaluer l'intégrale de nouveau. Elle dérive des intégrales

$$\int_0^1 \left(\iota \frac{1}{x}\right)^a \cdot \frac{dx}{1+x} = \Gamma(a+1) \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu+1)^{a+1}}$$

$$\int_0^1 \left(\iota \frac{1}{x}\right)^a \cdot \frac{dx}{1-x} = \Gamma(a+1) \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{1}{(\nu+1)^{a+1}}$$

lesquelles en intégrant par parties donnent

$$\int_0^1 \left(\iota \frac{1}{x}\right)^{a-1} \iota(1+x) \frac{dx}{x} = \Gamma(a) \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu+1)^{a+1}}$$

$$\int_0^1 \left(\iota \frac{1}{x}\right)^{a-1} \iota(1-x) \frac{dx}{x} = -\Gamma(a) \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{1}{(\nu+1)^{a+1}}.$$

Par leur addition on trouve

$$\int_0^1 \left(\iota \frac{1}{x}\right)^{a-1} \cdot \iota(1-x^2) \cdot \frac{dx}{x} = -\frac{\Gamma(a)}{2^a} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{1}{\nu^{a+1}}.$$

La formule corrigée est donc juste. En soustrayant les intégrales on aura

$$\int_0^1 \left(\iota \frac{1}{x}\right)^{a-1} \cdot \iota \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{dx}{x} = 2\Gamma(a) \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^{a+1}}$$

qui ne se trouve point dans le texte.

Tab. 163.

- 8, 9. Mr B. d. H. a dénoncé que ces formules sont fautives et cela à bonne raison. Je tacherai de trouver leurs vraies valeurs. Posons donc

$$J = \int_0^1 \frac{x^{2p-1} dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}.$$

Si l'on y fait $x = y^{\frac{1}{2}}$, on trouve facilement

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 y^{p-1} (1-y)^{-\frac{1}{2}} dy = \frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(p)}{2\Gamma(p+\frac{2}{3})} \text{ (Tab. 1 N:o 8).}$$

Depuis on a

$$lJ = l\Gamma(\frac{2}{3}) + l\Gamma(p) - l\Gamma(p + \frac{2}{3})$$

d'où on trouve en différentiant

$$\frac{dJ}{dp} = \frac{d}{dp} l\Gamma(p) - \frac{d}{dp} l\Gamma(p + \frac{2}{3});$$

mais on a aussi

$$\frac{dJ}{dp} = 2 \int_0^1 \frac{x^{2p-1} l x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx,$$

$$\frac{d}{dp} l\Gamma(p) - \frac{d}{dp} l\Gamma(p + \frac{2}{3}) = Z'(p) - Z'(p + \frac{2}{3})$$

et enfin

$$\int_0^1 \frac{x^{2p-1} \cdot l x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx = \frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(p)}{4\Gamma(p+\frac{2}{3})} [Z'(p) - Z'(p + \frac{2}{3})]. \dots (a)$$

On démontre facilement que l'intégrale est finie pour $p = \frac{1}{2}$ et on trouve par conséquent

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{l x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx &= \frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{2})}{4\Gamma(\frac{7}{6})} [Z'(\frac{1}{2}) - Z'(\frac{7}{6})] \\ &= \frac{9\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{5}{3})}{16\Gamma(\frac{7}{6})} \left[l3 - 4 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right]. \end{aligned}$$

C'est la juste valeur de N:o 8.

On aura N:o 9 en posant $p = 1$ dans la formule (a) ci-dessus, savoir

$$\int_0^1 \frac{x \mathfrak{L} x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx = \frac{9}{16} \left[\mathfrak{L} 3 - 1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \right].$$

15 est déduite de Tab. 346 N:o 4, mais je trouve

$$\int_0^1 \frac{\mathfrak{L} x}{(1+p)^2 - 4px^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2(1-p^2)} \cdot \mathfrak{L} \frac{1+p}{2}, \quad p^2 < 1.$$

16. Ajoutez: $q < 1$

19 est donnée en forme d'une série infinie, quoiqu'elle puisse avoir une forme finie. Dans l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{x^{a-1} dx}{(1-x^b)^{1-\frac{c}{b}}}$$

posons $x = y^{\frac{1}{b}}$: nous aurons

$$J = \frac{1}{b} \int_0^1 y^{\frac{a}{b}-1} (1-y)^{\frac{c}{b}-1} dy = \frac{\Gamma\left(\frac{a}{b}\right) \Gamma\left(\frac{c}{b}\right)}{b \Gamma\left(\frac{a+c}{b}\right)}.$$

Comme auparavant (N:o 8) on trouve

$$\int_0^1 \mathfrak{L} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{a-1} dx}{(1-x^b)^{1-\frac{c}{b}}} = \frac{1}{b^2} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{b}\right) \Gamma\left(\frac{c}{b}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+c}{b}\right)} \left[Z'\left(\frac{a+c}{b}\right) - Z'\left(\frac{a}{b}\right) \right].$$

Tab. 164.

4. Au lieu de cette formule on peut écrire

$$\int_0^1 (\mathfrak{L} x)^{2a} \cdot \frac{x^{\frac{c}{2}-1}}{1+x^b} dx = \Gamma(2a+1) \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu b + \frac{1}{2}c)^{2a+1}}.$$

5, 6. Voyez Tab. 158 N:o 12 et 11.

Tab. 165.

1 est fautive. Lisez (Voyez Tab. 160 N:o 7 ci-dessus)

$$\int_0^1 \mathcal{U}(1+x) \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{2} \mathcal{L}2 + 2 \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^2}$$

$$= L(1) - \frac{\pi}{2} \mathcal{L}2 = 0,7431381432.$$

2 est atteinte du même défaut que la précédente. Lisez

$$\int_0^1 \mathcal{U}(1-x) \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{2} \mathcal{L}2 - 2 \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^2}$$

$$= -H\left(\frac{1}{2}\right) = -2,9207242335.$$

Ces fautes sont déjà remarquées par M:r B. d. H.

4. Malgré les corrections cette formule paraît inexacte.

5 est déduit de Tab. 12 N:o 9 selon l'indication, mais je n'ai pas pu l'obtenir. À l'intégrale nommée on peut donner la forme

$$\int \frac{x dx}{1+x^2} \cdot \frac{\sqrt{1-x^4}}{x}$$

et en intégrant par parties on trouve

$$\int \frac{x dx}{1+x^2} \cdot \frac{\sqrt{1-x^4}}{x} = \frac{1}{2} \mathcal{U}(1+x^2) \frac{\sqrt{1-x^4}}{x} + \frac{1}{2} \int \mathcal{U}(1+x^2) \cdot \frac{1+x^4}{x^2 \sqrt{1-x^4}} dx.$$

Lorsqu'on introduit les limites, le terme intégré s'évanouit et on a

$$\int_0^1 \mathcal{U}(1+x^2) \cdot \frac{1+x^4}{x^2 \sqrt{1-x^4}} dx = \frac{\{F(\frac{1}{2})\}^2}{2\sqrt{2}\pi} - \frac{2\pi\sqrt{2}\pi}{\{F(\frac{1}{2})\}^2}$$

$$= 2\sqrt{2} \left[F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right].$$

15, 16 sont déduites de Tab. 334 N:o 10 et 12 resp., mais dans toutes ces intégrales les dérivées deviennent ima-

ginaires entre les linuites à cause des fonctions hyperboliques. Il faut au moins qu'on écrit

$$\frac{1}{2} \mathcal{U}(1 - \sin hp^2 \lambda \sin^2 x)^2 \text{ etc.}$$

20, 22. En les dénominateurs se trouve le facteur $\sqrt{1-x}$: lisez $\sqrt{1-x^2}$.

25 est déduite de Tab. 334 N:o 19. Il est aisé à voir comment RAABE a obtenu sa série, mais on peut avoir une autre que voici. Posons

$$J = \int_0^1 \mathcal{U}(1 + p^2 + 2px) \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

et substituons $x = \cos \varphi$: nous aurons

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{U}(1 + p^2 + 2p \cos \varphi) d\varphi.$$

Suivant une formule connue on a

$$\mathcal{U}(1 + p^2 + 2p \cos \varphi) = 2 \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{p^\nu}{\nu} \cos \nu \varphi,$$

donc

$$J = 2 \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{p^\nu}{\nu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \nu \varphi d\varphi$$

$$= 2 \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{p^\nu}{\nu^2} \sin \frac{\nu\pi}{2} = 2 \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^\nu \frac{p^{2\nu+1}}{(2\nu+1)^2}, \quad p \leq 1.$$

Tab. 166.

3 est déduite de Tab. 334 N:o 24, mais celle-ci est fautive. Tant elle que N:o 22 et 23 peuvent être obtenues par Tab. 334 N:o 8 dans laquelle q doit être plus grand que -1 . En y posant $q = \sin \lambda$ et $q = -\sin \lambda$ et en soustrayant on aura N:o 22. Pareillement on trouve N:o 23

et N:o 24. Celle-là est juste, mais nous déduirons N:o 24. D'abord on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l(\sin^2 \lambda - \sin^2 \mu \cos^2 x) dx = \pi l \frac{\sin \lambda \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \mu}{\sin^2 \lambda}}\right)}{2}$$

($\sin \lambda \geq \sin \mu$)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l(1 - \sin^2 \mu \cos^2 x) dx = \pi l \frac{1 + \cos \mu}{2}.$$

Par leur soustraction on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \frac{\sin^2 \lambda - \sin^2 \mu \cos^2 x}{1 - \sin^2 \mu \cos^2 x} dx = \pi l \frac{\sin \lambda \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \mu}{\sin^2 \lambda}}\right)}{1 + \cos \mu}$$

ou, en posant $\frac{\sin \mu}{\sin \lambda} = \sin \alpha$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \left(\frac{\sin^2 \lambda - \sin^2 \mu \cos^2 x}{1 - \sin^2 \mu \cos^2 x} \right) dx &= \pi l \frac{\sin \lambda (1 + \cos \alpha)}{1 + \cos \mu} \\ &= \pi l \frac{\sin \mu (1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha (1 + \cos \mu)} \\ &= \pi l \operatorname{tg} \frac{1}{2} \mu \operatorname{Cot} \frac{1}{2} \alpha. \end{aligned}$$

LOBATSCHESKY a donné $\pi l \operatorname{tg} \frac{1}{2} \mu \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$ quelle faute se trouve aussi dans Tab. 166 N:o 3. La juste forme de celle-ci est

$$\int_0^1 l \frac{\sin^2 \lambda - x^2 \sin^2 \mu}{1 - x^2 \sin^2 \mu} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \pi l \operatorname{tg} \frac{1}{2} \mu \operatorname{Cot} \left(\frac{1}{2} \operatorname{Arc} \sin \frac{\sin \mu}{\sin \lambda} \right)$$

($\sin \lambda \geq \sin \mu$).

10 est déduite de Tab. 348 N:o 3, mais la substitution est inexacte: lisez $x^2 \operatorname{Cot} hp^2 \lambda \operatorname{tg} hp^2 \cdot \mu$ au lieu de $x^2 \cos hp^2 \lambda \operatorname{tg} hp^2 \mu$.

La formule ne peut pas valoir sans restriction, puisque $\text{Cos } h\rho\lambda$ est > 1 .

13. Au lieu de $\frac{1}{1-x^2 \text{Cos } \lambda}$ lisez $\frac{1}{1-x^2 \text{Cos } 2\lambda}$.

19 devient infinie entre les limites comme Tab. 347 N:o 14 dont elle est tirée. Il y a aussi une faute d'impression: lisez π au lieu de $\frac{\pi}{2}$.

Tab. 167.

5. Il y a une faute d'impression: lisez $\frac{\mathcal{U}^{p+q+1}}{p+1}$ au lieu de $\frac{\mathcal{U}^{p+q+1}}{q+1}$. Voyez aussi B. d. H. Exposé pag. 347.

9 est déduite de Tab. 127 N:o 6 en y posant $e^{-x} = y$. On trouve donc

$$\int_0^1 \frac{y^{a-1}(y-1)^b}{\mathcal{U}y} dy = \sum_{v=0}^{v=b} (-1)^v b_v \mathcal{U}(a+b-v).$$

Voyez Tab. 128 N:o 3. Ci-dessus.

10. est pour a entier un cas particulier de N:o 9, mais le facteur $(-1)^v$ manque sous le signe de sommation.

Tab. 168.

9 peut avoir la forme plus simple

$$\int_0^1 \frac{(1-x^p)^a}{(\mathcal{U}x)^2} dx = \sum_{v=0}^{v=a} (-1)^v a_v (vp+1) \mathcal{U}(vp+1).$$

16 est fautive comme M:r B. d. H. déjà a remarqué. La juste formule est

$$\int_0^1 x^{p-1} \left(\mathcal{U} \frac{1}{x} \right)^{-q} dx = p^{q-1} \Gamma(1-q), \quad q < 1.$$

17, 18. Voyez Tab. 128 N:o 6 ci-dessus.

21 est fautive: lisez $r^p - q^p$ au lieu de $q^p - r^p$.

22. Lisez $\text{Cosec } q\pi$, $q < c$ au lieu de $\text{Cos } p\pi$, $q < b$.

Tab. 169.

3 à 6 sont en partie fautives et aussi superflues, comme comprises en N:o 7 et 8.

Tab. 170.

1. Lisez: lp au lieu de lq .
8. Lisez $-\mathcal{U}\left(\frac{a}{2\pi} + 1\right)$ au lieu de $\mathcal{U}\left(\frac{a}{2\pi} + 1\right)$.
14. Lisez $l\frac{4}{\pi}$ au lieu de $l\frac{2}{\pi}$.
15. On peut écrire

$$\int_0^1 \mathcal{U}(1+x) \cdot \frac{2q \cdot lx(x^2 + x^{-q}) - (x^2 - x^{-q}) \cdot \frac{x^2 - x^{-q}}{x}}{(lx)^2} \cdot dx = l \frac{\text{tg } q\pi}{q\pi}.$$

Tab. 171.

- 5 est juste après la correction que M:r B. d. H. y a faite, mais je préfère d'écrire la valeur ainsi:

$$l \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(a + \frac{q+1}{2}\right)\Gamma\left(a + 1 + \frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)\Gamma\left(a + \frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(a + 1 + \frac{q}{2}\right)}.$$

- 10 est bien exacte, mais la forme

$$b\mathcal{U}b - \frac{d}{dq}\mathcal{U}\Gamma(bq) = b[\mathcal{U}b - Z'(bq)]$$

est meilleure, ce me semble.

- 14 à 16 sont comprises dans N:o 17.
-

Tab. 172.

- 2 est fautive: l'intégrale est $= \infty$. La formule est donnée par EULER, et j'ai pris intérêt à rechercher, comment il l'a trouvée. Son point de départ est

$$\int_0^1 \frac{x^{\lambda-\omega-1} - x^{\lambda+\omega-1}}{1-x^{2\lambda}} dx = \frac{\pi}{2\lambda} \operatorname{tg} \frac{\pi\omega}{2\lambda}$$

où il multiplie par $d\omega$ et intègre depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \omega$. Si l'on invertit l'ordre des intégrations, on aura

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1-x^{2\lambda}} \cdot \int_0^1 (x^{-\omega} - x^{\omega}) d\omega &= - \int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1-x^{2\lambda}} \cdot \frac{x^{-\omega} + x^{\omega} - 2}{\omega} \cdot d\omega \\ &= - \int_0^1 \frac{x^{\lambda-\omega-1}(1-x^{\omega})^2}{1-x^{2\lambda}} \cdot \frac{dx}{\omega}. \end{aligned}$$

EULER n'a pas trouvé cela, mais

$$- \int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}(x^{-\omega} - x^{\omega})}{1-x^{2\lambda}} \cdot \frac{dx}{\omega}$$

où quelque erreur par rapport aux signes s'est glissé. Encore la valeur de l'intégrale pour $\omega = 0$ n'est pas $= 0$, comme la formule donne, mais $= -\frac{2}{\lambda} 1$).

Puisqu' on a

$$\frac{\pi}{2\lambda} \int_0^{\omega} \operatorname{tg} \frac{\pi\omega}{2\lambda} d\omega = -\omega \operatorname{Cos} \frac{\pi\omega}{2\lambda},$$

on trouve enfin

$$\int_0^1 \frac{x^{\lambda-\omega-1}(1-x^{\omega})^2}{1-x^{2\lambda}} \cdot \frac{dx}{\omega} = \omega \operatorname{Cos} \frac{\pi\omega}{2\lambda}. \dots\dots\dots (b)$$

En y posant $\lambda = p$, $\omega = p - q$, on retrouve N:o 10. 7 est fautive. Sa juste forme est la formule (b) ci-dessus.

¹⁾ Voyez B. d. H. Exposé pag. 350.

Tab. 173.

2 a subi plusieurs corrections par où elle est devenue un peu embrouillée. Lisez

$$\int_0^1 \frac{l x}{q^2 + (l x)^2} \cdot \frac{dx}{1-x} = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{q} - l \frac{q}{2\pi} + Z\left(\frac{q}{2\pi}\right) \right].$$

4 est fautive. Elle est déduite de Tab. 138 N:o 21 (non N:o 22) et elle doit être

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x} \cdot \frac{l x dx}{q^2 - (l x)^2} = \frac{\pi^2}{q^2} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{B_{2\nu+1}}{\nu+1} \cdot \left(\frac{2\pi}{q}\right)^{2\nu}.$$

5, 6 sont déduites de Tab. 138 N:o 20 et N:o 22 resp.

8. Lisez

$$\int_0^1 \frac{1}{\pi^2 + 4(l x)^2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \frac{l^2}{4\pi}.$$

12 est fautive. Lisez

$$\int_0^1 \frac{1}{q^2 + (l x)^2} \cdot \frac{x l x}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2q} + l \frac{\pi}{q} + Z\left(\frac{q}{\pi}\right) \right].$$

14. est fautive. Lisez

$$\int_0^1 \frac{l x}{q^2 \pi^2 - (l x)^2} \cdot \frac{x dx}{1-x^2} = \frac{1}{4q^2} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{B_{2\nu+1}}{(\nu+1) \cdot q^{2\nu}}.$$

Tab. 174.

2, 3. Ces formules fautives ne se trouvent point aux endroits cités. *EULER* y a donné (j'ai posé x au lieu de z) la formule

$$\int_0^1 \frac{x(1-x^2)}{1+x^8} \cdot \frac{dx}{l x} = -\frac{1}{2} l^3$$

qui est juste, et puis la formule

$$\int_0^1 \frac{1+x^2}{1-x^6} \cdot \frac{dx}{x} = \iota \frac{\sqrt{3}}{2}$$

qui est tout à fait fausse. La juste formule est

$$\int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{1-x^6} \cdot \frac{dx}{x} = \iota \frac{\sqrt{3}}{2} :$$

elle provient, si dans la formule (b) (Voyez Tab. 172 N:o 2 ci-dessus) on pose $\lambda = 3$, $\omega = 1$.

- 5, 6 sont fautives, ce qui devient évident en observant qu'elles sont cas particuliers de N:o 7 et 8 resp. En effet elles proviennent de celles-ci en posant $q = 0$, $p = 2$.
13. M:r B. d. H. prétend que le numérateur doit être $1 - x^2$, mais il y a tort. En effet on a par une formule connue

$$\frac{1+x^2}{1+2x^2 \cos \lambda + x^4} = \frac{1}{\cos \frac{1}{2} \lambda} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^\nu x^{2\nu} \cos (\nu + \frac{1}{2}) \lambda ,$$

$$\frac{1-x^2}{1+2x^2 \cos \lambda + x^4} = \frac{1}{\sin \frac{1}{2} \lambda} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^\nu x^{2\nu} \sin (\nu + \frac{1}{2}) \lambda .$$

En multipliant par $\frac{dx}{(\iota x)^{1-q}}$ et en intégrant entre les limites 0 et 1, on aura

$$\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+2x^2 \cos \lambda + x^4} \cdot \frac{dx}{\left(\iota \frac{1}{x}\right)^{1-q}} = \frac{\Gamma(q)}{\cos \frac{1}{2} \lambda} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu \cos (\nu + \frac{1}{2}) \lambda}{(2\nu + 1)^q} ,$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+2x^2 \cos \lambda + x^4} \cdot \frac{dx}{\left(\iota \frac{1}{x}\right)^{1-q}} = \frac{\Gamma(q)}{\sin \frac{1}{2} \lambda} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu \sin (\nu + \frac{1}{2}) \lambda}{(2\nu + 1)^q} .$$

Or, la formule (13) est juste, outre que la limite inférieure de la somme doit être 0 au lieu de 1.

Tab. 175.

3. Ajoutez $\frac{1}{2} > q > 0$.
 9. Une faute est corrigée, une autre reste: lisez $-2x^p$ au lieu de $-2x^{2p}$ et ajoutez $q < 1$. La formule provient de N:o 10 en y posant $p - q$ au lieu de q .
-

Tab. 176.

4. Lisez + entre les fractions dans le membre droit.
-

Tab. 177.

- 6, 7 sont déduites de Tab. 138 N:o 18 et 17, non de 19 et 18.
 17. Lisez $-\frac{1}{\sqrt{x} \cdot lx}$ au lieu de $-\frac{\sqrt{x}}{lx}$.
-

Tab. 178.

- 2, 3. Toutes les deux sont imaginaires, mais en écrivant $\frac{1}{x}$ au lieu de lx , on trouvera

$$\int_0^1 \frac{x^p - x^q}{\left(l \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}} dx = \left(\frac{1}{\sqrt{p+1}} - \frac{1}{\sqrt{1+q}} \right) \sqrt{\pi}$$

laquelle contient aussi N:o 2.

Tab. 179.

1. Cette formule et plusieurs autres peuvent être remplacées par

$$\int_0^\infty l(1+x^q) \cdot \frac{dx}{x^{1+r}} = \frac{\pi}{r \sin \frac{r\pi}{q}}, \quad q > r$$

laquelle on aura en intégrant par parties.

4. Il faut écrire

$$\int_0^{\infty} (1-x)^2 \cdot \frac{dx}{x^{2-p}} = -\frac{2\pi \operatorname{Cot} p\pi}{1-p}, \quad 1 > p > 0.$$

Elle peut être remplacée par

$$\int_0^{\infty} \mathcal{U}(1-x^2)^2 \cdot \frac{dx}{x^{1+r}} = \frac{2\pi}{r} \cdot \operatorname{Cot} \frac{r\pi}{q}, \quad q > r > 0.$$

14. Écrivons

$$\int_0^{\infty} \mathcal{U}(1-x^2)^2 \cdot \frac{(p-1)x^p + (p+1)x^{-p}}{x^2} dx = -2\pi \operatorname{tg} \frac{p\pi}{2}, \quad 1 > p > 0.$$

17. Otez la condition $q > 1$.

22. Il faut écrire

$$\int_0^{\infty} \mathcal{U}(1-x)^2 (p\mathcal{U}x - 1) \frac{dx}{x^{1+p}} = 2 \left(\frac{\pi}{\operatorname{Sin} p\pi} \right)^2, \quad p < 1.$$

23. Otez le facteur π .

24. Écrivez $\frac{1}{2}\mathcal{U}(1-x)^2$ au lieu de $\mathcal{U}(1-x)$ et supprimez le facteur π dans le membre droit.

25. Écrivez $\frac{1}{2}\mathcal{U}(1-x)^2$ au lieu de $\mathcal{U}(1-x)$.

Tab. 180.

7, 13. Effacez le facteur π dans le membre droit.

16. Ajoutez la condition $2(b-1) > a > 0$.

Tab. 181.

16 est déduite de la formule fautive Tab. 334 N:o 24, à l'égard de laquelle voyez Tab. 166 N:o 3 ci-dessus. La juste formule dont il s'agit maintenant est

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \mathcal{U} \frac{\operatorname{Cos}^2 \mu - \operatorname{Cos}^2 \lambda + x^2 \operatorname{Sin}^2 \lambda}{\operatorname{Cos}^2 \mu + x^2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} \\ = \pi \mathcal{U} \left\{ \operatorname{tg} \frac{1}{2} \mu \operatorname{Cot} \left(\frac{1}{2} \operatorname{Arc} \operatorname{Sin} \frac{\operatorname{Sin} \mu}{\operatorname{Sin} \lambda} \right) \right\}, \quad \operatorname{Sin} \lambda \geq \operatorname{Sin} \mu. \end{aligned}$$

17 n'est pas à sa place ici.

Tab. 182.

5. Après les corrections elle s'écrit ainsi:

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathfrak{L}x \cdot dx}{(1-x^2)^q} = -\frac{\Gamma(q-\frac{1}{2})}{\Gamma(q)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} [A + 2\mathfrak{L}2 + Z(q-\frac{1}{2})].$$

13 est fautive. Lisez

$$\int_0^{\infty} \mathfrak{L}(q+x) \cdot \frac{dx}{(1-x)^2} = -\frac{q\mathfrak{L}q}{1+q}.$$

On trouve aussi

$$\int_0^{\infty} \mathfrak{L}(q+x) \cdot \frac{dx}{(p-x)^2} = \frac{1}{p+q} \mathfrak{L} \frac{q}{p} - \frac{1}{p} \mathfrak{L}q.$$

15. Otez la condition $q < 1$.

Tab. 183.

- 5, 6 sont déduites de Tab. 22 N:o 15 et 14 (pas de N:o 14 et 15), mais les lettres p et q sont inutilement permutées. Ajoutez la condition $p > q$.
16. Pour la vérifier j'ai évalué l'intégrale

$$J = \int_0^{\infty} \mathfrak{L}x \cdot \frac{q+x^2}{p^2+x^2} \cdot \frac{dx}{1+x^2}.$$

On trouve facilement que

$$\frac{q+x^2}{(p^2+x^2)(1+x^2)} = \frac{1}{1-p^2} \left[\frac{q-p^2}{p^2+x^2} + \frac{1-q}{1+x^2} \right]$$

et puis

$$J = \frac{1}{1-p^2} \left[(q-p^2) \int_0^{\infty} \frac{\mathfrak{L}x dx}{p^2+x^2} + (1-q) \int_0^{\infty} \frac{\mathfrak{L}x dx}{1+x^2} \right].$$

La dernière intégrale est $= 0$: à l'aide de Tab. 180 N:o 10 on aura donc

$$J = \int_0^{\infty} \mathcal{L}x \cdot \frac{q + x^2}{p^2 + x^2} \cdot \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2p} \cdot \frac{q - p^2}{1 - p^2} \mathcal{L}p.$$

En y posant $q = p$, on trouve

$$\int_0^{\infty} \mathcal{L}x \cdot \frac{p + x^2}{p^2 + x^2} \cdot \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi \mathcal{L}p}{2(1 + p)}.$$

L'intégrale en question est donc juste. L'intégrale J se trouve dans les nouvelles Tables, mais je n'ai pas pu obtenir la valeur y donnée.

Tab. 184.

3. Lisez $7\pi^2 + 3(\mathcal{L}q)^2$ au lieu de $7\pi^2 + 2(\mathcal{L}q)^2$.

5, 6 sont le double de Tab. 158 N:o 12 et 11 resp., si l'on y pose $c = 1$.

10 est mal copiée: LEGENDRE a donnée

$$\frac{\lambda(\pi^2 - \lambda^2)(7\pi^2 - 3\lambda^2)}{15 \operatorname{Sin} \lambda}.$$

11 à 13 sont le double de Tab. 159 N:o 1, 2, 5 resp.

16 est fautive. Lisez

$$\int_0^{\infty} \mathcal{L}(x-1)^2 \cdot \frac{x\mathcal{L}x - x - q}{(x+q)^2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\pi^2 + (\mathcal{L}q)^2}{1+q}.$$

18. La correction Mr B. d. H. n'est pas juste. La formule exacte est

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \mathcal{L}\left(1 + \frac{b^2}{x^2}\right) \cdot \frac{(a-xi)^{-p}}{2} + \frac{(a+xi)^{-p}}{2} dx \\ &= \frac{\pi}{p-1} \left[\left(\frac{1}{a}\right)^{p-1} - \left(\frac{1}{a+b}\right)^{p-1} \right]. \end{aligned}$$

Tab. 185.

4 est fautive: le membre droit doit être $-\frac{1}{4}F'(p)\mathcal{L}(1-p^2)$. La même faute se trouve dans la Tab. 347 N:o 13, qui

est la différence des intégrales N:o 4 et 11 de la même table.

L'intégrale dont il s'agit est déduite dans l'Exposé pag. 264.

5. Lisez $\frac{1}{4}U(1 - p^2) \cdot F'(p)$.
10. Otez le terme 1 entre les crochets. La même faute dans Tab. 331 N:o 10.
- 11 est exprimée par une transcendente de RAABE. On peut l'avoir exprimée par une suite infinie comme il suit. En diminuant la distance des limites et en posant $x = y^{\frac{2}{b}}$, on trouvera

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (lx)^{2a} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}b-1}}{1+x^b} dx &= 2\left(\frac{2}{b}\right)^{2a+1} \int_0^1 (ly)^{2a} \cdot \frac{dy}{1+y^2} \\ &= 2\left(\frac{2}{b}\right)^{2a+1} \Gamma(2a+1) \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^r}{(2r+1)^{2a+1}} \end{aligned}$$

suivant Tab. 158 N:o 1.

13. Posez le signe — devant le membre droit ou écrivez la valeur en la forme

$$\frac{2\pi \operatorname{Sec} p\pi}{1-2p}.$$

14. Même remarque qu'à la table 166 N:o 10.

Tab. 187.

2. Mr B. d. H. a changé $\sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{(2r+1)^2}$ contre $\sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{(2r+1)^2}$,

mais il faut être $\sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^r}{(2r+1)^2} = \frac{1}{2}L(1)$.

- 7 peut s'exprimer par ma transcendente.

En effet on trouve

$$\int_1^\infty \frac{U(1+x^2)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}L2 + \frac{1}{2}L(1) = 2,0047586393.$$

Tab. 188.

- 3 est égale à $-\frac{\pi}{4} \mathcal{L}2 - \frac{1}{4} L(1) = -1,0023793197$.
- 4 est le quadruple de la valeur numérique de la précédente, c'est à dire $= 4,0095172787$.
- 14 est en effet la même que N:o 15 et peut être écrite ainsi:

$$\int_0^{\frac{1}{q}} \mathcal{U}(q+x) \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \mathcal{U}(1+q^2) \text{Arc tg } \frac{1}{q}.$$

Tab. 189.

- 3 est fautive. Je trouve

$$\int_1^{e^{-\frac{a}{c}}} \frac{x^{-bc} - x^{bc}}{\mathcal{U}x} \cdot dx = \frac{1}{2} \mathcal{U} \left(\frac{1+bc}{1-bc} \right)^2 + Ei \left(-\frac{a}{c} + ab \right) - Ei \left(-\frac{a}{c} - ab \right).$$

5. Si toutefois la dérivée est juste, cette formule ne peut pas valoir, à moins que plusieurs conditions ne soient remplies.
11. M^r B. d. H. a remarqué que cette formule est fautive. Pour m'en convaincre j'ai d'abord posé $x = q \text{ Cos } \varphi$, d'où vient

$$J = \int_{-q}^q \mathcal{U}(p-x) \sqrt{q^2-x^2} dx = q^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{U}(p-q \text{ Cos } \varphi) \text{Sin }^2 \varphi d\varphi$$

et en diminuant la distance des limites

$$J = q^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{U}(p^2 - q^2 \text{Cos }^2 \varphi) \text{Sin }^2 \varphi d\varphi. \dots\dots\dots (c)$$

Posé que p est positif et plus grand que la valeur numérique de q la fonction $\mathcal{U}(p^2 - q^2 \text{Cos }^2 \varphi)$ peut être développée en serie. Alors on aura

$$\mathcal{U}(p^2 - q^2 \text{Cos }^2 \varphi) = 2\mathcal{U}p - \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{q}{p} \right)^{2\nu} \frac{\text{Cos }^{2\nu} \varphi}{\nu}$$

et par suite

$$J = q^2 \left[2lp \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 q d\varphi - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{1}{\nu} \left(\frac{q}{p} \right)^{2\nu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\nu} \varphi \sin^2 q d\varphi \right].$$

Puisqu'on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 q d\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\nu} \varphi \sin^2 q d\varphi = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{2\Gamma(\nu + 2)},$$

on trouvera

$$\begin{aligned} J &= q^2 \left[\frac{\pi}{2} lp - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{1}{\nu} \left(\frac{q}{p} \right)^{2\nu} \cdot \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{2\Gamma(\nu + 2)} \right] \\ &= \frac{\pi q^2}{2} \left[lp - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{1}{\nu} \left(\frac{q}{p} \right)^{2\nu} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2\nu - 1)}{2^{\nu+1} \Gamma(\nu + 2)} \right], \end{aligned}$$

où la serie converge, quand même $p^2 = q^2$.

Convaincu par là, que N:o 11 est fautive, j'ai tâché de trouver sa valeur en forme finie. En différentiant la formule (c) ci-dessus par rapport à p on trouve

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dp} &= 2pq^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 q d\varphi}{p^2 - q^2 \cos^2 \varphi} \\ &= 2p \left[\frac{\pi}{2} - (p^2 - q^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{p^2 - q^2 \cos^2 \varphi} \right]. \end{aligned}$$

Mais on a

$$(p^2 - q^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{p^2 - q^2 \cos^2 \varphi} = \frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{2p} \cdot \pi$$

et par suite

$$\frac{dJ}{dp} = \pi [p - \sqrt{p^2 - q^2}].$$

En intégrant on trouve

$$J = \frac{\pi}{2} [p^2 - p\sqrt{p^2 - q^2} + q^2 \mathcal{U}(p + \sqrt{p^2 - q^2}) + C]$$

où C est la constante de l'intégration. Pour la déterminer on pose dans la formule (c) $p = q$; en désignant par J_1 la valeur correspondante de J , on aura

$$\begin{aligned} J_1 &= 2q^2 \mathcal{U}q \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin}^2 q d\varphi + 2q^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{U} \text{Sin } \varphi \cdot \text{Sin}^2 q d\varphi \\ &= \frac{\pi q^2}{2} [\mathcal{U}q - \mathcal{U}2 + \frac{1}{2}] \end{aligned}$$

suivant Tab. 330 N:o 6. Si dans valeur de J on pose $p = q$, on trouve aussi

$$J_1 = \frac{\pi}{2} [q^2 + q^2 \mathcal{U}q + C]$$

et puis

$$C = -q^2(\mathcal{U}2 + \frac{1}{2}).$$

En introduisant cela dans la valeur de J , on trouve enfin

$$J = \frac{\pi}{2} \left[p^2 - \frac{q^2}{2} - p\sqrt{p^2 - q^2} + q^2 \mathcal{U} \frac{p + \sqrt{p^2 - q^2}}{2} \right]$$

qui est la juste valeur de N:o 11.

- 12 peut être obtenue de la même manière, mais aussi en posant dans N:o 11 $\frac{1}{p}$ au lieu de p . Par là on aura

$$\int_{-q}^q (1 - px) \sqrt{q^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1 - \sqrt{1 - p^2 q^2}}{p^2} - \frac{q^2}{2} + q^2 \mathcal{U} \frac{1 + \sqrt{1 - p^2 q^2}}{2} \right]$$

où il faut que pq soit ≤ 1 .

13. On en peut dire autant que de N:o 5.

18. Lisez $\frac{\mathcal{U}ab}{b} F\left(\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2}}\right)$ au lieu de $\frac{\mathcal{U}ab}{b} F\left(\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}\right)$.

Tab. 190.

2. Otez le signe — devant le membre droit.

10. Lisez $\frac{\pi}{2} \mathcal{U}2$ au lieu de $-\frac{\pi}{2} \mathcal{U}2$.

14 est fautive: la vraie valeur est $= \frac{\pi}{2} l^2$.

17. Il y a deux fautes. La juste formule est

$$\int_0^1 l \left(\frac{c^2 \pi^2}{4} + (lx)^2 \right) \cdot \frac{x^{-\frac{b}{c}} - x^{\frac{b}{c}}}{1 - x^2} \cdot dx = \pi \operatorname{tg} \frac{b\pi}{2c} \cdot l\pi$$

$$+ \pi \sum_{\nu=1}^{\nu=c-1} (-1)^{\nu-1} \operatorname{Sin} \frac{\nu b \pi}{c} l \left\{ \left(\frac{c}{2} - \nu \right) \operatorname{Cot} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\nu \pi}{2c} \right) \right\}.$$

[$b + c$ impair].

Elle est déduite de Tab. 275 N:o 16, non N:o 17.

18 est déduite de Tab. 275 N:o 17, non N:o 18.

19 est déduite de Tab. 275 N:o 18, non N:o 19, mais je trouve une formule tout autre. Si dans l'intégrale

$$\int_0^{\infty} l(a^2 + x^2) \cdot \frac{e^{\frac{2\pi x}{3}} - e^{-\frac{2\pi x}{3}}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} \cdot dx = \sqrt{3} \cdot l \frac{6\Gamma\left(\frac{a+4}{6}\right)\Gamma\left(\frac{a+5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{a+2}{6}\right)}$$

on pose $e^{-\pi x} = y$, on aura $x = -\frac{ly}{\pi}$, $dx = -\frac{dy}{\pi y}$. Aux limites 0 et ∞ repondent 1 et 0 resp., et on trouve

$$\int_0^1 l \left(a^2 + \frac{(ly)^2}{\pi^2} \right) \cdot \frac{1 + y^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}(1 + y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{4}{3}})} \cdot dy = \pi \sqrt{3} l \frac{6\Gamma\left(\frac{a+4}{6}\right)\Gamma\left(\frac{a+5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{a+2}{6}\right)}.$$

Comme on a

$$l \left(a^2 + \frac{(ly)^2}{\pi^2} \right) = l(a^2 \pi^2 + (ly)^2) - 2l\pi,$$

on aura

$$\int_0^1 l(a^2 \pi^2 + (ly)^2) \cdot \frac{1 + y^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}(1 + y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{4}{3}})} \cdot dy = \pi \sqrt{3} l \frac{6\Gamma\left(\frac{a+4}{6}\right)\Gamma\left(\frac{a+5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{a+2}{6}\right)}$$

$$+ 2l\pi \int_0^1 \frac{1 + y^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}(1 + y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{4}{3}})} dy.$$

En posant $y = z^3$, on trouve la dernière intégrale $= \frac{\pi}{2}\sqrt{3}$ à l'aide de Tab. 7 N:o 21 et puis

$$\int_0^1 l(a^2x^2 + (ly)^2) \cdot \frac{1 + y^3}{y^3(1 + y^3 + y^4)} dy = \pi\sqrt{3}l \frac{6\pi\Gamma\left(\frac{a+4}{6}\right)\Gamma\left(\frac{a+5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{a+2}{6}\right)}.$$

Si l'on fait ici $a = \frac{\alpha}{\pi}$, on trouvera enfin

$$\int_0^1 l(\alpha^2 + (ly)^2) \cdot \frac{1 + y^3}{y^3(1 + y^3 + y^4)} dy = \pi\sqrt{3}l \frac{6\pi\Gamma\left(\frac{\alpha+4\pi}{6\pi}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+5\pi}{6\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\pi}{6\pi}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+q\pi}{6\pi}\right)}.$$

C'est selon moi la formule dont il s'agit.

Tab. 191.

1 à 6. En toutes ces intégrales la limite inférieure doit être 1 au lieu de 0. Voyez MALMSTEN, Specimen Analyticum etc. Upsaliæ 1842.

Tab. 192.

- 4 n'appartient pas ici. Voyez Tab. 298 N:o 3 ci-dessous.
 6 est fautive, mais aussi superflue, car elle est comprise en N:o 7. Voyez Tab. 50 N:o 16.
 7 est fautive en ce qu'elle a $1^{a/1}$ au lieu de $1^{a-1/1}$ en dénominateur. Cependant je préfère de l'écrire ainsi:

$$\int_0^1 (1-x^2)^{a-\frac{1}{2}} \cos 2px dx = \Gamma(a+\frac{1}{2}) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^r p^{2r}}{\Gamma(r+1)\Gamma(a+r+1)}.$$

8 est fautive. Écrivons

$$\int_0^1 (1-x^2)^{a-b-1} x^{2b-1} \cos px dx = \frac{\Gamma(a-b)}{2} \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^r p^{2r} \Gamma(b+r)}{\Gamma(2r+1)\Gamma(a+r)},$$

$$a > b.$$

9 est fautive. Lisez

$$\int_0^1 x^{b-1} (1-x)^{a-b-1} \operatorname{Cos}(\sqrt{p}x) dx = \Gamma(a-b) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r p^r \Gamma(b+r)}{\Gamma(2r+1) \Gamma(a+r)},$$

$$a > b.$$

13 n'appartient pas ici. Elle se trouve Tab. 8 N:o 8.

Tab. 193.

1 à 11. Toutes ces formules sont fautives comme M:r B. d. H. déjà a remarqué.

15 est fautive. Lisez

$$\int_0^x x^{p-2} \operatorname{Sin} qx dx = -\frac{\Gamma(p-1)}{q^{p-1}} \cdot \operatorname{Cos} \frac{p\pi}{2}, \quad 2 > p > 1.$$

19, 20. Ajoutez: $1 > \frac{p}{r} > 0$.

21 à 23. M:r B. d. H. prétend à bonne raison que ces formules sont fautives.

N:o 21 et 22 se trouvent aussi dans Tab. 246 N:o 8 et 9 avec d'autres limites. Nous y en parlerons.

Tab. 195.

1 est fautive en tant qu'il y a $q^2 \geq 1$ au lieu de $q < 1$. Pour $q = 1$ la valeur est $= \frac{\pi}{4}$. Les formules 1 à 4 sont de reste inutiles, car elles sont contenues en N:o 5 à 7.

Entre les intégrales de cette table manquent les formules ¹⁾

$$\int_0^x \frac{\operatorname{Sin} px \operatorname{Sin} qx}{x} dx = \frac{1}{4} \psi \left(\frac{p+q}{p-q} \right)^2,$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin}^2 qx \operatorname{Cos} px}{x} dx = \frac{1}{8} \psi \left(\frac{4q^2 - p^2}{p^4} \right).$$

¹⁾ Voyez B. d. H., Over eenige bepaalde Integralen van den vorm

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px} \operatorname{Sin} qx \operatorname{Sin} rx}{x^a} \dots dx. \quad (29, 35)$$

Tab. 196.

- 4 est fautive: lisez $\frac{1}{2^{2a}-1}$ au lieu de $\frac{1}{2^{2a}+1}$. Il vaut encore mieux d'écrire ¹⁾

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{Sin } ^{2a}qx - \text{Sin } ^{2a}px}{x} dx = \frac{1}{2} \frac{q^2}{p^2} \cdot \frac{(2a)_a}{2^{2a}}.$$

Tab. 197.

17. Lisez $\frac{q^3\pi}{3}$ au lieu de $\frac{1}{2}q^3\pi$.
-

Tab. 198.

- 10 est juste, mais il faut ajouter que l'intégrale est égale à $\frac{q^2\pi}{6}(3p - q)$ pour $p \geq q$.
 13. À l'aide d'un traité de Mr B. d. H. je trouve ²⁾

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{Sin } ^3px \text{ Sin } qx}{x^4} dx = \frac{q\pi}{24}(9p^2 - q^2), \quad q \leq p.$$

Cette valeur diffère beaucoup de la valeur donnée par Ohm.

Tab. 200.

- 1 à 3 sont fautives. La quantité C est la même que q dans Tab. 126 N:o 15. Voyez celle-ci. La juste valeur de cette intégrale est donnée en N:o 5.
 6 est fautive, à moins que a ne soit égal à zéro et $p < 1$. Elle est aussi superflue.
 10 à 12 sont vraiment «extraordinaires» et en outre parfaitement superflues, car N:o 7 les contient.
-

¹⁾ Exposé pag. 273.

²⁾ Over eenige bepaalde Integralen.

18, 19. Par faute d'impression on y lit $\left(b - \frac{2}{n}\right)^{a-1}$ au lieu

$$r = \frac{1}{2}(b-1)$$

de $(b - 2n)^{a-1}$. N:o 18 a une autre faute: lisez $\sum_{r=0} \dots$

$$r = \frac{1}{2}(b-1)$$

au lieu de $\sum_{r=1} \dots$

20 à 22. Ajoutez la condition: $b \geq a + 1$.

Tab. 201.

- 1, 2 sont fautives. La quantité C est la même que q dans Tab. 126 N:o 15 ci-dessus. La juste valeur est donnée dans N:o 4.
- 5 est fautive et d'ailleurs superflue.
- 9 à 12 sont en partie fautives, en partie superflues.
- 13, 14. Ces formules complètement fautives ne sont point données par moi. Je ne sais d'où M:r B. d. H. les a prises, car elles ne se trouvent pas au lieu cité.

Tab. 202.

6. La limite supérieure de la somme est $\frac{1}{2}b(1 - q)$, non $\frac{1}{2}(a - bq)$.
7. Il faut que la limite supérieure de la somme soit $\frac{1}{2}b(1 \pm q)$ au lieu de $\frac{1}{2}(a \pm bq)$.
- 10, 11 se trouvent aussi chez M:r SCHLÖMILCH (Analytische Studien I pag. 136, 137).
- 16, 17 sont tirées du Journal de l'Ecole polyt. comme la plupart des formules de cette table. En attendant que je puisse consulter le dit Journal, j'ai taché d'évaluer ces intégrales. D'abord je pose $b = 2\beta$, $2q = 2\beta + \alpha$ et

$$J. = \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\beta + \alpha)x \sin 2\beta x}{x^{2\beta+1}} dx.$$

Soit pour abrèger $\sin(2\beta + \alpha)x \sin^{2\beta}x = f(x)$: en intégrant par parties on trouve

$$\int \frac{f(x)}{x^{2\beta+1}} dx = -\frac{\Gamma(2\beta) \cdot f(x)}{\Gamma(2\beta+1) \cdot x^{2\beta}} - \frac{\Gamma(2\beta-1)}{\Gamma(2\beta+1)} \cdot \frac{f'(x)}{x^{2\beta-1}} - \frac{\Gamma(2\beta-2)}{\Gamma(2\beta+1)} \cdot \frac{f''(x)}{x^{2\beta-2}} \\ - \dots - \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2\beta+1)} \cdot \frac{f^{(2\beta-1)}(x)}{x} + \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(2\beta+1)} \cdot \int \frac{f^{(2\beta)}(x)}{x} dx.$$

Quand on prend l'intégrale entre les limites 0 et ∞ , tous les termes s'évanouissent hors le dernier, et on trouve

$$J = \frac{1}{\Gamma(2\beta+1)} \int_0^\infty \frac{f^{(2\beta)}(x)}{x} dx.$$

À l'aide des formules connues on aura

$$f(x) = \frac{(-1)^\beta}{2^{2\beta-1}} \sum_{r=0}^{\beta-1} (-1)^r (2\beta)_r \cos(2\beta-2r)x \sin(2\beta+\alpha)x \\ + \frac{(2\beta)_\beta}{2^{2\beta}} \cdot \sin(2\beta+\alpha)x \\ = \frac{(-1)^\beta}{2^{2\beta}} \sum_{r=0}^{\beta-1} (-1)^r (2\beta)_r [\sin(4\beta+\alpha-2r)x + \sin(\alpha+2r)x] \\ + \frac{(2\beta)_\beta}{2^{2\beta}} \cdot \sin(2\beta+\alpha)x$$

et par suite

$$f^{(2\beta)}(x) = \frac{(-1)^\beta}{2^{2\beta}} \sum_{r=0}^{\beta-1} (-1)^r (2\beta)_r [(4\beta+\alpha-2r)^{2\beta} \sin(\beta\pi + \overline{4\beta+\alpha-2r} \cdot x) \\ + (\alpha+2r)^{2\beta} \sin(\beta\pi + \overline{\alpha+2r} \cdot x)] \\ + \frac{(2\beta)_\beta}{2^{2\beta}} (2\beta+\alpha)^{2\beta} \sin(\beta\pi + \overline{2\beta+\alpha} \cdot x).$$

En observant qu'on a généralement

$$\sin(\beta\pi + kx) = (-1)^\beta \sin kx,$$

on peut écrire

$$j^{(2\beta)}(x) = \frac{1}{2^{2\beta}} \sum_{r=0}^{r=2\beta} (-1)^r (2\beta)_r \cdot (4\beta + \alpha - 2r)^{2\beta} \sin(4\beta + \alpha - 2r)x.$$

La formule connue

$$\int_0^\infty \frac{\sin kx}{x} dx = \pm \frac{\pi}{2} (k \gtrless 0)$$

donne maintenant

$$J = \frac{1}{2^{2\beta} \Gamma(2\beta + 1)} \cdot \frac{\pi}{2} \sum_{r=0}^{r=2\beta} (-1)^r (2\beta)_r (4\beta + \alpha - 2r)^{2\beta};$$

mais par une autre formule ¹⁾ on reconnaît que la somme finie est $= 2^{2\beta} \Gamma(2\beta + 1)$: donc on a

$$J = \int_0^\infty \frac{\sin(2\beta + \alpha)x \sin^{2\beta} x}{x^{2\beta + 1}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Si le nombre $2q$ est moindre que 2β , c'est à dire qu'il a la forme $2\beta - \alpha$, on pose $-\alpha$ au lieu de α dans la formule précédente en se souvenant que le nombre des termes de la somme toujours est $2\beta + 1$, quand même un arc devient négatif.

Si l'exposant b a la forme $2\beta + 1$, on trouve le même résultat. On a donc toujours

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2qx \sin^b x}{x^{b+1}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

18. Je trouve cette intégrale $= \infty$.

¹⁾ Voyez EYTELWEIN, Grundlehren der höheren Analysis. Berlin 1824 Tom I, pag. 567.

Tab. 203.

- 5, 6 sont superflues comme contenues en N:o 7 et 8.
 9, 10 sont comprises en N:o 11 et 12. Il faut que a soit égale à l'unité dans celles-ci.
-

Tab. 204.

12. Je préfère de l'écrire ainsi:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(a+k)x \cos(a-k)x}{1+x^2} \cdot x dx = \frac{\pi}{4}(e^{-2a} + e^{-2k}).$$

Il est digne de remarquer qu'on ne trouve pas la valeur de l'intégrale pour $k=0$ en posant $k=0$ dans la valeur ci-dessus. La valeur pour $k=0$ est donnée dans N:o 13.

14. Il est indiqué que cette formule vaut à condition que le nombre a est moindre que 3, c'est à dire, $a \leq 2$. La même formule se trouve Tab. 204 N:o 19 et Tab. 205 N:o 24, mais il y a p et r au lieu de a . Il est dit que p doit être < 1 et $r < 2$, mais dans l'Exposé (pag. 676) aucune condition n'est indiquée. À mon avis le nombre en question est ≤ 2 .
 16. Je ne sais d'où dérive la condition $-1 \leq p < -2$. Selon moi elle est $1 > p > -1$.
-

Tab. 205.

- 8, 9 sont contenues en N:o 10 et 11 et pour cela superflues.
 24. Voyez Tab. 204 N:o 14.
 25. Ajoutez $1 > a > -1$.
-

Tab. 207.

- 17 à 20 sont fautives, mais N:o 19 et 20 se rachètent par N:o 21 en y posant $p=a$, $a=1$ et $2b$ au lieu de b . Cette formule devient donc

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax dx}{1+x^{2b}}$$

$$= \frac{\pi}{2b} \sum_{r=1}^{r=b} e^{-a \sin(2r-1)\frac{\pi}{2b}} \sin \left\{ (2r-1)\frac{\pi}{2b} + a \cos(2r-1)\frac{\pi}{2b} \right\}.$$

Si l'on différentie par rapport à a , on aura

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax dx}{1+x^{2b}}$$

$$= - \frac{\pi}{2b} \sum_{r=1}^{r=b} e^{-a \sin(2r-1)\frac{\pi}{2b}} \cos \left\{ (2r-1)\frac{\pi}{b} + a (\cos 2r-1)\frac{\pi}{2b} \right\}.$$

22 est fautive.

Tab. 208.

12, 13 sont exprimées par des séries infinies. Il y a longtemps que j'ai les données¹⁾ par des séries finies, à savoir

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin px}{(q^2+x^2)^{a+1}} dx = \frac{\pi}{1^{a/1}} \cdot \frac{e^{-pq}}{2^{a+1}} \sum_{r=0}^{r=a-1} \frac{(a+r-1)^{2r/1}}{2^r \cdot 1^{r/1}} \cdot \frac{p^{a-r}}{q^{a+r}}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos px}{(q^2+x^2)^{a+1}} dx = \frac{\pi}{1^{a/1}} \cdot \frac{e^{-pq}}{2^{a+1}} \sum_{r=0}^{r=a} \frac{(a+r)^{2r/1}}{2^r \cdot 1^{r/1}} \cdot \frac{p^{a-r}}{q^{a+r+1}}$$

lesquelles peuvent remplacer N:o 12 et 13 ainsi que N:o 16 et 15 resp.

14 est fautive. La juste valeur est

$$\frac{(-1)^{a-1}}{1^{a-1/1}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^{a-1}}{dq^{a-1}} \left(\frac{e-p\sqrt{q}}{\sqrt{q}} \right)^1).$$

¹⁾ Voyez Kongl. Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Band 5 N:o 8. Stockholm 1865.

Tab. 209.

11. Lisez $-\frac{1}{2}e^{-q(2b-a)}$ au lieu de $+e^{-q(2b-a)}$.
 16. Lisez πe^{-q} au lieu de πe^{-p} .
-

Tab. 210.

- 1 à 4. M:r B. d. H. prétend que ces formules ne valent qu'entre les limites $-\infty$ et ∞ . N:o 1 et 2 sont données par LAPLACE qui à l'endroit cité dit précisément le même. Elles sont donc seulement mal placées.

Quant à N:o 3 et 4, je trouve toujours la valeur $= \frac{2\pi}{b} \cdot e^{-ab}$, soit que b est plus grand que c ou non.

- 5 est fautive, comme M:r B. d. H. déjà a remarqué. En son Exposé (pag. 526) il donne (J'ai changé s et t contre a et b).

$$\int_0^{\infty} \frac{a^2 + x^2}{b^2 + (a^2 + x^2)^2} \cos pxdx = \frac{\pi e^{-p\lambda}}{2\sqrt{a^4 + b^2}} (\lambda \cos p\mu - \mu \sin p\mu)$$

où on a

$$2\lambda^2 = \sqrt{a^4 + b^2} + a^2, \quad 2\mu^2 = \sqrt{a^4 + b^2} - a^2.$$

En différentiant par rapport à p , on trouve

$$\int_0^{\infty} \frac{a^2 + x^2}{b^2 + (a^2 + x^2)^2} \cdot x \sin pxdx = \frac{\pi e^{-p\lambda}}{2} \cos p\mu$$

et en y posant $p = 2a$, on aura

$$\int_0^{\infty} \frac{a^2 + x^2}{b^2 + (a^2 + x^2)^2} \cdot x \sin 2axdx = \frac{\pi e^{-2a\lambda}}{2} \cos 2a\mu.$$

C'est la juste formule N:o 5.

Tab. 212.

- 8 à 11. Dans ses observations et corrections M:r B. d. H. a déclaré que ces intégrales sont infinies et je pense

qu'il en a raison. Cependant il les a admises dans ses nouvelles tables.

14, 15 ont été traitées, quand il s'agissait de Tab. 70 N:o 16 et 17. Ces formules se trouvent aussi dans l'Exposé pag. 586.

17. Ajoutez $p \geq 0$.

Tab. 213.

15, 16 sont déduites de N:o 12 en différentiant par rapport à q . Les valeurs sont données en forme de dérivées lesquelles on aura à chercher en chaque cas particulier. Puisque cela est pénible, je préfère de les exprimer par des sommes. On trouve aisément

$$D_q^{2c-1}(\cos qx) = (-1)^c x^{2c-1} \sin qx$$

$$D_q^{2c}(\cos qx) = (-1)^c x^{2c} \cos qx$$

$$D_q^{2c-1}(q^{p-1}e^{-aq})$$

$$= e^{-aq} \sum_{\nu=0}^{\nu=2c-1} (-1)^{\nu+1} (2c-1)_{\nu} a^{2c-1-\nu} (p-1)^{\nu/-1} q^{p-1-\nu}$$

$$D_q^{2c}(q^{p-1}e^{-aq}) = e^{-aq} \sum_{\nu=0}^{\nu=2c} (-1)^{\nu} (2c)_{\nu} a^{2c-\nu} (p-1)^{\nu/-1} q^{p-1-\nu}.$$

Si l'on différencie N:o 12 $2c-1$ et $2c$ fois, on aura

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{(a-xi)^{-p} + (a+xi)^{-p}}{2} x^{2c-1} \sin qxdx \\ &= \frac{\pi \cdot a^{2c-1} q^{p-1} e^{-aq}}{2\Gamma(p)} \sum_{\nu=0}^{\nu=2c-1} \frac{(-1)^{c+\nu+1} (2c-1)_{\nu} \cdot (p-1)^{\nu/-1}}{(aq)^{\nu}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{(a-xi)^{-p} + (a+xi)^{-p}}{2} x^{2c} \cos qxdx \\ &= \frac{\pi \cdot a^{2c} q^{p-1} e^{-aq}}{2\Gamma(p)} \sum_{\nu=0}^{\nu=2c} \frac{(-1)^{c+\nu} (2c)_{\nu} \cdot (p-1)^{\nu/-1}}{(aq)^{\nu}}. \end{aligned}$$

Ces formules sont N:o 15 et 16, mais celle-là n'a pas le facteur étrange qui se trouve dans le texte.

17, 18 s'obtiennent par N:o 11 de la même manière, savoir

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{(a-xi)^{-p} - (a+xi)^{-p}}{2i} \cdot x^{2c} \operatorname{Sin} qxdx \\ = \frac{\pi \cdot a^{2c} q^{p-1} e^{-aq}}{2\Gamma(p)} \sum_{r=0}^{r=2c} \frac{(-1)^{c+r} (2c)_r \cdot (p-1)^{r-1}}{(aq)^r} \\ \int_0^{\infty} \frac{(a-xi)^{-p} - (a+xi)^{-p}}{2i} \cdot x^{2c-1} \operatorname{Cos} qxdx \\ = \frac{\pi \cdot a^{2c-1} q^{p-1} e^{-aq}}{2\Gamma(p)} \sum_{r=0}^{r=2c-1} \frac{(-1)^{c+r+1} (2c-1)_r (p-1)^{r-1}}{(aq)^r}. \end{aligned}$$

21, 22 proviennent de N:o 11 et 12 en différentiant b fois par rapport à p .

Tab. 220.

5, 6 ont subi des corrections nécessaires. Afin d'éviter un erreur en les appliquant j'ai déduit les formules. J'ai obtenu N:o 5 par la formule (1322) en l'Exposé de Mr B. d. H. En posant dans celle-ci $-r$ et $2a$ au lieu de r et s , on aura

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+2r \operatorname{Cos} 2ax + r^2} \cdot \frac{dx}{q^2 + x^2} = \frac{\pi}{2q(1-r^2)} \cdot \frac{1-re^{-2aq}}{1+re^{-2aq}}.$$

Si l'on fait $r = e^{-2ac}$ on trouvera

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{e^{-2ac} + 2 \operatorname{Cos} 2ax + e^{2ac}} \cdot \frac{dx}{q^2 + x^2} = \frac{\pi}{2q(e^{2ac} - e^{-2ac})} \cdot \frac{e^{2aq} - e^{-2ac}}{e^{2aq} + e^{-2ac}}.$$

C'est N:o 5 après quelque reduction.

N:o 6 s'obtient par N:o 3 de cette table et sa valeur est

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{-2ac}}{e^{2aq} + e^{-2ac}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1 + e^{2a(c+q)}}.$$

- 8, 9. Ces formules fautives peuvent être remplacées par les formules (1562), (1563), (1564) dans l'Exposé. Voyez aussi Tab. 221 N:o 18 ci-dessous.

Tab. 221.

- 1, 2. Mr B. d. H. prétend qu'elles sont fautives; pourtant je les trouve par la formule (1324) de l'Exposé.
 3 est la même que N:o 2.
 4. Je l'ai trouvée par Tab. 205 N:o 5 et (1324) de l'Exposé, en écrivant l'intégrale comme il suit

$$-\frac{1}{2p} \int_0^{\infty} \frac{\cos bxdx}{1+x^2} + \frac{1-p^2}{2p} \int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{1-2p \cos ax + p^2} \cdot \frac{dx}{1+x^2}.$$

- 18, 19. Mr B. d. H. a déjà rémarqué que ces formules sont fautives. Leurs justes valeurs sont données dans l'Exposé N:o 1330, 1331 et 1332. En y posant $-p$ au lieu de p , on aura N:o 8 et 9 de cette table.
 20. Par N:o 1408 de l'Exposé on trouve

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin 2ax}{1-2p \cos 2ax + p^2} \cdot \frac{x dx}{q^2 - x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{p \cos 2aq}{1-2p \cos 2aq + p^2}.$$

Tab. 222.

- 2 est fautive, comme Mr B. d. H. a remarqué. Elle peut être remplacée par quelques formules tirées de l'Exposé. Cependant il est nécessaire de les déduire, parce que je soupçonne quelque incorrection. Posons donc

$$J_1 = \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1-2p \cos ax + p^2} \cdot \frac{dx}{x^4 + 2q^2x^2 \cos 2\lambda + q^4}.$$

Suivant l'Exposé (pag. 190 form. (102)) on a

$$\frac{\cos ax}{1-2p \cos ax + p^2} = \frac{1}{p(1-p^2)} \left[-1 + (1+p^2) \sum_{r=0}^{r=\infty} p^r \cos rax \right],$$

$$p^2 < 1.$$

i l'on introduit cela et que l'on pose pour abrèger

$$v^4 + 2q^2v^2 \cos 2\lambda + q^4 = N,$$

on aura

$$J_1 = \frac{1}{p(1-p^2)} \left[- \int_0^\infty \frac{dx}{N} + (1+p^2) \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} p^\nu \int_0^\infty \frac{\cos \nu ax}{N} dx \right]$$

Par Tab. 210 N:o 8 on trouve

$$\int_0^\infty \frac{\cos \nu ax}{N} dx = \frac{\pi e^{-\nu a q \cos \lambda} \sin (\lambda + \nu a q \sin \lambda)}{2q^3 \sin 2\lambda}$$

d'où en posant $\bar{a} = 0$ on aura

$$\int_0^\infty \frac{dx}{N} = \frac{\pi \sin \lambda}{2q^3 \sin 2\lambda}.$$

En mettant ces valeurs dans J_1 , on trouve

$$J_1 = \frac{\pi \operatorname{Cosec} 2\lambda}{2q^3 p(1-p^2)} \left[- \sin \lambda + (1+p^2) \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} p^\nu e^{-\nu a q \cos \lambda} \sin (\lambda + \nu a q \sin \lambda) \right].$$

Par des formules connues on a

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} p^\nu e^{-\nu a q \cos \lambda} \sin (\lambda + \nu a q \sin \lambda) \\ = \cos \lambda \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} p^\nu e^{-\nu a q \cos \lambda} \sin (\nu a q \sin \lambda) \\ + \sin \lambda \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} p^\nu e^{-\nu a q \cos \lambda} \cos (\nu a q \sin \lambda); \end{aligned}$$

mais deux autres formules¹⁾ donnent

¹⁾ Voyez p. ex. SCHLÖMILCH, Handbuch der alg. Analysis, 5ième edit. Jena 1873 pag. 265.

$\nu = \infty$

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} p^{\nu} e^{-\nu a q \cos \lambda} \sin (\nu a q \sin \lambda) \\ = \frac{p e^{-a q \cos \lambda} \sin (a q \sin \lambda)}{1 - 2 p e^{-a q \cos \lambda} \cos (a q \sin \lambda) + p^2 e^{-2 a q \cos \lambda}} \\ = \frac{p \sin (a q \sin \lambda)}{e^{a q \cos \lambda} - 2 p \cos (a q \sin \lambda) + p^2 e^{-a q \cos \lambda}}, \end{aligned}$$

 $\nu = \infty$

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} p^{\nu} e^{-\nu a q \cos \lambda} \cos (\nu a q \sin \lambda) \\ = \frac{1 - p e^{-a q \cos \lambda} \cos (a q \sin \lambda)}{1 - 2 p e^{-a q \cos \lambda} \cos (a q \sin \lambda) + p^2 e^{-2 a q \cos \lambda}} \\ = \frac{e^{a q \cos \lambda} - p \cos (a q \sin \lambda)}{e^{a q \cos \lambda} - 2 p \cos (a q \sin \lambda) + p^2 e^{-a q \cos \lambda}} \end{aligned}$$

or,

 $\nu = \infty$

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} p^{\nu} e^{-\nu a q \cos \lambda} \sin (\lambda + \nu a q \sin \lambda) \\ = \frac{e^{a q \cos \lambda} \sin \lambda + p \sin (a q \sin \lambda - \lambda)}{e^{a q \cos \lambda} - 2 p \cos (a q \sin \lambda) + p^2 e^{-a q \cos \lambda}}. \end{aligned}$$

et après quelques reductions

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\pi \operatorname{Cosec} 2\lambda}{2q^3(1-p^2)} \\ &\cdot \frac{2 \cos(aq \sin \lambda) \sin \lambda + p(e^{aq \cos \lambda} - e^{-aq \cos \lambda}) \sin \lambda + (1+p^2) \sin(aq \sin \lambda - \lambda)}{e^{aq \cos \lambda} - 2p \cos(aq \sin \lambda) + p^2 e^{-aq \cos \lambda}}. \end{aligned}$$

On voit donc que N:o 1262 de l'Exposé est fautive.
Cherchons encore

$$J_2 = \int_0^{\infty} \frac{1}{1 - 2p \cos ax + p^2} \cdot \frac{dx}{x^4 + 2q^2 x^2 \cos 2\lambda + q^4}.$$

Comme auparavant on a

$$\frac{1}{1 - 2p \cos ax + p^2} = \frac{1}{1 - p^2} \left[-1 + 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} p^{\nu} \cos \nu a x \right], \quad p^2 < 1$$

et puis par les formules précédentes

$$J_2 = \frac{\pi \operatorname{Cosec} 2\lambda}{2q^3(1-p^2)} \cdot \frac{(e^{aq \cos \lambda} - p^2 e^{-aq \cos \lambda}) \sin \lambda + 2p \sin(aq \sin \lambda) \cos \lambda}{e^{aq \cos \lambda} - 2p \cos(aq \sin \lambda) + p^2 e^{-aq \cos \lambda}}.$$

Les intégrales J_1 et J_2 peuvent remplacer la formule fautive N:o 2.

4 est juste, mais elle s'écrit mieux ainsi:

$$J = \frac{\pi \operatorname{Cosec} 2\lambda}{2q^2(1+p)} \cdot \frac{(e^{aq \cos \lambda} + p e^{-aq \cos \lambda}) \sin(aq \sin \lambda)}{e^{2aq \cos \lambda} - 2p \cos(2aq \sin \lambda) + p^2 e^{-2aq \cos \lambda}}.$$

6 est fautive. Lisez

$$\int_0^\infty \frac{e^{2ac} - e^{-2ac}}{e^{2ac} + 2 \cos 2ax + e^{-2ac}} \cdot \frac{dx}{x^2 + (b+c)^2} = \frac{\pi}{2(b+c)} \cdot \frac{e^{2a(b+c)} - e^{-2ac}}{e^{2a(b+c)} + e^{-2ac}}.$$

9, 10 sont justes, mais je préfère d'écrire leurs valeurs ainsi:

$$\text{N:o } 9 = \frac{\pi}{2(b-c)} \cdot \frac{e^{2ab} - 1}{e^{2ab} + 1}, \quad b > c,$$

$$\text{N:o } 10 = \frac{\pi}{2(c-b)} \cdot \frac{e^{2a(c-b)} - e^{-2ac}}{e^{2a(c-b)} + e^{-2ac}}, \quad b < c.$$

Tab. 225.

18, 19 sont justes, mais N:o 18 vaut pour a de la forme $4h$ et $4h+3$, N:o 19 pour a de la forme $4h+1$ et $4h+2$. Pour les éprouver j'ai calculé les intégrales

$$\int_0^\infty \frac{\sin^8 px}{x^3 \sqrt{x}} dx = \frac{2\sqrt{\pi} \cdot p^{\frac{5}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot 5} [-9\sqrt{3} + 14\sqrt{2} - 3]$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^8 px}{x^4 \sqrt{x}} dx = \frac{8\sqrt{\pi} \cdot p^{\frac{7}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} [9 - 27\sqrt{3} + 28\sqrt{2}]$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^8 px}{x^5 \sqrt{x}} dx = \frac{32\sqrt{\pi} \cdot p^{\frac{9}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} [-57 + 81\sqrt{3} - 56\sqrt{2}]$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 px}{x^6 \sqrt{x}} dx = \frac{128\sqrt{\pi} \cdot p^{\frac{1}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} [-249 + 243\sqrt{3} - 112\sqrt{2}].$$

Tab. 226.

5, 6 sont fautives, mais les fautes sont faciles à corriger.

Dans N:o 5 lisez $-\frac{1}{2\sqrt{3b-2a}}$ au lieu de $+\frac{1}{2\sqrt{3b-2a}}$.

En N:o 6 il faut que tous les termes entre les crochets aient le signe — hors $\frac{1}{\sqrt{3b}}$ et $\frac{3}{\sqrt{b}}$.

Tab. 229.

1, 2 contiennent une constante p dont la valeur selon de LAPLACE est = 3,625608. Par les formules¹⁾

$$\int_0^{\infty} e^{\beta xi} x^{n-1} dx = \frac{\Gamma(n)}{\beta^n} e^{\frac{n\pi i}{2}}, \quad \int_0^{\infty} e^{-\beta xi} x^{n-1} dx = \frac{\Gamma(n)}{\beta^n} e^{-\frac{n\pi i}{2}}, \quad 1 > n > 0,$$

$$\beta > 0$$

on trouve

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{4}}} dx = \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \sin \frac{\pi}{8}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^{\frac{3}{4}}} dx = \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \cos \frac{\pi}{8}.$$

La constante que de LAPLACE a désignée par p n'est donc autre chose que le nombre qu'on désigne à présent par $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 3,6256099082$.

3, 4 peuvent être remplacées par les formules plus générales

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{n-1} \sin \beta x dx &= \frac{\Gamma(n)}{\beta^n} \sin \frac{n\pi}{2} \\ \int_0^{\infty} x^{n-1} \cos \beta x dx &= \frac{\Gamma(n)}{\beta^n} \cos \frac{n\pi}{2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \beta &> 0 \\ 1 &> n > 0 \end{aligned}$$

¹⁾ Voyez MINDING, Integral-Tafeln pag. 158.

5, 6. Après les corrections indiquées elles deviennent

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin px}{a+bx} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} = -\frac{\pi}{\sqrt{ab}} \sin \frac{ap}{b} + \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{b}} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{1}{1^{\nu/2}} \cdot \sin(2\nu-1) \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{2ap}{b}\right)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos px}{a+bx} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{\pi}{\sqrt{ab}} \cos \frac{ap}{b} + \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\pi}{b}} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{1^{\nu/2}} \cdot \cos(2\nu-1) \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{2ap}{b}\right)^{\nu}.$$

7 est fautive. Parce qu'elle ne s'accordait pas avec une formule suivante, j'entrepris de l'évaluer. En désignant l'intégrale par J et en décomposant la fraction $\frac{1}{(a^2+x^2)\sqrt{x}}$, on trouve

$$J = \frac{1}{a^2} \left[\int_0^{\infty} \frac{\cos bx - \sin bx}{\sqrt{x}} dx - \int_0^{\infty} \frac{\cos bx - \sin bx}{a^2 + x^2} \cdot x\sqrt{x} dx \right].$$

Par Tab. 224 N:o 4 et 5 on voit que la première intégrale est zéro. Or, on a

$$J = -\frac{1}{a^2} \int_0^{\infty} \frac{\cos bx - \sin bx}{a^2 + x^2} \cdot x\sqrt{x} dx.$$

En différentiant la formule primitive

$$J = \int_0^{\infty} \frac{\cos bx - \sin bx}{a^2 + x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x}} dx$$

deux fois par rapport à b , on aura

$$\frac{dJ}{db} = - \int_0^{\infty} \frac{\sin bx + \cos bx}{a^2 + x^2} \cdot \sqrt{x} dx$$

$$\frac{d^2J}{db^2} = - \int_0^{\infty} \frac{\cos bx - \sin bx}{a^2 + x^2} \cdot x\sqrt{x} dx$$

et par suite

$$\frac{d^2J}{db^2} = a^2 J.$$

L'intégrale complète de cette equation différentielle du second ordre est

$$J = Ae^{ab} + Be^{-ab}$$

où il faut déterminer les constantes arbitraires A et B . En posant $b = 0$ dans l'intégrale primitive, on aura

$$J_{(b=0)} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)\sqrt{x}} = \frac{\pi}{a\sqrt{2a}};$$

de même on trouve

$$\frac{dJ}{db}_{(b=0)} = - \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{a^2 + x^2} = - \frac{\pi}{\sqrt{2a}}.$$

L'intégrale complète donne

$$J_{(b=0)} = A + B, \quad \frac{dJ}{db}_{(b=0)} = Aa - Ba$$

d'où s'ensuivent les équations

$$A + B = \frac{\pi}{a\sqrt{2a}}, \quad A - B = - \frac{\pi}{a\sqrt{2a}}.$$

On a donc $A = 0$, $B = \frac{\pi}{a\sqrt{2a}}$ et enfin

$$J = \int_0^{\infty} \frac{\cos bx - \sin bx}{a^2 + x^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{\pi e^{-ab}}{a\sqrt{2a}}.$$

C'est la juste valeur de N:o 7 que M:R SCHLÖMILCH a trouvée d'une autre manière ou, pour m'exprimer plus exactement, il a calculé les intégrales

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{a^2 + x^2} \cdot \frac{dx}{x^{\mu}}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{a^2 + x^2} \cdot \frac{dx}{x^{\mu}}$$

séparément et puis il y a posé $\mu = \frac{1}{2}$. En introduisant cette valeur particulière il a écrit par inadvertence $\sec \frac{\pi}{4}$ et $\operatorname{Cosec} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ au lieu de $\sqrt{2}$.

- 8 dérive de N:o 7 en la différentiant deux fois par rapport à b . De cette manière on trouve

$$\int_0^x \frac{\sin bx - \cos bx}{a^2 + x^2} \cdot x\sqrt{x} dx = \pi e^{-ab} \sqrt{\frac{a}{2}} :$$

en y posant $a = 1$, on aura N:o 8.

- 9 a subi des corrections, mais ce nonobstant elle me semble fautive. Elle proviendrait, si l'on différentie N:o 7 une fois par rapport à b et une autre fois par rapport à a ; mais avec cela on trouve

$$\int_0^x \frac{\cos bx + \sin bx}{(a^2 + x^2)^2} \cdot \sqrt{x} dx = \frac{\pi e^{-ab}}{2a\sqrt{2a}} \left(b + \frac{1}{2a} \right)$$

qui diffère de N:o 9 du texte par le signe dans le numérateur.

- 10 est juste après la correction. Elle provient de N:o 8 ci-dessus en la différentiant par rapport à a .

Tab. 231.

- 1 est fautive. Puisqu'on a $\cos 2px = \cos^2 px - \sin^2 px$, elle est la même que Tab. 229 N:o 8. On a donc

$$\int_0^x \frac{\cos 2px}{\cos px + \sin px} \cdot \frac{x\sqrt{x}}{1 + x^2} \cdot dx = -\frac{\pi e^{-p}}{\sqrt{2}}.$$

- 2, 3 sont fautives.

- 4 est fautive. Lisez

$$\int_0^x \frac{\cos 2px}{\cos px + \sin px} \cdot \frac{x\sqrt{x} \cdot dx}{(q^2 + x^2)^2} = -\frac{\pi e^{-pq}}{2\sqrt{2}q} \left(p - \frac{1}{2q} \right).$$

Elle est la même que Tab. 229 N:o 10.

7. M:r B. d. H. y a fait une correction: il pose $\sin^2 x$ au lieu de $\cos^2 x$, mais selon moi il en a tort. Il donne¹⁾ lui-même

¹⁾ Voyez l'Exposé pag. 394.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-p^2 \sin^2 x}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{2}{p^2} [E(p) - (1-p^2)F(p)]$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-p^2 \cos^2 x}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{2}{p^2} [F(p) - E(p)].$$

Tab. 232.

Pour plus de clarté à l'égard des corrections je vais déduire quelques formules dont quelques-unes se trouvent dans les tables, mais plusieurs manquent. Cherchons d'abord les intégrales

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{pxi} dx}{x+q+ri} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{pxi} dx}{x+q^2+r^2} + (q-ri) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{pxi} dx}{x+q^2+r^2}$$

$$J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{pxi} dx}{x-q+ri} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{pxi} dx}{x-q^2+r^2} - (q+ri) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{pxi} dx}{x-q^2+r^2}$$

$$J_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{pxi} dx}{x+q-ri} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{pxi} dx}{x+q^2+r^2} + (q+ri) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{pxi} dx}{x+q^2+r^2}$$

$$J_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{pxi} dx}{x-q-ri} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{pxi} dx}{x-q^2+r^2} - (q-ri) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{pxi} dx}{x-q^2+r^2}$$

où les intégrales à droite sont provenues en multipliant le numérateur et le dénominateur de chaque intégrale primitive par $x+q-ri$, $x-q-ri$, $x+q+ri$, $x-q+ri$ resp.

En substituant $x-q$ au lieu de x , on aura

$$J_1 = e^{-pqi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{pxi} dx}{x^2+r^2} - ri \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{pxi} dx}{x^2+r^2} \right];$$

mais suivant Tab. 147 N:o 11 on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{pxi} dx}{x^2+r^2} = \frac{\pi}{r} e^{-pr}$$

et en la différentiant par rapport à p , on trouve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{p x i} dx}{x^2 + r^2} = -\frac{\pi}{i} e^{-pr}.$$

Lorsque les deux dernières s'introduisent dans la valeur de J_1 , il vient

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{p x i} dx}{x + q + r i} = 0.$$

De la même manière on obtient

$$J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{p x i} dx}{x - q + r i} = 0$$

$$J_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{p x i} dx}{x + q - r i} = 2\pi i e^{-p(r + qi)}$$

$$J_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{p x i} dx}{x - q - r i} = 2\pi i e^{-p(r - qi)}.$$

Comme on a (Tab. 147 N:o 10)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-p x i} dx}{x^2 + r^2} = \frac{\pi}{r} \cdot e^{-pr}$$

et que la différentiation par rapport à p donne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{-p x i} dx}{x^2 + r^2} = \frac{\pi}{i} e^{-pr},$$

on aura de la même manière que précédemment

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-p x i} dx}{x + q + r i} = -2\pi i e^{-p(r + qi)},$$

$$J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-p x i} dx}{x - q + r i} = -2\pi i e^{-p(r + qi)},$$

$$J_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-pxi} dx}{x + q - ri} = 0,$$

$$J_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-pxi} dx}{x - q - ri} = 0.$$

Si l'on soustrait J_1 de J_1 , J'_2 de J_2 etc. et que l'on divise par $2i$, on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Sin } pxdx}{x + q + ri} = \pi e^{-p(r-qi)}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Sin } pxdx}{x - q + ri} = \pi e^{-p(r+qi)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Sin } pxdx}{x + q - ri} = e^{-p(r+qi)}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Sin } pxdx}{x - q - ri} = \pi e^{-p(r-qi)}.$$

Si l'on additionne J_1 et J_1 , J_2 et J_2 et ainsi de suite et qu'on divise par 2, on trouvera

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Cos } pxdx}{x + q + ri} = -\pi i e^{-p(r-qi)}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Cos } pxdx}{x - q + ri} = -\pi i e^{-p(r+qi)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Cos } pxdx}{x + q - ri} = \pi i e^{-p(r+qi)}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Cos } pxdx}{x - q - ri} = \pi i e^{-p(r-qi)}.$$

La troisième et quatrième parmi celles-là est Tab. 232 N:o 4 et 7; la quatrième parmi celles-ci est Tab. 233 N:o 7; la troisième montre que le signe du membre droit dans Tab. 233 N:o 3 doit être +.

Les intégrales J_1 , J_2 etc. et J'_1 , J'_2 etc. auraient eu leur place en Tab. 147.

Par les formules (6) ... (9) en N:o 8 de la Tab. 131 ci-dessus on obtient les suivantes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{pxi} dx}{q + xi} = 2\pi e^{-pq}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{pxi} dx}{q - xi} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-pxi} dx}{q + xi} = 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-pxi} dx}{q - xi} = 2\pi e^{-pq}$$

lesquelles, traitées comme les formules que je viens de déduire, donnent

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos px dx}{q + xi} = \pi e^{-pq}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos px}{q - xi} dx = \pi e^{-pq};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin px}{q + xi} dx = -\pi i e^{-pq}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin px}{q - xi} dx = \pi i e^{-pq}$$

qui ne se trouvent point dans la Tab. 232.

17, 18 sont fautives.

Tab. 233.

3. Lisez (Voyez Tab. 232 ci-dessus)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos px}{x + q - ri} dx = \pi i e^{-p(r+qi)}.$$

20. Une faute est corrigée, une autre reste. Lisez

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p + qx}{r + 2sx + x^2} \cdot \cos . tx dx = \pi e^{-t\sqrt{r-s^2}} \left[q \sin st + \frac{p - qs}{\sqrt{r-s^2}} \cos st \right].$$

22. Mr B. d. H. veut qu'on change $\cos \{(b - c)\lambda\}$ contre $\cos (b + 1)\lambda$, mais il doit être $\cos (b - 1)\lambda$.

23 est à proprement parler la même que N:o 21.

24, 25 sont fautives.

Tab. 235.

20 vaut pour de très grands valeurs de a .

Tab. 237.

1, 2 s'expriment aussi par mes transcendentes, à savoir

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{tg} x dx = \frac{1}{4} [L(1) - H(1)] = 0,1857845358$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{Cot} x dx = \frac{1}{4} [L(1) + H(1)] = 0,7301810584.$$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{\sin 2x} = \frac{1}{4} L(1) = 0,4579827971.$$

$$6. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2 dx}{\sin^2 x} = \frac{1}{2} H\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi^2}{16} = 0,8435118417.$$

8 est fautive comme Tab. 239 N:o 19 dont elle dérive.
Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^{p+1}}{\sin^2 x} dx = -\left(\frac{\pi}{4}\right)^{p+1} + \frac{1}{2}(p+1)\left(\frac{\pi}{4}\right)^p \left[\frac{2}{p} - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{S_{2\nu}}{p+2\nu} \cdot \frac{1}{4^{2\nu-1}}\right].$$

9. On peut écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin^{a-1} x dx}{\cos a + 1x} = \frac{1}{4a} \left[\pi - Z\left(\frac{a+3}{4}\right) + Z\left(\frac{a+1}{4}\right) \right].$$

14 est fautive. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin 4x dx}{(1 - \sin^2 x \cos^2 x)^2} = \frac{\pi(2 - \sqrt{3})}{3}.$$

Tab. 238.

10 est fautive. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(p \operatorname{tg} x) \cdot x dx = \frac{\pi}{4} e^{-p} [A + 12p - e^p Ei(-2p)].$$

11 est aussi fautive. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}(p \operatorname{tg} x) \operatorname{tg} x \cdot x dx = -\frac{\pi}{4} e^{-p} [A + l2p + e^p Ei(-2p)].$$

13. Au lieu de la formule du texte écrivons

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \operatorname{Cot} x dx = \frac{\pi^2}{4} l2 - \frac{7}{8} S_3.$$

14. Écrivez plutôt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \operatorname{Cot} x dx = \frac{\pi^3}{8} l2 - \frac{9\pi}{16} S_3.$$

16 à 19. Toutes ces formules sont données par LEGENDRE¹⁾ qui les exprime de plusieurs manières. Il y emploie quelques transcendentes dont on à ce que je sais ne possède pas de tables. Je préfère les expressions suivantes où les intégrales sont exprimées par S_ν . On a donc (Exerc. Tom II pag. 200)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^m \operatorname{Cot} x dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \left[\frac{1}{m} - 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{S_{2\nu}}{m+2\nu} \cdot \frac{1}{4^\nu} \right]. \quad \text{N:o 18}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^m \operatorname{Cot} \frac{1}{2} x dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \left[\frac{2}{m} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{S_{2\nu}}{m+2\nu} \cdot \frac{1}{4^{2\nu-1}} \right]. \quad \text{N:o 19}$$

Si l'on multiplie N:o 18 par 2 et la soustrait de N:o 19, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^m \operatorname{tg} \frac{1}{2} x dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(4^\nu - 1) S_{2\nu}}{m+2\nu} \cdot \frac{1}{4^{2\nu-1}}. \quad \text{N:o 16}$$

¹⁾ Voyez Exercices de calcul intégrale, Paris 1817 Tom II. Cinquième partie § V.

Dans ces formules le nombre m peut être entier, mais aussi fraction.

Les formules N:o 18 et N:o 19 du texte sont toutes deux fautives: le premier terme entre les crochets doit être $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$ resp., non 1, 2. La même faute se trouve aussi dans les Exercices.

N:o 17 est comprise dans N:o 19.

Tab. 239.

1. On peut écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} dx = L(1) = 1,83193118825.$$

2 à 5 sont comprises dans N:o 5, après qu'elle ait été corrigée.

Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^m}{\sin x} \cdot dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \left[\frac{1}{m} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(2^{2\nu}-1)S_{2\nu}}{4^{2\nu-1}(m+2\nu)} \right]$$

où le nombre m peut être aussi bien entier que fraction.

$$9. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{m+1}}{\sin^2 x} dx = (m+1) \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \left[\frac{1}{m} - 2 \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{S_{2\nu}}{m+2\nu} \cdot \frac{1}{4^\nu} \right].$$

$$10. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \cos x}{\sin^2 x} dx = 2L(1) - \frac{\pi^2}{4} = 1,1964612764.$$

11, 13 sont fautives. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^3 \cos x}{\sin^3 x} dx = \frac{3\pi}{2} L_2 - \frac{\pi^3}{16}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4x^2 \cos x + (\pi - x)x}{\sin x} \cdot dx = \pi^2 L_2.$$

15 est la même que Tab. 238 N:o 19 ci-dessus.

16 est fautive. Elle doit être

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin}(q \text{ Cot } x) \cdot \frac{xdx}{\text{Sin } 2x} = \frac{\pi}{2q}(1 - e^{-q}).$$

22. Une faute est corrigée, une autre reste. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{\text{tg}^p x \text{ Sin } 2x} = \frac{\pi}{4p} \text{Sec } \frac{p\pi}{2}, \quad p < 1.$$

Tab. 240.

1 est discontinue pour $x = \frac{\pi}{2} - \lambda$.

2. Lisez $+\pi \text{ Cot } 2\lambda(\text{Cos } \frac{1}{2}\lambda \text{ Sec } \lambda)$.

4 est tirée de la formule fautive Tab. 238 N:o 19. Elle doit être

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{m+1}}{1 - \text{Cos } x} \cdot dx = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m+1} + (m+1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^m \left[\frac{2}{m} - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{S_{2\nu}}{m+2\nu} \cdot \frac{1}{4^{2\nu-1}} \right].$$

5. En posant avec LEGENDRE

$$A_{2\nu} = \frac{\text{Cos } \lambda}{1^{2\nu}} - \frac{\text{Cos } 3\lambda}{3^{2\nu}} + \frac{\text{Cos } 5\lambda}{5^{2\nu}} - \text{etc.}$$

$$B_{2\nu+1} = \frac{\text{Cos } 2\lambda}{2^{2\nu+1}} - \frac{\text{Cos } 4\lambda}{4^{2\nu+1}} + \frac{\text{Cos } 6\lambda}{6^{2\nu+1}} - \text{etc.},$$

on aura $\left(\lambda < \frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^m \text{Sin } x dx}{\text{Cos } x + \text{Cos } \lambda} &= -\left(\frac{\pi}{2}\right)^m \text{I}(2 \text{Cos } \lambda) + 2 \text{Cos } \frac{m\pi}{2} \Gamma(m+1) \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^{\nu-1} \text{Cos } \nu\lambda}{\nu^{m+1}} \\ &+ 2\Gamma(m+1) \left[\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^{\nu-1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{m+1-2\nu} \cdot A_{2\nu}}{\Gamma(m-2\nu+3)} \right. \\ &\left. + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^{\nu-1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-2\nu} \cdot B_{2\nu+1}}{\Gamma(m-2\nu+1)} \right]. \end{aligned}$$

- 6 éprouve une discontinuité pour $x = \lambda$.
 9. 11. Le nombre p doit être > 1 .
 15, 17 ne valent pas.
 20 est infinie.

Tab. 241.

1. Mr B. d. H. a remarqué que cette formule ne vaut qu'entre les limites 0 et 2π . Pourtant il y a d'autres fautes. Lisez

$$\int_0^{2\pi} \frac{x \sin x}{1 - 2p \cos x + p^2} dx = \frac{\pi}{p} \mathcal{L}(1 - p)^2, \quad p < 1$$

$$= \frac{\pi}{p} \mathcal{L}\left(\frac{p-1}{p}\right)^2, \quad p > 1^1).$$

- 2 provient en intégrant par parties en Tab. 334 N:o 19 dont mention a été faite auparavant (Tab. 165 N:o 25). La comparaison montre que la formule du texte est tant soit peu erronée. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x dx}{1 + 2p \sin x + p^2} = \frac{\pi}{2p} \mathcal{L}(1 + p)$$

$$- \frac{1}{2p} \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{2^r + 1} \cdot \frac{2^{r/2}}{3^{r/2}} \cdot \left(\frac{2p}{1 + p^2}\right)^{2r+1}, \quad p < 1.$$

Pourtant je crois que la formule suivante est plus commode, savoir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x dx}{1 + 2p \sin x + p^2} = \frac{\pi}{2p} \mathcal{L}(1 + p) - \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^r p^{2r}}{(2^r + 1)^2}.$$

5. Je ne trouve pas cette formule, mais Tab. 240 N:o 14.
 25 est déduite de la formule fautive Tab. 334 N:o 24, mais elle a aussi une autre faute. Lisez

¹⁾ Voyez MOIGNO, Calcul intégrale. Paris 1844, pag. 331.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sin^2 \lambda - \sin^2 \mu \cos^2 x} \cdot \frac{x dx}{1 - \sin^2 \mu \cos^2 x}$$

$$= \frac{\pi}{\sin^2 \mu \cos^2 \lambda} \cdot \mathcal{L} \left[\sin \lambda \cot \frac{1}{2} \mu \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{Arc} \sin \frac{\sin \mu}{\sin \lambda} \right) \right], \quad \lambda > \mu.$$

Tab. 242.

13. On peut écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x (\cot x)^q dx}{\cos^2 x} = \frac{q\pi}{2(2-q)} \operatorname{Cosec} \frac{\pi}{q}, \quad 2 > q > 1.$$

Tab. 243.

6 est fautive. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin 2x}{(1 + \sin^2 x)^{3/2}} \cdot dx = \sqrt{2} F' \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

10 est fautive en tant qu'il y a $2a\sqrt{a+b} \cdot E(\dots)$ au lieu de $2\sqrt{a+b} \cdot E'(\dots)$.

15. Lisez $+\frac{p^2\pi}{\sqrt{1-p^2}}$ au lieu de $-\frac{p^2\pi}{\sqrt{1-p^2}}$.

Tab. 244.

2 est juste, mais la valeur peut s'écrire $-\frac{\pi}{a} \operatorname{Cos} a\pi$.

3. On peut écrire

$$\int_0^{\pi} x \sin \left(a - \frac{1}{2} \right) x \cdot dx = -\frac{4}{(2a-1)^2} \operatorname{Cos} a\pi.$$

12 est juste, si q désigne un nombre entier; autrement la valeur est

$$\frac{1}{q^3} [(2 - q^2 \pi^2) \operatorname{Cos} q\pi + 2\pi q \operatorname{Sin} q\pi - 2].$$

14 est fautive. Lisez

$$\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{Cot} \frac{1}{2}x \cdot dx = 2\pi^2 \mathcal{L}_2 - 7S_3,$$

comme LEGENDRE a donné.

15. M:r B. d. H. y a fait un changement ni nécessaire ni juste. Je préfère d'écrire

$$\int_0^{\pi} x^3 \operatorname{Cot} \frac{1}{2}x \cdot dx = 2\pi^3 \mathcal{L}_2 - 9\pi S_3$$

16. $\int_0^{\pi} x^4 \operatorname{Cot} \frac{1}{2}x \cdot dx = 2\pi^4 \mathcal{L}_2 - 18\pi^2 S_3 + 84S_3$

17. $\int_0^{\pi} x^5 \operatorname{Cot} \frac{1}{2}x \cdot dx = 2\pi^5 \mathcal{L}_2 - 30\pi^3 S_3 + 225\pi S_5.$

Tab. 245.

8 à 10. Les dérivées sont discontinues entre les limites.

11 ne dérive pas de Tab. 327, mais elle peut être obtenue par Tab. 334 N:o 11.

Tab. 246.

5, 6, 12, 13, 15, 16, 19, 20 éprouvent une discontinuité entre les limites.

8. Cette intégrale se trouve aussi Tab. 193 N:o 21, mais avec autres limites. Celle-ci est sans doute fautive M:r B. d. H. prétend que N:o 8 vaut, si l'on pose $\operatorname{Cos} hp \cdot \lambda$ et $\operatorname{Sin} hp \cdot \lambda$ au lieu de $\operatorname{Cos} \lambda$ et $\operatorname{Sin} \lambda$. Comme on a $\operatorname{Cos} hp \cdot \lambda = \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2}$, N:o 8 est par là en désaccord avec N:o 9, en y posant λ au lieu de p . En outre l'imaginaire i n'est point motivée par la dérivée.

Tab. 247.

4 est fautive. On aura la juste valeur en posant dans N:o 3 $\frac{2a\pi}{b}$ au lieu de λ .

7, 9, 11, 12, 17, 21 sont discontinues.

Tab. 248.

7. En y posant $a = 0$, $b = 1$, on aura ($p < 1$)

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1 - 2p \cos x + p^2} = -\frac{\pi p}{1 - p^2} \log p$$

ce qui est évidemment contraire au N:o 1 dont la justesse est incontestable. M^r B. d. H. a trouvé cette formule en différentiant par rapport à b l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos bx dx}{1 - 2p \cos x + p^2} = \frac{\pi p^b}{1 - p^2}$$

laquelle ne vaut qu'en supposant b égale à un nombre entier. Je pense qu'il n'est pas permis de différentier par rapport à une telle quantité. Pour éclaircir cela prenons un exemple. Sans doute on a

$$\int_0^{\pi} \cos nx dx = 0, \text{ (a)}$$

si n est un nombre entier; en cas contraire on trouve

$$\int_0^{\pi} \cos nx dx = \frac{\sin n\pi}{n}, \text{ (b)}$$

Si l'on veut différentier par rapport à n , il faut employer cette formule. Par là on aura

$$\int_0^{\pi} x \sin nx dx = -\frac{\pi \cos n\pi}{n} + \frac{\sin n\pi}{n^2}, \text{ (c)}$$

mais la formule (a) aurait donné zéro. Il faut donc que la quantité par rapport à laquelle on différentie, puisse avoir toute grandeur au moins entre des limites fixes, mais dans ce cas n'est point une quantité qu'on suppose être un nombre entier. Il s'ensuit que toutes les formules N:o 4—23 sont fautives.

Tab. 249.

- 7 est une formule très singulière donnée par LEGENDRE. Il y suppose $q < 1$, mais alors la dérivée est discontinue. Pour $q > 1$ on trouve directement ou en différenciant par rapport à p dans Tab. 246 N:o 7

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{(q - \cos x)^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{q+1}} \left[\frac{1}{\sqrt{q-1}} - \frac{1}{\sqrt{q+1}} \right].$$

- 8 dérive au fond de Tab. 271 N:o 1. Puisque la valeur de celle-ci est fort compliquée, je la déduirai. Posons d'abord

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Arc tg}(a + bx) \cdot \frac{dx}{1+x^2}$$

et différencions par rapport à b . Nous aurons

$$\frac{dJ}{db} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+(a+bx)^2} \cdot \frac{dx}{1+x^2}$$

et en décomposant la fraction et en posant

$$(1+a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2 = N$$

$$\frac{dJ}{db} = \frac{1}{N} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2ab + (1+a^2-b^2)x}{1+x^2} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2ab(1+a^2) + b^2(1+a^2-b^2)x}{1+(a+bx)^2} dx \right].$$

Si dans la dernière intégrale on introduit x au lieu de $a + bx$, on trouvera

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{db} &= \frac{1}{N} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2ab + (1+a^2-b^2)x}{1+x^2} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(1+a^2+b^2) + (1+a^2-b^2)x}{1+x^2} dx \right] \\ &= \frac{a(2b-1-a^2-b^2)}{(1+a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{a\pi(2b-1-a^2-b^2)}{(1+a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2}. \end{aligned}$$

Jusqu'ici mon calcul est conforme à celui de M:r B. d. H. (Exposé pag. 355) outre le signe, mais ci-après je diffère de lui. J'observe que le numérateur et le déno-

minateur ont le facteur $2b - 1 - a^2 - b^2$ commun: en divisant par ce facteur je trouve

$$\frac{dJ}{db} = - \frac{a\pi}{1 + a^2 + 2b + b^2}$$

et en intégrant

$$J = C - \pi \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{b+1}{a}.$$

Pour déterminer la constante posons $b=0$: l'intégrale J devient dans ce cas $= \pi \operatorname{Arc} \operatorname{tg} a$ et puis $C = \pi \left(\operatorname{Arc} \operatorname{tg} a + \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{1}{a} \right) = \frac{\pi^2}{2}$. Ainsi nous trouvons enfin

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} (a + bx) \cdot \frac{dx}{1+x^2} &= \pi \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{b+1}{a} \right] \\ &= \pi \operatorname{Arc} \operatorname{Cot} \frac{b+1}{a}. \end{aligned}$$

Cette formule diffère beaucoup de la formule de Mr B. d. H. et encore plus de celle du texte.

En intégrant par parties on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x \cdot \frac{dx}{1 + (a + bx)^2} = - \frac{\pi}{b} \operatorname{Arc} \operatorname{Cot} \frac{b+1}{a}$$

c'est à dire Tab. 272 N:o 2.

En y posant $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x = \frac{\pi}{2} - y$, on trouve

$$\int_0^{\pi} \frac{(\frac{\pi}{2} - y) dy}{\sin^2 y + (a \sin y + b \cos y)^2} = - \frac{\pi}{b} \operatorname{Arc} \operatorname{Cot} \frac{b+1}{a}$$

mais cela n'est pas N:o 8, que je tiens fautive.

22. Mr B. d. H. prétend dans ses corrections que cette formule ne vaut qu'entre les limites 0 et ∞ et que par suite N:o 23 est fautive. Puisque cela ne paraissait probable, j'ai déduit la formule. Dans l'intégrale

$$J = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{\sqrt{1 + p^2 - 2p \cos x}} dx \quad (p < 1)$$

j'intégrai par parties et je trouvai

$$J = \frac{1+p}{p} \cdot \pi - \frac{1}{p} \int_0^{\pi} dx \sqrt{1+p^2-2p \cos x}.$$

Désignons la dernière intégrale par J_1 et posons y $x = \pi - 2\varphi$; nous aurons

$$\begin{aligned} J_1 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1+p^2+2p \cos 2\varphi} \\ &= 2(1+p) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - \frac{4p}{(1+p)^2} \sin^2 \varphi} = 2(1+p) E\left(\frac{2\sqrt{p}}{1+p}\right). \end{aligned}$$

Cette valeur peut être transformée et on trouve alors

$$(1+p) E\left(\frac{2\sqrt{p}}{1+p}\right) = 2E'(p) - (1-p^2)F'(p)$$

et enfin

$$J = \frac{1+p}{p} \cdot \pi - \frac{4}{p} E'(p) + \frac{2(1-p^2)}{p} F'(p), \quad (p < 1)$$

ou précisément N:o 22 du texte.

23. Dans N:o 22 on peut intégrer par parties autrement que ci-dessus. En effet on a

$$J = \int_0^{\pi} \frac{x^2 \sin x}{2\sqrt{1+p^2-2p \cos x}} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{x^2 [(1+p) \cos^2 x - (1+p^2) \cos x]}{(1+p^2-2p \cos x)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

Comme le premier terme s'évanouit pour les deux limites, on aura

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{x^2 [(1+p) \cos^2 x - (1+p^2) \cos x]}{(1+p^2-2p \cos x)^{\frac{3}{2}}} dx &= 2J \\ &= \frac{2(1+p)}{p} \pi - \frac{8}{p} E'(p) + \frac{4(1-p^2)}{p} F'(p). \end{aligned}$$

La formule est donc juste.

Tab. 250.

9 à 14 sont fautives.

Tab. 251.

1, 2. Le dénominateur est $4a\pi$, non $2a\pi$.

5 à 8. M^r B. d. H. a remarqué que toutes ces formules ne valent qu'entre les limites 0 et ∞ , en foi de quoi j'ajoute que les mêmes intégrales se trouvent Tab. 199, N^o 1, 2, 6, 7, où elles sont prises entre 0 et ∞ .

Tab. 252.

7 semble être fautive: en y posant $\mu = \frac{\pi}{2}$, on devrait avoir N^o 6, mais cela n'arrive point.

8. Lisez $\frac{\pi \operatorname{Sec} \mu}{2\sqrt{\sin^2 \mu - \sin^2 \lambda}} \left[\mu - \operatorname{Arc} \operatorname{Cos} \frac{\cos \mu}{\cos \lambda} \right], \quad \mu > \lambda.$

Tab. 253.

3. Dans le dénominateur du terme quatrième lisez $\sin^3 \mu$ au lieu de $\sin^4 \mu$.
5. Dans le dénominateur du dernier terme lisez $\cos^3 \lambda$ au lieu de $\cos^4 \lambda$.
8. Dans le dénominateur du dernier terme lisez $\sin^{4-2a\mu}$ au lieu de $\sin^{3-2a\mu}$.
11. est juste, mais je préfère d'écrire

$$\frac{\pi}{2 \cos \lambda \cos \mu} \left[\operatorname{tg} \mu \cdot E(e, \mu) + \frac{\cos \mu - \cos \lambda}{\cos \lambda} \right].$$

Tab. 254.

- 8, 9 sont tirées de l'archive de GRUNERT. Puisque je n'ai pas ce livre à la main, je ne sais, si elles s'accordent avec l'original. Quoi qu'il en soit, comme les formules du texte sont un peu compliquées, j'ai calculé les valeurs à l'aide des tables de M^r MINDING (pag. 138). J'ai trouvé

$$\int_p^\infty \frac{\sin x}{x^{2a}} = \frac{1}{\Gamma(2a)} \left[\sum_{r=1}^{r=2a-1} \frac{\Gamma(2a-r) \sin \left(p + \frac{r-1}{2} \cdot \pi \right)}{p^{2a-r}} + (-1)^{a-1} \text{Ci}(p) \right]$$

$$\int_p^\infty \frac{\cos x}{x^{2a+1}} = \frac{1}{\Gamma(2a+1)} \left[\sum_{r=1}^{r=2a} \frac{\Gamma(2a-r+1) \cos \left(p + \frac{r-1}{2} \cdot \pi \right)}{p^{2a-r+1}} + (-1)^a \text{Ci}(p) \right].$$

10, 11 sont infinies

Tab. 255.

1 est juste sous la condition non indiquée que q soit un nombre entier. Mr B. d. H. l'a déduite (Exposé pag. 248) dans la même hypothèse, mais aussi tacitement. Afin de l'avoir pour un q quelconque j'ai procédé comme il suit, en distinguant entre un exposant pair et impair. D'abord on a

$$\int_0^{2a\pi} e^{qxi} dx = \frac{e^{2a\pi qi} - 1}{qi}, \quad \int_0^{2a\pi} e^{-qxi} dx = \frac{1 - e^{-2a\pi qi}}{qi}.$$

En les différentiant 2β fois par rapport à q , on aura

$$\int_0^{2a\pi} x^{2\beta} e^{qxi} dx = e^{2a\pi qi} \Gamma(2\beta + 1) \sum_{r=0}^{r=2\beta} \frac{(-1)^r (2a\pi)^{2\beta-r}}{(qi)^{r+1} \Gamma(2\beta - r + 1)} - \frac{\Gamma(2\beta + 1)}{(qi)^{2\beta+1}}$$

$$\int_0^{2a\pi} x^{2\beta} e^{-qxi} dx = \frac{\Gamma(2\beta + 1)}{(qi)^{2\beta+1}} - e^{-2a\pi qi} \Gamma(2\beta + 1) \sum_{r=0}^{r=2\beta} \frac{(2a\pi)^{2\beta-r}}{(qi)^{r+1} \Gamma(2\beta - r + 1)}$$

et par leur addition et en divisant par 2

$$\int_0^{2a\pi} x^{2\beta} \cos qxdx = \Gamma(2\beta + 1) \left[\sin 2aq\pi \sum_{r=0}^{r=\beta} \frac{(-1)^r (2a\pi)^{2\beta-2r}}{q^{2r+1} \Gamma(2\beta - 2r + 1)} \right.$$

$$\left. + \cos 2aq\pi \sum_{r=0}^{r=\beta-1} \frac{(-1)^r (2a\pi)^{2\beta-2r-1}}{q^{2(r+1)} \Gamma(2\beta - 2r)} \right].$$

De la même manière on trouvera

$$\int_0^{2a\pi} x^{2\beta+1} \cos qx dx = \Gamma(2\beta+2) \left[\sin 2aq\pi \sum_{r=0}^{\beta} \frac{(-1)^r (2a\pi)^{2\beta-2r+1}}{q^{2r+1} \Gamma(2\beta-2r+2)} \right. \\ \left. + \cos 2aq\pi \sum_{r=0}^{\beta} \frac{(-1)^r (2a\pi)^{2\beta-2r}}{q^{2(r+1)} \Gamma(2\beta-2r+1)} - \frac{(-1)^\beta}{q^{2(\beta+1)}} \right].$$

En soustrayant les dérivées on aurait eu les intégrales

$$\int_0^{2a\pi} x^{2\beta} \sin qx dx, \quad \int_0^{2a\pi} x^{2\beta+1} \sin qx dx.$$

3 est grandement fautive. Premièrement il faut que la limite supérieure soit π au lieu de $\frac{\pi}{2}$. Cette faute ne se trouve pas dans les exercices de LEGENDRE (Tom II pag. 216) d'où la formule est tirée, mais les signes y sont erronées. Lisez donc

$$\int_{\lambda}^{\pi} \frac{x \sin x dx}{(\cos x - \cos \mu)^3} = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{(1 + \cos \mu)^2} - \frac{\lambda}{(\cos \lambda - \cos \mu)^2} + \frac{\sin \lambda}{\sin^2 \mu (\cos \lambda - \cos \mu)} \right. \\ \left. + \frac{\cos \mu}{2 \sin^3 \mu} \ln \frac{\sin \frac{1}{2}(\lambda + \mu)}{\sin \frac{1}{2}(\lambda - \mu)} \right], \quad \lambda > \mu.$$

6 est une formule fort étrange. Pourvu qu'il n'y ait quelque faute d'impression, l'intégrale est = 0.

Tab. 256.

4. Je préfère d'écrire

$$\int_0^1 (1-x^2)^{a-1} \cdot x \operatorname{Arc Sin} x \cdot dx = \frac{\pi}{4a} \cdot \frac{1^{a/2}}{2^{a/2}}.$$

Tab. 257.

2 est tirée de Tab. 238 N:o 18. On a donc

$$\int_0^1 (\text{Arc Sin } x)^p \frac{dx}{x} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^p \left[\frac{1}{p} - 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{S_{2\nu}}{p+2\nu} \cdot \frac{1}{4^\nu} \right].$$

3. On peut écrire

$$\int_0^1 \text{Arc tg } x \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} L(1) = 0,9159655942.$$

11. Par ma transcendente on aura

$$\int_0^1 (\text{Arc Sin } x)^2 \cdot \frac{dx}{x^2} = 2L(1) - \frac{\pi^2}{4} = 1,1964612767.$$

12. L'autre transcendente donne

$$\int_0^1 (\text{Arc tg } x)^2 \cdot \frac{dx}{x^2} = -\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2} H\left(\frac{1}{2}\right) = 0,8435118417.$$

13 est fautive. Lisez

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\text{Arc Sin } x)^p \cdot \frac{dx}{x^2} = & -\left(\frac{\pi}{2}\right)^p \\ & + p \left(\frac{\pi}{2}\right)^{p-1} \left[1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(2^{2\nu}-1)S_{2\nu}}{p-1+2\nu} \cdot \frac{1}{4^\nu} \right]. \end{aligned}$$

14. Il y a plusieurs fautes. Lisez

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\text{Arc tg } x)^{p+1} \cdot \frac{dx}{x^2} = & -\left(\frac{\pi}{4}\right)^{p+1} \\ & + \frac{p+1}{2^{p+1}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^p \left[\frac{2}{p} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{S_{2\nu}}{p+2\nu} \cdot \frac{1}{4^{2\nu-1}} \right]. \end{aligned}$$

Tab. 258.

4 est juste, mais il pourrait se faire qu'elle est mal entendue. Pour prévenir cela écrivons

$$\int_0^1 \text{Arc Sin } x \cdot \frac{x dx}{1 - x^4 \text{Sin }^2 \lambda} = -\frac{\pi}{4} \text{Cosec } \lambda M_{\frac{1 + \text{Sin } \frac{1}{2} \lambda}{1 + \text{Sin } \lambda}} \cdot \frac{\text{Cos } \lambda}{\text{Cos } \frac{1}{2} \lambda}.$$

5, 7 sont discontinues.

11 à 13 peuvent s'exprimer par la transcendente $L(\dots)$.

15 est discontinue pour $x = \text{Sin } \lambda$.

20, 22 ont une discontinuité.

27 peut être écrite de la manière suivante:

$$\int_0^1 \text{Arc Cot } x \cdot \frac{x dx}{1 + x^2} = \frac{3\pi}{8} I_2 - \frac{1}{4} L(1) = 0,3586119868.$$

29, 30 sont déduites de Tab. 165 N:o 25. Conformément à ce qui a été dit à l'égard de cette formule on peut écrire

$$\int_0^1 \text{Arc Sin } x \cdot \frac{dx}{1 + p^2 + 2px} = \frac{\pi}{2p} I(1 + p) - \frac{1}{p} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu p^{2\nu+1}}{(2\nu+1)^2},$$

$$\int_0^1 \text{Arc Cos } x \cdot \frac{dx}{1 + p^2 + 2px} = -\frac{\pi}{4p} I(1 + p^2) + \frac{1}{p} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu p^{2\nu+1}}{(2\nu+1)^2}.$$

Tab. 259.

Écrivons

$$1. \int_0^1 (\text{Arc Cos } x)^2 \cdot \frac{dx}{1 - x^2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left[\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{2^{2\nu-1} - 1}{4^{2\nu-1}} \cdot \frac{S_{2\nu}}{2(\nu+1)}\right].$$

$$2. \int_0^1 (\text{Arc Cos } x)^3 \cdot \frac{dx}{1 - x^2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \left[\frac{1}{3} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{2^{2\nu-1} - 1}{4^{2\nu-1}} \cdot \frac{S_{2\nu}}{3 + 2\nu}\right].$$

$$3. \int_0^1 (\text{Arc Cos } x)^p \cdot \frac{dx}{1+x} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^p \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(4^\nu - 1) S_{2\nu}}{p + 2\nu} \cdot \frac{1}{4^{2\nu-1}}.$$

$$4. \int_0^1 (\text{Arc Cos } x)^p \cdot \frac{dx}{1-x} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^p \left[\frac{2}{p} - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{S_{2\nu}}{p + 2\nu} \cdot \frac{1}{4^{2\nu-1}} \right].$$

7, 8 sont la demi-somme et la demi-différence de N:o 4 et N:o 3. On aura donc

$$\int_0^1 (\text{Arc Cos } x)^p \cdot \frac{dx}{1-x^2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^p \left[\frac{1}{p} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(2^{2\nu-1} - 1) S_{2\nu}}{(p + 2\nu) \cdot 4^{2\nu-1}} \right]$$

$$\int_0^1 (\text{Arc Cos } x)^p \cdot \frac{x dx}{1-x^2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^p \left[\frac{1}{p} - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{S_{2\nu}}{p + 2\nu} \cdot \frac{1}{2^{2\nu-1}} \right].$$

9. Je ne vois point comment M:r B. d. H. a trouvé cette formule.

Tab. 260.

4 peut s'exprimer par la transcendente $H(\dots)$. On a

$$\int_0^1 \text{Arc tg } x \cdot \frac{dx}{x(1+x^2)} = \frac{1}{4} H\left(\frac{1}{2}\right) = 0,7301810584.$$

5. On peut écrire

$$\begin{aligned} \int_0^1 \text{Arc tg } x \cdot \frac{x - (1+x^2) \text{Arc tg } x}{x^2(1+x^2)} dx &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4} H\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -0,1133307833. \end{aligned}$$

8 est fautive avec Tab. 166 N:o 3 dont elle est déduite. La juste formule est

$$\begin{aligned} \int_0^1 \text{Arc Sin } x \cdot \frac{dx}{(\text{Sin } 2\lambda - x^2 \text{Sin } 2\mu)(1 - x^2 \text{Sin } 2\mu)} \\ = \frac{\pi}{2 \text{Cos } 2\lambda \text{Sin } 2\mu} \frac{\text{Cos } \mu \text{Cot} \left(\frac{1}{2} \text{Arc Sin } \frac{\text{Sin } \mu}{\text{Sin } \lambda} \right)}{\text{Cot } \frac{1}{2}\mu \sqrt{\text{Sin } 2\lambda - \text{Sin } 2\mu}}, \quad \lambda > \mu. \end{aligned}$$

9 est aussi fautive. Lisez

$$\int_0^1 \text{Arc Cos } x \cdot \frac{x dx}{(\sin^2 \lambda - x^2 \sin^2 \mu)(1 - x^2 \sin^2 \mu)}$$

$$= \frac{\pi}{2 \cos^2 \lambda \sin^2 \mu} \frac{\sin \lambda \cot \frac{1}{2} \mu}{\cot \frac{1}{2} \left(\text{Arc Sin } \frac{\sin \mu}{\sin \lambda} \right)}, \quad \lambda > \mu.$$

13. Ajoutez: $\frac{1}{2} > p > -\frac{1}{2}$.

17 est juste, mais elle peut avoir une forme plus simple, en introduisant les valeurs des fonctions $Z(\dots)$. On trouve

$$\int_0^1 \text{Arc Cot } x \cdot \frac{x dx}{(1 + x^2)^2} = \frac{1}{8}(\pi - 1).$$

20 est fautive avec Tab. 238 N:o 19. Lisez

$$\int_0^1 (\text{Arc tg } x)^p \cdot \frac{dx}{x(1 + x^2)} = \frac{\pi^p}{2^{2p+1}} \left[\frac{2}{p} - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{S_{2\nu}}{p + 2\nu} \cdot \frac{1}{4^{2\nu-1}} \right].$$

21 est fautive. Lisez

$$\int_0^1 (\text{Arc tg } x)^p \cdot \frac{px - (1 + x^2) \text{Arc tg } x}{x^2(1 + x^2)} dx$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} \right)^{p+1} - \frac{\pi^p}{2^{2p+1}} \left[\frac{2}{p} - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{S_{2\nu}}{p + 2\nu} \cdot \frac{1}{4^{2\nu-1}} \right].$$

Tab. 261.

Les quatre premières intégrales peuvent s'exprimer par la fonction $I(\dots)$. On aura

$$1. \int_0^1 \text{Arc Sin } x \cdot \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{4} \left[\pi - \sqrt{\pi} \cdot \frac{I(\frac{5}{6})}{I(\frac{1}{3})} \right].$$

$$2. \int_0^1 \text{Arc Sin } x \cdot \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{3}{2} \left[\pi - \sqrt{\pi} \cdot \frac{I(\frac{3}{6})}{I(\frac{1}{6})} \right].$$

$$3. \int_0^1 \text{Arc Sin } x \cdot \frac{dx}{x^{\frac{4}{3}}} = \frac{3}{2} \left[-\pi + \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{5}{6})} \right].$$

$$4. \int_0^1 \text{Arc Sin } x \cdot \frac{dx}{x^{\frac{5}{3}}} = \frac{3}{4} \left[-\pi + \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{6})}{\Gamma(\frac{2}{3})} \right].$$

(Voyez Tab. 12 N:o 16).

5 est fautive (Voyez Tab. 12 N:o 14). Lisez

$$\int_0^1 \text{Arc Sin } x \cdot \frac{x dx}{\sqrt{1-p^2 x^2}} = \frac{1}{p^2} \left[E(p) - \frac{\pi}{2} \sqrt{1-p^2} \right], \quad p < 1.$$

6. On peut écrire (Voyez Tab. 239 N:o 1)

$$\int_0^1 \text{Arc Sin } x \cdot \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}} = L(1).$$

8 est fautive. Il faut être

$$\int_0^1 \text{Arc Sin } x \cdot \frac{dx}{(p^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{p^2} \left[\frac{\pi}{2 \sqrt{1+p^2}} - \text{Arc Cot } p \right].$$

9. Il y a une discontinuité pour $x = \text{Cos } \lambda$.

$$21. \int_0^1 (\text{Arc Sin } x)^2 \cdot \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}} = \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \left[\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(2^{2\nu}-1)S_{2\nu}}{2^{4\nu-1} \cdot (1+\nu)} \right].$$

$$23. \int_0^1 (\text{Arc Sin } x)^3 \cdot \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}} = \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 \left[\frac{1}{3} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(2^{2\nu}-1)S_{2\nu}}{4^{2\nu-1} (3+2\nu)} \right].$$

24 est fautive. Lisez

$$\int_0^1 (\text{Arc Sin } x)^p \cdot \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}} = \left(\frac{\pi}{2} \right)^p \left[\frac{1}{p} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2^{2\nu}-1}{4^{2\nu-1}} \cdot \frac{S_{2\nu}}{p+2\nu} \right].$$

Cette formule contient N:o 21 et N:o 23.

Tab. 262.

1 à 3. Ces formules se lient entre elles et sont toutes contenues dans l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{\text{Arc tg } (\text{tg } \alpha \sqrt{1-x^2})}{1-x^2 \cos^2 \lambda} dx$$

que je chercherai, parce que je trouve une faute dans N:o 1 et N:o 3, quand je les déduis de Tab. 166 N:o 16. En différentiant par rapport à α on aura

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2 \sin^2 \alpha)(1-x^2 \cos^2 \lambda)} \cdot dx$$

et par decomposition de la fraction

$$\frac{1}{(1-x^2 \sin^2 \alpha)(1-x^2 \cos^2 \lambda)} = \frac{1}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \lambda} \left[\frac{\sin^2 \alpha}{1-x^2 \sin^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \lambda}{1-x^2 \cos^2 \lambda} \right].$$

Maintenant on trouve

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2 \sin^2 \alpha} \cdot dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2 \cos^2 \lambda} \cdot dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 - \sin \lambda}{\cos^2 \lambda}$$

et par suite

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \frac{\pi[1 - \cos \alpha - (1 - \sin \lambda)]}{2(\sin^2 \alpha - \cos^2 \lambda)} = \frac{\pi}{2(\sin \lambda + \cos \alpha)}.$$

En intégrant entre $\alpha = 0$ et $\alpha = \alpha$ (J est $= 0$ pour $\alpha = 0$), on trouvera

$$J = \frac{\pi}{2 \cos \lambda} \sqrt{1 + \sin(\alpha + \lambda)}.$$

En y posant $\alpha = \frac{\pi}{4}$, on aura

$$\int_0^1 \frac{\text{Arc tg}(\sqrt{1-x^2})}{1-x^2 \cos 2\lambda} dx = \frac{\pi}{2 \cos \lambda} l^{\cos(\frac{\pi}{8}-\frac{\lambda}{2})}_{\sin(\frac{\pi}{8}+\frac{\lambda}{2})}. \quad (a)$$

C'est N:o 1 où cependant le facteur 2 manque dans le dénominateur.

En posant $\text{tg } \alpha = p$, $\lambda = 0$, on aura N:o 2.

N:o 3 provient de (a), en y posant x au lieu de x^2 .

Tab. 264.

5. À l'aide de Tab. 266 N:o 8 et Tab. 238 N:o 13 on trouve

$$\int_0^\infty (\text{Arc tg } x)^3 \cdot \frac{dx}{x^2} = 3 \left[\frac{\pi^2}{4} l^2 - \frac{7}{8} S_3 \right].$$

6 est fautive. Par Tab. 266 N:o 10 et Tab. 238 N:o 18 (corrigée) on trouve

$$\int_0^\infty (\text{Arc tg } x)^{p+1} \cdot \frac{dx}{x^2} = (p+1) \left(\frac{\pi}{2} \right)^p \left[\frac{1}{p} - 2 \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{S_{2\nu}}{p+2\nu} \cdot \frac{1}{4^\nu} \right].$$

Tab. 265.

18. La valeur est $= \frac{5\pi}{64}$, non $\frac{\pi}{64}$.

20 est fautive. Lisez: $\frac{\pi}{8 \sin 2\lambda} l \dots$

23 est fautive. Lisez

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (p + \text{Arc tg } x)^{q-1} \cdot \text{Arc tg } x \cdot \frac{dx}{1+x^2} \\ = \frac{1}{q(q+1)} \left[\left(p + \frac{\pi}{2} \right)^q \left(\frac{q\pi}{2} - p \right) + p^{q+1} \right]. \end{aligned}$$

24. Écrivons

$$\int_0^\infty (\text{Arc Cot } x)^2 \cdot \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{\pi^2}{4} l^2 - \frac{7}{8} S_3.$$

$$25. \int_0^{\infty} (\text{Arc Cot } x)^3 \cdot \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{\pi^3}{8} l2 - \frac{9\pi}{16} S_3.$$

26 est fautive. Lisez

$$\int_0^{\infty} (\text{Arc Cot } x)^p \cdot \frac{x dx}{1+x^2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^p \left[\frac{1}{p} - 2 \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{S_{2r}}{p+2r} \cdot \frac{1}{4^r} \right].$$

Tab. 266.

Écrivons

$$8. \int_0^{\infty} (\text{Arc tg } x)^2 \cdot \frac{dx}{x(1+x^2)} = \frac{\pi^2}{4} l2 - \frac{7}{8} S_3.$$

$$9. \int_0^{\infty} (\text{Arc tg } x)^3 \cdot \frac{dx}{x(1+x^2)} = \frac{\pi^3}{8} l2 - \frac{9\pi}{16} S_3.$$

$$10. \int_0^{\infty} (\text{Arc tg } x)^p \cdot \frac{dx}{x(1+x^2)} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^p \left[\frac{1}{p} - 2 \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{S_{2r}}{p+2r} \cdot \frac{1}{4^r} \right].$$

Tab. 267.

6 à 10. Je les trouve $= \infty$.

13 provient de la formule fautive Tab. 181 N:o 16. Lisez

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{x \text{ Arc tg } x \cdot dx}{(\text{Cos } ^2 \mu + x^2)(\text{Cos } ^2 \mu - \text{Cos } ^2 \lambda + x^2 \text{Sin } ^2 \lambda)} \\ &= \frac{\pi}{2 \text{Cos } ^2 \lambda \text{Sin } ^2 \mu} l \text{Sin } \lambda \text{Cot } \frac{1}{2} \mu \text{tg } \frac{1}{2} \left(\text{Arc Sin } \frac{\text{Sin } \mu}{\text{Sin } \lambda} \right), \quad \lambda \geq \mu. \end{aligned}$$

16, 19 sont infinies

$$24 \text{ est } = \frac{\pi}{2 \text{Cos } ^2 \lambda \text{Sin } ^2 \mu} l \frac{\text{Cos } \mu \text{Cot } \frac{1}{2} \left(\text{Arc Sin } \frac{\text{Sin } \mu}{\text{Sin } \lambda} \right)}{\text{Cot } \frac{1}{2} \mu \sqrt{\text{Cos } ^2 \mu - \text{Cos } ^2 \lambda}}, \quad \lambda > \mu.$$

26 est fautive. La juste valeur est $= -\frac{\pi}{4}$.

On a aussi

$$\int_0^{\infty} (\text{Arc Cot } x)^2 \cdot \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Tab. 268.

2. On peut écrire

$$\int_0^{\infty} \text{Arc tg } x \cdot \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = L(1).$$

3. Il y a une solution de la continuité.

7. Otez le terme $-\frac{\pi}{2}$; la condition est $p > q$.

8. Otez le terme $-\frac{\pi}{2}$.

$$10. \int_0^{\infty} \text{Arc Cot } x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = L(1).$$

11, 12. Otez le facteur $\frac{1}{2}$ et les crochets [].

13. Il y a une discontinuité.

14, 15. Je ne peux pas obtenir ces formules et je pense que la dérivée est fautive. Je trouve

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \text{Arc Cot } \frac{x}{p} \cdot \frac{x^2 + 2p^2 - q^2}{\sqrt{p^2 + x^2}} \cdot \frac{x dx}{(q^2 + x^2)^2} \\ &= \frac{p}{q} \left[\frac{\pi}{2q} - \frac{1}{\sqrt{p^2 - q^2}} \cdot \text{Arc tg } \frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{q} \right], \quad p > q \\ &= \frac{p}{q} \left[\frac{\pi}{2q} - \frac{1}{\sqrt{q^2 - p^2}} \cdot \frac{q + \sqrt{q^2 - p^2}}{p} \right], \quad p < q. \end{aligned}$$

$$16. \int_0^{\infty} (\text{Arc tg } x)^2 \cdot \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}} = -\frac{\pi^2}{4} + 2L(1) = 1,1964612764.$$

$$17. \int_0^{\infty} (\text{Arc Cot } x)^2 \cdot \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{\pi^2}{4} + 2L(1).$$

Tab. 269.

9. On l'obtient en posant $\sqrt{p^2-1}$ au lieu de p en N:o 8.
 La condition $p \geq 1$ appartient seulement à N:o 9.
11. Otez la condition $p \geq 1$.
12. Je l'ai trouvée en intégrant par parties dans N:o 8, mais je n'ai pas pu trouver le resultat donné par M:r B. d. H. J'ai eu

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \text{Arc tg } x \cdot \sqrt{1+x^2} \text{Arc tg} \left(\frac{\sqrt{p^2-1}}{\sqrt{1+x^2}} \right) \\ & - \int_0^{\infty} x \text{Arc tg } x \left[\frac{\text{Arc tg} \left(\frac{\sqrt{p^2-1}}{\sqrt{1+x^2}} \right)}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\sqrt{p^2-1}}{p^2+x^2} \right] dx \\ & = \frac{\pi}{2} \mathcal{U}(p + \sqrt{p^2-1}). \end{aligned}$$

Le premier terme est $= \frac{\pi}{2} \sqrt{p^2-1}$ pour $x = \infty$ et s'évanouit pour $x = 0$: donc on a

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} x \text{Arc tg } x \left[\frac{\text{Arc tg} \left(\frac{\sqrt{p^2-1}}{\sqrt{1+x^2}} \right)}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\sqrt{p^2-1}}{p^2+x^2} \right] dx \\ & = \frac{\pi}{2} [\sqrt{p^2-1} - \mathcal{U}(p + \sqrt{p^2-1})], \quad p \geq 1. \end{aligned}$$

En y posant $x = \sqrt{y}$, on aura

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \text{Arc tg} (\sqrt{y}) \left[\frac{\text{Arc tg} \left(\frac{\sqrt{p^2-1}}{\sqrt{1+y}} \right)}{\sqrt{1+y}} - \frac{\sqrt{p^2-1}}{p^2+y} \right] dy \\ & = \pi [\sqrt{p^2-1} - \mathcal{U}(p + \sqrt{p^2-1})], \quad p \geq 1. \end{aligned}$$

C'est le resultat auquel je suis parvenu. Il diffère de celui de M:r B. d. H. par le terme $\sqrt{p^2-1}$ entre les crochets.

Tab. 270.

On trouve

$$2. \int_1^{\infty} \text{Arc tg } x \cdot \frac{dx}{x(1+x^2)} = \frac{3\pi}{8} \text{ } 2 - \frac{1}{4} L(1).$$

$$3. \int_1^{\infty} \text{Arc tg } x \cdot \frac{x - (1+x^2) \text{Arc tg } x}{x^2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{\pi^2}{16} - \frac{3\pi}{8} \text{ } 2 \\ + \frac{1}{4} L(1).$$

$$4. \int_0^{\infty} \text{Arc Cot } x \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} L(1).$$

$$7. \int_1^{\infty} \text{Arc Cot } x \cdot \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{4} H\left(\frac{1}{2}\right).$$

$$10. \int_1^{\infty} (\text{Arc tg } x)^2 \cdot \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{3\pi}{4} \text{ } 2 - \frac{1}{2} L(1).$$

11 est fautive. Lisez

$$\int_1^{\infty} (\text{Arc Cot } x)^p \cdot \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{\pi^p}{2^{2p+1}} \left[\frac{2}{p} - \sum_{\nu=1}^{p=\infty} \frac{S_{2\nu}}{p+2\nu} \cdot \frac{1}{4^{2\nu-1}} \right].$$

$$12. \int_1^{\infty} \text{Arc tg } x \cdot \frac{(1+x^2) \text{Arc Cot } x - x}{1+x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4} H\left(\frac{1}{2}\right).$$

 13 est fautive. Je trouve pour $p = 1$

$$\int_1^{\infty} \text{Arc tg } x \cdot \frac{(1+x^2) \text{Arc Cot } x - x}{1+x^2} dx \\ = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{8} \left[2 - \sum_{\nu=1}^{p=\infty} \frac{S_{2\nu}}{1+2\nu} \cdot \frac{1}{4^{2\nu-1}} \right]$$

 et pour $p > 1$

$$\int_1^{\infty} \text{Arc tg } x (\text{Arc Cot } x)^{p-1} \cdot \frac{(1+x^2) \text{Arc Cot } x - px}{1+x^2} dx$$

$$= -\left(\frac{\pi}{4}\right)^{p+1} - \frac{\pi^p}{2^{2p+1}} \left[\frac{2}{p} - \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{S_{2r}}{p+2r} \cdot \frac{1}{4^{2r-1}} \right].$$

Tab. 271.

1, 2. Voyez Tab. 249 N:o 8 ci-dessus.

4, 6. $\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \text{Arc Sin } x \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{4} H\left(\frac{1}{2}\right).$

5, 7. $\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} (\text{Arc Sin } x)^p \cdot \frac{dx}{x} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^p \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{S_{2r}}{p+2r} \cdot \frac{1}{4^r} \right].$

8, 9 sont fautives. Je trouve

$$\int_{-1}^0 \text{Arc tg } x \cdot \frac{dx}{1-x} = -\frac{\pi}{8} l2.$$

$$\int_{-1}^0 \text{Arc Cot } x \cdot \frac{dx}{1-x} = -\frac{3\pi}{8} l2.$$

20. Lisez $\frac{1}{\sqrt{1+r}}$ au lieu de $\frac{1}{\sqrt{1-r}}$.

Tab. 274.

5. Le dénominateur est $(1+e^x)^2$, non $(1+e^{-x})^2$.

11. Lisez $e^x + e^{-x} - 1$ dans le dénominateur.

Tab. 276.

1 à 6. Dans toutes ces intégrales les limites sont 0 et ∞ , non $-\infty$ et ∞ . Voyez Tab. 191.

7, 8. Otez le facteur π dans le membre droit et écrivez $\frac{1}{2}lx^2$ au lieu de lx sous le signe de l'intégration.

Tab. 277.

3, 4. Ajoutez que le nombre q doit être entier.

Tab. 278.

11. Lisez $e^{-b\pi x}$ sous le signe de l'intégration.

Tab. 279.

3, 4. Celle-ci est fautive: lisez $1^{2a+1/1}$ au lieu de $1^{2a/1}$. On peut aussi écrire

$$\int_0^{\infty} e^{-px} \cos^{2a} x dx = \frac{p}{2^{2a-1}} \sum_{r=0}^{r=a-1} \frac{(2a)_r}{p^2 + 4(a-r)^2} + \frac{(2a)_a}{p \cdot 2^{2a}}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-px} \cos^{2a+1} x dx = \frac{p}{2^{2a}} \sum_{r=0}^{r=a} \frac{(2a+1)_r}{p^2 + (2a-2r+1)^2}.$$

Les formules N:o 1 et N:o 2 peuvent prendre une forme analogue, mais elle n'est guère plus simple que celle du texte.

18, 19. Pour devenir en état d'examiner ces formules je m'ai procuré le livre cité, mais il est atteint d'un grand nombre de fautes typographiques non corrigées, ce qui rend l'examen pénible. Les formules se trouvent page 78 et elles portent le N:o 21 et 22, mais dans N:o 21 il

faut lire $+\frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_0^u \dots$ au lieu de $-\frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_0^u \dots$. Si l'on y pose

$\gamma = p$, $\beta = q^2$, $u = \frac{p}{q}$ et qu'on change leur ordre, on aura

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-2px} \sin(q^2 x^2) dx &= \frac{\sqrt{2\pi}}{4q} \left[\cos\left(\frac{p^2}{q^2}\right) + \sin\left(\frac{p^2}{q^2}\right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{q} \int_0^u \cos\left(\frac{p^2}{q^2} - x^2\right) dx, \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-2px} \operatorname{Cos}(q^2 x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4q} \left[\operatorname{Cos}\left(\frac{p^2}{q^2}\right) - \operatorname{Sin}\left(\frac{p^2}{q^2}\right) \right] \\ + \frac{1}{q} \int_0^{\frac{p}{q}} \operatorname{Sin}\left(\frac{p^2}{q^2} - x^2\right) dx.$$

M. B. d. H. a développé les dernières intégrales en séries, mais une faute s'y est glissée. On a

$$\int_0^{\frac{p}{q}} \operatorname{Cos}(x^2) dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\Gamma(2\nu+1)} \cdot \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{4\nu+1}}{4\nu+1}, \\ \int_0^{\frac{p}{q}} \operatorname{Sin}(x^2) dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\Gamma(2\nu)} \cdot \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{4\nu-1}}{4\nu-1}.$$

La limite inférieure de la somme celle-ci est 0 dans le texte. Les justes formules sont

$$\int_0^{\infty} e^{-2px} \operatorname{Sin}(q^2 x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4q} \left[\operatorname{Cos}\left(\frac{p^2}{q^2}\right) + \operatorname{Sin}\left(\frac{p^2}{q^2}\right) \right] \\ - \frac{1}{q} \left[\operatorname{Cos}\left(\frac{p^2}{q^2}\right) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\Gamma(2\nu+1)} \cdot \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{4\nu+1}}{4\nu+1} \right. \\ \left. + \operatorname{Sin}\left(\frac{p^2}{q^2}\right) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\Gamma(2\nu)} \cdot \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{4\nu-1}}{4\nu-1} \right], \\ \int_0^{\infty} e^{-2px} \operatorname{Cos}(q^2 x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4q} \left[\operatorname{Cos}\left(\frac{p^2}{q^2}\right) - \operatorname{Sin}\left(\frac{p^2}{q^2}\right) \right] \\ + \frac{1}{q} \left[\operatorname{Sin}\left(\frac{p^2}{q^2}\right) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\Gamma(2\nu+1)} \cdot \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{4\nu+1}}{4\nu+1} \right. \\ \left. - \operatorname{Cos}\left(\frac{p^2}{q^2}\right) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\Gamma(2\nu)} \cdot \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{4\nu-1}}{4\nu-1} \right].$$

Tab. 280.

4. Mr B. d. H. prétend que cette intégrale est fautive, mais elle est parfaitement juste.

8, 9 sont fautives et du reste superflues.

15, 16 sont fautive. Lisez

$$\int_0^{\infty} e^{-px^2} \sin(qx^2) \cos rxdx \\ = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p^2 + q^2}} e^{-ab} [b \sin(ab) - c \cos(ab)],$$

$$\int_0^{\infty} e^{-px^2} \cos(qx^2) \cos rxdx \\ = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p^2 + q^2}} e^{-ab} [e \sin(ab) + b \cos(ab)].$$

17, 18. Écrivons

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin\left(\frac{2p^2}{x^2}\right) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot e^{-2p} \cdot \sin(2p),$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos\left(\frac{2p^2}{x^2}\right) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot e^{-2p} \cos(2p).$$

21. Il y doit être quelque faute d'impression, car autrement l'intégrale est infinie.

22 est fautive. Probablement doit-il être

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cot px \cdot x dx = p \sqrt{\pi} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \nu e^{-(\nu p)^2}.$$

25 à 28 sont au fond les mêmes que N:o 15 et 16.

Tab. 281.

4, 8. La condition $p < \pi$ ne se trouve pas chez LEGENDRE.

11 peut être trouvée comme il suit. D'abord on a

$$\frac{1}{e^{ax} - e^{(a-1)x}} = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{e^{(a-1)x} - 1}{e^{(a-1)x}(e^x - 1)} = \frac{1}{e^x - 1} - \sum_{\nu=1}^{\nu=a-1} e^{-\nu x}.$$

En multipliant par $\sin pxdx$ et en intégrant entre 0 et ∞ on trouve

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin pxdx}{e^{ax} - e^{(a-1)x}} = \int_0^{\infty} \frac{\sin pxdx}{e^x - 1} - \sum_{\nu=1}^{\nu=a-1} \int_0^{\infty} e^{-\nu x} \sin pxdx$$

ou à l'aide de N:o 1. et de Tab. 278 N:o 8

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin pxdx}{e^{ax} - e^{(a-1)x}} = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2p} + \frac{\pi}{1 - e^{-2p\pi}} - \sum_{\nu=1}^{\nu=a-1} \frac{p}{p^2 + \nu^2}.$$

Il faut que a soit ≥ 2 . (Pour $a=1$ on a la formule N:o 1). La formule du texte est juste après la correction de Mr B. d. H., quoique elle semble différente de la mienne.

Tab. 282.

2. Ajoutez: $p > 0$.
8. Ajoutez: $q > 0$.
15. Je ne vois pas comment PLANA a obtenu cette formule: je trouve simplement

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-qx} \sin px}{1 - e^{-x}} dx = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{p}{p^2 + (q + \nu)^2}.$$

Tab. 283.

- 3 est fautive. Selon l'Exposé (pag. 190 form (101)) on a

$$\frac{1}{1 - 2q \cos x + q^2} = \frac{1}{1 - q^2} \left[-1 + 2 \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} q^{\nu} \cos \nu x \right];$$

en multipliant par $e^{-px^2} dx$ et en intégrant il vient

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{e^{-px^2}}{1 - 2q \cos x + q^2} dx &= \frac{1}{1 - q^2} \left[- \int_0^{\infty} e^{-px^2} dx + 2 \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} q^{\nu} \int_0^{\infty} e^{-px^2} \cos \nu x dx \right] \\ &= \frac{1}{1 - q^2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{p}} \left[-\frac{1}{2} + \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} q^{\nu} e^{-\frac{\nu^2}{4p}} \right]. \end{aligned}$$

Le signe du terme $\frac{1}{2}$ doit donc être —. Ajoutez la condition: $p^2 < 1$.

Tab. 284.

4 est selon moi indéterminée. En effet on a

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x} + 2 \cos p} = 1 - \frac{2 \cos p}{e^x + e^{-x} + 2 \cos p}.$$

En multipliant par $\cos qx$ et en intégrant, on aura

$$\int_0^\infty \frac{(e^x + e^{-x}) \cos qx}{e^x + e^{-x} + 2 \cos p} \cdot dx = \int_0^\infty \cos qx dx - 2 \cos p \int_0^\infty \frac{\cos qx dx}{e^x + e^{-x} + 2 \cos p}.$$

Le dernier terme est suivant N:o 1 égal à

$$- \pi \cot p \cdot \frac{e^{pq} - e^{-pq}}{e^{2p} - e^{-2p}}, \text{ mais le premier est indéterminé.}$$

10 est fautive. Lisez

$$\int_0^\infty \frac{\sin (2a+1)x}{\sin x} \cdot e^{-2px} dx = \frac{1}{2p} + \sum_{\nu=1}^{\nu=a} \frac{p}{p^2 + \nu^2}.$$

11. Lisez $\frac{\cos (2a+1)x}{\cos x}$ au lieu de $\frac{\cos (2a+1)x}{\sin x}$.

21. Je ne peux pas obtenir cette formule. Si dans N:o 18 on remplace q et r par r et $2r$ resp., on aura

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} \cdot \frac{\cos rx dx}{1 - 2p \cos 2rx + p^2} \\ = \frac{1}{1-p} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{p^\nu \sin \lambda}{e^{(2\nu+1)r} + 2 \cos \lambda + e^{-(2\nu+1)r}}, \quad \lambda < \pi. \end{aligned}$$

Dans le texte le dénominateur est $1-p^2$. Je ne sais pas expliquer cette dissemblance. C'est peut-être une faute d'impression.

Tab. 285.

4. Lisez $\frac{\cos 2pq - \sin 2pq}{4q}$ au lieu de $\frac{\sin 2pq - \cos 2pq}{4q}$.

13, 14. Lisez $2(bq + r) + \frac{1}{2}q$ au lieu de $\frac{r}{2}(bq + r) + \frac{1}{2}q$.

17 est fautive. Si dans l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-x} \text{Cos}(2p\sqrt{x})dx$ on pose x^2 au lieu de x , on trouve

$$\int_0^x e^{-x} \text{Cos}(2p\sqrt{x})dx = \int_0^x e^{-x^2} \text{Cos}(2px) \cdot 2xdx.$$

En intégrant par parties on aura

$$\int_0^x e^{-x^2} \text{Cos}(2px) \cdot 2xdx = 1 - 2p \int_0^x e^{-x^2} \text{Sin } 2p x dx$$

et par suite

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \text{Cos}(2p\sqrt{x})dx + 2p \int_0^{\infty} e^{-x^2} \text{Sin } 2p x dx = 1.$$

Tab. 286.

11, 12. Lisez $e^{\frac{q^2}{p} \text{Cos}(\lambda - 2\mu) - r \text{Cos } r}$ au lieu de $e^{-\frac{q^2}{p} \text{Cos}(\lambda - 2\mu) - r \text{Cos } r}$.

Ces formules sont contenues en N:o 13 et 14 qui sont justes après les corrections de M:r B. d. H.

Tab. 287.

4 est exprimée par des fonctions $\Gamma(\dots)$ à argument complexe. Je lui donnerai une forme plus usuelle. Parce qu'on a

$$\text{Cos } 2^b x = \frac{1}{2^{2b}-1} \sum_{r=0}^{r=b-1} (2b)_r \text{Cos } 2(b-r)x + \frac{(2b)_b}{2^{2b}},$$

on trouvera

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{2qx} + e^{-2qx}) \cos 2bx dx \\
 &= \frac{1}{2^{2b-1}} \sum_{\nu=0}^{r=b-1} (2b)_{\nu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{2qx} + e^{-2qx}) \cos 2(b-\nu)x dx \\
 &\quad + \frac{(2b)_b}{2^{2b}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{2qx} + e^{-2qx}) dx . \\
 &= \frac{1}{2^{2b}} \sum_{\nu=0}^{r=b-1} (2b)_{\nu} \int_0^{\pi} (e^{qy} + e^{-qy}) \cos (b-\nu)y . dy \\
 &\quad + \frac{(2b)_b}{2^{2b+1}} \int_0^{\pi} (e^{qy} + e^{-qy}) dy ,
 \end{aligned}$$

en substituant $x = \frac{y}{2}$. On obtient aisément

$$\int_0^{\pi} e^{qy} \cos (b-\nu)y . dy = \frac{q [e^{q\pi} - 1]}{q^2 + (b-\nu)^2} , \quad \int_0^{\pi} e^{-qy} dy = \frac{q [e^{q\pi} - 1]}{q^2}$$

et en changeant le signe de q

$$\int_0^{\pi} e^{-qy} \cos (b-\nu)y dy = \frac{-q [e^{-q\pi} - 1]}{q^2 + (b-\nu)^2} , \quad \int_0^{\pi} e^{-qy} dy = \frac{-q [e^{-q\pi} - 1]}{q^2} .$$

Introduisant ces valeurs en J , on trouvera

$$J = \frac{e^{q\pi} - e^{-q\pi}}{2^{2b}} \left[q \sum_{\nu=0}^{r=b-1} \frac{(2b)_{\nu}}{q^2 + (b-\nu)^2} + \frac{(2b)_b}{2q} \right] .$$

Tab. 288.

1. Lisez $a \sin x$ au lieu de $-a \sin x$.

Tab. 289.

4 est fautive. La valeur est $= \frac{\Gamma(a)}{4p^a}$.

14. Je préfère d'écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-q(\operatorname{tg} 2x + \operatorname{Cot} 2x)} \cdot \frac{\operatorname{tg}^{2a+1} x}{\sin 2x} \cdot dx = \frac{e^{-2q}}{4\sqrt{q}} \sum_{\nu=0}^{\nu=a} \frac{(a+\nu)_{2\nu} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{q^{\nu}}.$$

15, 16 sont obtenues par addition et soustraction de Tab. 290 N:o 2 et 3, mais N:o 2 est fautive, donc les formules en question aussi.

Tab. 290.

2, 5 sont fautives. Voir Tab. 126 N:o 3.

Tab. 291.

4, 6 sont fautives. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\operatorname{Cot} 2x} \cdot \operatorname{Cot}^{2a} x \cdot \frac{dx}{\sin 2x} = \frac{1}{4} \Gamma(a);$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-p \operatorname{Cot} 2x} \operatorname{Cot}^{2a} x \cdot \frac{dx}{\sin 2x} = \frac{\Gamma(a)}{4p^a}.$$

Tab. 292.

4. Lisez $\pi \geq p > 0$ au lieu de $\pi > p > 0$.

Tab. 293.

8. Lisez $\frac{\pi^2}{q^2}$ au lieu de $\frac{4\pi^4}{q^4}$.

9. Lisez $\frac{2\pi^4}{q^2}$ au lieu de $\frac{\pi^2}{q^2}$.

10. Écrivons

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cdot dx}{e^{q \lg x} - 1} = \frac{2\pi^2}{q^2} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \left(\frac{2\pi}{q}\right)^{2\nu} \cdot B_{2\nu+1}.$$

 12. Ajoutez $\frac{1}{2} > q > 0$.

Tab. 295.

6, 7 sont fautives avec Tab. 140 N:o 11.

Tab. 296.

 1 à 4 sont justes, si p est un nombre entier.

5 peut convenablement être remplacée par les formules suivantes

$$\int_0^{\pi} e^{ax} \sin^{2c+1} x dx = \frac{(-1)^c (e^{a\pi} + 1)}{2^{2c}} \sum_{\nu=0}^{\nu=c} \frac{(-1)^{\nu} (2c - 2\nu + 1)(2c + 1)_{\nu}}{a^2 + (2c - 2\nu + 1)^2},$$

$$\int_0^{\pi} e^{ax} \sin^{2c} x dx = \frac{e^{a\pi} - 1}{2^{2c-1}} \left[\frac{(2c)_c}{2a} + (-1)^c a \sum_{\nu=0}^{\nu=c-1} \frac{(-1)^{\nu} (2c)_{\nu}}{a^2 + (2c - 2\nu)^2} \right].$$

Puisque aucunes formules, contenant des puissances de Cos, ne se trouvent dans les tables, j'ajoute les suivantes

$$\int_0^{\pi} e^{ax} \cos^{2c+1} x dx = - \frac{a(e^{a\pi} + 1)}{2^{2c}} \sum_{\nu=0}^{\nu=c} \frac{(2c + 1)_{\nu}}{a^2 + (2c - 2\nu + 1)^2},$$

$$\int_0^{\pi} e^{ax} \cos^{2c} x dx = \frac{e^{a\pi} - 1}{2^{2c-1}} \left[\frac{(2c)_c}{2a} + a \sum_{\nu=0}^{\nu=c-1} \frac{(2c)_{\nu}}{a^2 + (2c - 2\nu)^2} \right].$$

 15. Lisez b^{2n} au lieu de p^{2n} .

 22. Lisez p^n au lieu de q^n .

Tab. 298.

3. La limite supérieure est omise. On trouve

$$\int_0^{\alpha} p^{x-1} \sin 2a\pi x dx = \frac{p^{\alpha} [\mathfrak{L}p \cdot \sin 2a\pi\alpha - 2a\pi \cos 2a\pi\alpha] + 2a\pi}{p(4a^2\pi^2 + (\mathfrak{L}p)^2)}.$$

Pour obtenir la valeur donnée par KUMMER il faut poser $\alpha = 1$. Alors on a $\sin 2a\pi\alpha = 0$, $\cos 2a\pi\alpha = 1$ et on trouve

$$\int_0^1 p^{x-1} \sin 2a\pi x dx = \frac{2a\pi}{p} \cdot \frac{1-p}{4a^2\pi^2 + (\mathfrak{L}p)^2}.$$

Plus simple, mais également générale est

$$\int_0^1 p^x \sin 2a\pi x dx = \frac{2a\pi(1-p)}{4a^2\pi^2 + (\mathfrak{L}p)^2}.$$

La formule se trouve fautivement Tab. 192 N:o 4.

- 8 peut être obtenue aisément, mais la valeur ne devient pas celle du texte. Probablement l'intégrale elle-même est fautive, mais je ne peux pas découvrir la faute.
11. En posant $x = \sqrt{2} \sin y$ dans Tab. 112 N:o 3, je trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\cos 2y} \cdot \frac{\sin^3 2y}{\cos^2 y} \cdot dy = e - 2$$

ou la moitié de la valeur dans le texte.

Tab. 299.

- 1 a une grave faute d'impression. Lisez $\text{Arc tg } \frac{x}{q}$ au lieu de $\text{Arc tg } \frac{\pi}{q}$. Le plus sûr est d'écrire

$$\int_0^{\infty} e^{-px} \text{Arc tg } \frac{x}{q} \cdot dx.$$

Tab. 301.

5. Voyez Tab. 95 N:o 6 ci-dessus.
 6. Si a et b , comme à l'ordinaire, désignent des nombres entiers, la valeur est $= -\frac{1}{2b}$.
 8, 9 sont fautives. (Voyez Tab. 397 N:o 1 et 2.) Lisez

$$\int_0^1 \text{Sin} \left(\iota \frac{1}{x} \right) \cdot \sqrt{\iota \frac{1}{x}} \cdot dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}} \cdot \text{Sin} \frac{3\pi}{8},$$

$$\int_0^1 \text{Cos} \left(\iota \frac{1}{x} \right) \cdot \sqrt{\iota \frac{1}{x}} \cdot dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}} \cdot \text{Cos} \frac{5\pi}{8}.$$

10. Écrivons

$$\int_0^1 \text{Sin} \left(\iota \frac{1}{x} \right) \cdot \iota \left(\iota \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{4} - A - \frac{1}{2} \iota 2 \right].$$

16, 17. Écrivons

$$\int_0^1 \text{Sin} \left(\iota \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{dx}{\sqrt{\iota \frac{1}{x}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi(\sqrt{2}-1)},$$

$$\int_0^1 \text{Cos} \left(\iota \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{dx}{\sqrt{\iota \frac{1}{x}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi(\sqrt{2}+1)}.$$

18 dérive de Tab. 398 N:o 7.

21 à 23. Lisez partout q au lieu de a . Posez aussi le signe — devant le membre droit du N:o 22 et N:o 23.

Tab. 302.

7. Elle me semble infinie.

Tab. 303.

1. On peut écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{Sin} x dx = -\frac{\pi}{8} \ln 2 - \frac{1}{4} H\left(\frac{1}{2}\right) = -1,0023793197.$$

- 6 provient de Tab. 155 N:o 2.

7. Le facteur
- $\frac{1}{2}$
- manque.

10. Ajoutez
- $b > 1$
- .

Tab. 304.

1. On peut écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{Cos} x dx = -\frac{3\pi}{8} \ln 2 + \frac{1}{4} H\left(\frac{1}{2}\right) = -0,0864137255.$$

Tab. 305.

1. La valeur est
- $= -\frac{1}{2} L(1) = -0,9159655942$
- .

11. Mr B. d. H. n'a pas indiqué, que le signe
- B_{2a+2}
- désigne un coefficient qui entre dans le développement de la Sécante. Sur ces coefficients voyez SCHLÖMILCH, Differenzial-Rechnung, Greifswald 1847, pag. 235.

12. En posant
- $x = \operatorname{tg} y$
- dans Tab. 158 N:o 3 ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (x \operatorname{tg} y)^{2a} (\operatorname{tg}^q y + \operatorname{tg}^{-q} y) dy \\ &= \Gamma(2a+1) \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left[\frac{1}{(2\nu+q+1)^{2a+1}} + \frac{1}{(2\nu-q+1)^{2a+1}} \right]. \end{aligned}$$

Tab. 306.

7. Une faute est corrigée, une autre reste. La juste formule est

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{tg} x (x \operatorname{Cos} 2x)^{2a} \operatorname{tg} 2x dx = -\frac{2^{2a+2}-1}{8(a+1)(2a+1)} \cdot \pi^{2a+2} \cdot B_{2a+1}.$$

Tab. 307.

4, 5 sont infinies.

Tab. 309.

12. Selon Tab. 47 N:o 18 ci-dessus on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} l \operatorname{tg} x \cdot \frac{dx}{\sin^{1-q} x (\cos x - \sin x)^{1+q}} = -\frac{\pi}{q \sin q\pi}, \quad 1 > q > 0.$$

Tab. 310.

 7 provient de Tab. 155 N:o 4 en posant $x = \operatorname{tg}^2 y$.

12. On peut écrire

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{4}} (l \operatorname{tg} x)^{2a} \cdot \frac{\operatorname{Cot}^q x - \operatorname{tg}^q x}{\cos 2x} dx \\ &= \Gamma(2a+1) \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \left[\frac{1}{(2\nu-q+1)^{2a+1}} - \frac{1}{(2\nu+q+1)^{2a+1}} \right]. \end{aligned}$$

13 est fautive. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (l \operatorname{tg} x)^a \operatorname{tg}^p x \cdot \frac{dx}{\sin 2x} = \frac{(-1)^a \Gamma(a+1)}{2p^{a+1}}.$$

15. Je la trouve infinie.

Tab. 311.

1 est fautive avec Tab. 153 N:o 3. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} l \operatorname{tg} x \cdot \frac{dx}{2 - \sin 2x} = -\frac{2}{9\sqrt{3}} H\left(\frac{1}{3}\right).$$

2 provient de Tab. 339 N:o 28.

- 4 est fautive, car elle provient de la formule fausse Tab. 153 N:o 4. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \lg x \cdot \frac{\operatorname{tg} x dx}{1 - \sin x \cos x} = \frac{\pi^2}{36} - \frac{2}{9\sqrt{3}} H\left(\frac{1}{3}\right).$$

5. Les signes à droite sont fautives. Lisez

$$-\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{4}. \quad (\text{Voyez Tab. 153 N:o 6.})$$

- 6 est fautive avec Tab. 153 N:o 7. La valeur est
- $$= -\frac{1}{18\sqrt{3}} H\left(\frac{1}{3}\right).$$

Tab. 312.

8. La valeur est $= \frac{\lambda(\pi^2 - \lambda^2)(7\pi^2 - 3\lambda^2)}{30 \sin \lambda}$. (Voy. Tab. 156 N:o 5.)

Tab. 314.

3. Lisez $\frac{\pi^2}{8a^3}$ au lieu de $\frac{\pi}{8a^3}$.

Tab. 315.

- 1 provient de tab. 309 N:o 1.

4. Je trouve la dérivée

$$= \lg \left(\frac{\pi}{4} \pm x \right) \cdot \frac{(p+q)(\operatorname{tg}^{p+q} x + \operatorname{Cot}^{p+q} x) - (p-q)(\operatorname{tg}^{p-q} x + \operatorname{Cot}^{p-q} x)}{\sin 2x}.$$

5. Je trouve le numérateur de la dérivée

$$= p(\cos^{2p-1} 2x + 1) \sin^2 2x + \cos 2x (\cos^{2p-1} 2x - 1) - \sin^2 2x.$$

Tab. 316.

1. Lisez $-\frac{1-p}{2(1+p)} \lg 2$ au lieu de $-\frac{1-p^3}{2p(1+p)} \cdot \lg 2$.

3. Je trouve la valeur $= \frac{\pi - \lambda}{4 \sin \lambda} + \frac{l \sin \frac{1}{2} \lambda}{2 \cos \lambda} + \frac{1 - 2 \cos \lambda}{4 \cos \lambda (1 - \cos \lambda)} \cdot l^2$.

9. Lisez $(-1)^a l^2$ au lieu de $(-1)^a \cdot \frac{1}{2} l^2$.

Tab. 317.

15. Par Tab. 161 N:o 12 ci-dessus on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (l \operatorname{tg} x)^{2b} \cdot l \frac{1 - \sin 2x \cos 2p\pi}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\sin 2x}$$

$$= -\Gamma(2b + 1) \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{\cos 2\nu p\pi}{\nu^{2b+2}}, \quad p < 1.$$

Tab. 318.

9. Lisez $\frac{\pi}{2} l^{\frac{\pi}{2}}$ au lieu de $-\frac{\pi}{2} l^{\frac{\pi}{2}}$.

11. Lisez $\frac{\Gamma(p)}{2q^p} [Z'(p) - lq]$ au lieu de $\frac{\Gamma(p)}{2q^p} [lq - Z'(p)]$.

Tab. 319.

13. Lisez $\frac{\operatorname{tg} x}{(\cos^3 x - \sin^3 x)^{\frac{2}{3}}}$ au lieu de $\frac{\sin x}{\cos^2 x \sqrt[3]{\cos^3 x - \sin^3 x}}$.

14, 15 sont déduites de Tab. 50 N:o 12 et de Tab. 52 N:o 15, pas réciproquement.

Tab. 320.

5 est déduite de Tab. 51 N:o 2 en intégrant par parties, mais alors le terme intégré devient $-\frac{l \cos x}{\sin x \sqrt{\cos 2x}}$ qui est infinie pour $x = \frac{\pi}{4}$. L'intégrale en question est donc infinie.

7 est fautive avec Tab. 165 N:o 5.

Tab. 322.

1. Lisez $\text{Cosec } 2x$ au lieu de $\text{Cosec } x - 12x$.
 4. Lisez $\text{Sin}^4\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ au lieu de $\text{Sin}^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.
 - 10 est juste, mais elle n'est pas déduite de Tab. 172 N:o 6.
Je l'ai trouvée par Tab. 171 N:o 1 et 3.
 17. Ajoutez $q > -1$.
 20. Lisez + entre les fractions à droite.
 - 22 est fautive. Elle n'a aucun rapport avec Tab. 350 N:o 5.
-

Tab. 323.

- 1, 2. Je trouve N:o 1 = $-\frac{1}{8}l^2$ et N:o 2 = $\frac{1}{4}l^2 \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.
8. Lisez $\text{Cot}^p x - \text{tg}^p x$ au lieu de $\text{tg}^p x - \text{Cot}^p x$.
14. Il y a plusieurs fautes. Après la correction de Tab 174 N:o 13 et en y posant $\text{tg } x$, 2λ au lieu de x , λ , on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 - \text{Sin}^2 2x \text{Sin}^2 \lambda} \cdot \frac{dx}{(l \text{Cot } x)^{1-q}} = \frac{\Gamma(q)}{\text{Cos } \lambda} \sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r \frac{\text{Cos } (2r+1)\lambda}{(2r+1)^q}.$$

Tab. 324.

9. Lisez $\frac{1}{4}$ au lieu de $\frac{1}{8}$.
-

Tab. 325.

3. Lisez $\frac{\pi^2}{2q^2}$ au lieu de $\frac{2\pi^4}{q^4}$.
 9. ----- $\frac{\pi^2}{4q^2}$ ----- $\frac{\pi^4}{4q^4}$.
 - $\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{2n}$ ----- $\left(\frac{\pi}{q}\right)^{2n}$.
 17. ----- $\frac{1}{4\pi} \text{Cos } \frac{p\pi}{2} \dots$ ----- $\frac{\pi}{4} \text{Cos } \frac{p\pi}{2} \dots$
 25. ----- $\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{2n}$ ----- $\left(\frac{\pi}{q}\right)^{2n}$.
-

Tab. 326.

5. Lisez $\sin (2p+1)n\pi$, ($p < 0$), au lieu de $\sin (p+1)n\pi$.
 7 est fautive. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + x \right)}{\sqrt{\sin 2x}} \cdot \frac{l \sin 2x \cdot dx}{\pi^2 + 4(l \sin 2x)^2} = -\frac{1}{16\sqrt{2}} \left[\pi - 2\sqrt{2} + l \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right].$$

8. Ajoutez $p < \frac{1}{2}$.
 9. Lisez $\cos (2p+1)n\pi$, ($p < 0$) au lieu de $\cos (p+1)n\pi$.
 13. $\sin (2p+1)n\pi$, ($p < 0$) $\sin (p+1)n\pi$.
 17 est fautive. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{l \cos 2x}{\pi^2 + 4(l \cos 2x)^2} \cdot \frac{dx}{\operatorname{tg} x \sqrt{\cos 2x}} = -\frac{1}{16\sqrt{2}} \left[\pi - 2\sqrt{2} + l \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right].$$

20. Lisez $\cos (2p+1)n\pi$, ($p < 0$) au lieu de $\cos (p+1)n\pi$.

Tab. 327.

- 2 est fautive. En posant dans Tab. 173 N:o 2 $x = \operatorname{tg} y$,
 je trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{l \operatorname{tg} y}{q^2 + (l \operatorname{tg} y)^2} \cdot \frac{dy}{\cos y (\cos y - \sin y)} = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{q} + l \frac{2\pi}{q} + Z \left(\frac{q}{2\pi} \right) \right].$$

Tab. 328.

- 2, 3 valent seulement entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$.
 4 dérive de Tab. 44 N:o 6 laquelle ne vaut que pour $a < \frac{1}{2}$.
 On a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{V(l \operatorname{Cosec} x)^{2a+1}} = \Gamma \left(\frac{1}{2} - a \right), \quad a < \frac{1}{2}.$$

8. Lisez tg^ax au lieu de tg^ax .

10. $\sqrt{n}$ $\sqrt{2n+1}$.

Tab. 329.

4, 5 dérivent de Tab. 404 N:o 7 et 18, non de N:o 2 et 8.

9. Je trouve $\text{tg}^{q+1}x$ au lieu de $\text{tg}^{q-1}x$ dans le texte.

10. La valeur est $= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 + e^{2p\pi}}{1 - e^{2p\pi}}$.

13 est fautive. En posant $\text{tg } x$, $\frac{p}{2}$ au lieu de x , p dans Tab. 406 N:o 18, je trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\text{Cos}(p \text{tg } x)}{\text{tg } x \cdot \text{Sin } 4x} \cdot dx = \frac{1}{4} \left(e^{\frac{p\pi}{2}} - e^{-\frac{p\pi}{2}} \right).$$

Tab. 330.

Les limites ne sont point 0 et $\frac{\pi}{4}$, mais 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Tab. 331.

10. Otez le terme 1 entre les crochets.

14. Je trouve la valeur du texte, mais avec le signe contraire. Comparez Tab. 281 N:o 9, Tab. 404 N:o 11 et Tab. 335 N:o 14 (non N:o 13).

Tab. 332.

10 à 12 dérivent de Tab. 337 N:o 16, 18, 21, non de N:o 12, 14, 17.

Tab. 333.

Après N:o 1 manquent les formules

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{tg } x \cdot \text{Sin } x dx = \text{I}2; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{tg } x \cdot \text{Cos } x dx = -\text{I}2.$$

Voyez l'Exposé page 423.

10 est fautive. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{Sin}^{2a-1} x \operatorname{Cos} 2x dx = -\frac{1}{2a} \cdot \frac{2^a - 1/2}{2^a - 1/2}.$$

11, 12 proviennent de Tab. 305 N:o 5 et 8.

Tab. 334.

1 est fautive. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l(p \operatorname{tg} x) dx = \frac{\pi}{2} lp.$$

6, 7. On peut écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l(1 + \operatorname{Cos} x) dx = -\frac{\pi}{2} l2 + L(1) = 0,7431381432.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l(1 - \operatorname{Cos} x) dx = -\frac{\pi}{2} l2 - L(1) = -2,9207242335.$$

10, 12 Voyez Tab. 165 N:o 15, 16.

11. Je ne peux pas trouver cette formule et elle me semble fautive. Peut-être faut il poser $\operatorname{Sin}^2 x$ au lieu de $\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x$.

19. Voyez Tab. 165 N:o 25.

22 à 24. Voyez Tab. 166 N:o 3.

25, 26 sont fautives. J'ai autrefois¹⁾ trouvé

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \frac{1 + \operatorname{Sin} \lambda \operatorname{Cos} x}{1 - \operatorname{Sin} \lambda \operatorname{Cos} x} \cdot dx = 2 \left(\frac{2\lambda}{\pi} \right)^2 L \left(\frac{2\lambda}{\pi} \right).$$

¹⁾ Voyez Nova Acta reg. soc. scient. Upsaliensis, Ups. 1874. D'une fonction transcendente pag. 37 form (86).

N:o 25 est la somme de quelques intégrales de cette forme. Dans N:o 26 une telle somme est diminuée par une telle intégrale.

Tab. 335.

2. À mon avis il faut écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{I} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} \pm x\right) \cdot \operatorname{Sin} 2x dx = \pm \pi.$$

9 est fautive. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{I} (1 - \operatorname{Sin}^4 x) \operatorname{Cot} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{I} (1 - \operatorname{Cos}^4 x) \operatorname{tg} x dx = -\frac{\pi^2}{24}.$$

11. Écrivons

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{I} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} \pm x\right) \operatorname{tg} x dx = \pm \frac{\pi^2}{2}.$$

17 est fautive. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{I} \operatorname{Cot} x \cdot \operatorname{Sin} (q \operatorname{tg} x) \operatorname{tg} x dx = \frac{\pi}{4} [e^{-q} Ei(q) + e^q Ei(-q)].$$

Tab. 336.

3 est fautive. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{I} \operatorname{Sin} x \cdot \frac{dx}{\operatorname{Cos} 2x} = -\frac{\pi^2}{8}.$$

4 est fautive. Lisez

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \sin x \cdot \frac{dx}{\operatorname{tg}^p x \cos^2 x} = \frac{\pi}{2(p-1)} \operatorname{Sec} \frac{p\pi}{2} \\ & \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \sin x \cdot \frac{dx}{\operatorname{tg}^{p-1} x \sin 2x} = \frac{\pi}{4(p-1)} \operatorname{Sec} \frac{p\pi}{2} \end{aligned} \right\} p < 1.$$

6. Ajoutez $p > 0$.

7. Je trouve la valeur $= + \frac{(p+1)\pi}{4} \cdot \operatorname{Sec} (p+1) \frac{\pi}{2}$.

10. Je trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \sin x \cos (p l \cos x) \operatorname{tg} x dx = \frac{1}{2p^2} + \frac{\pi}{4p} \cdot \frac{1 + e^{p\pi}}{1 - e^{p\pi}}.$$

11 est fautive.

19 est fautive. On peut écrire

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (l \sin x)^{2a} \cdot \frac{\operatorname{Cosec}^q x - \sin^q x}{\cos x} dx \\ & = \Gamma(2a+1) \sum_{v=0}^{v=\infty} \left[\frac{1}{(2v-q+1)^{2a+1}} - \frac{1}{(2v+q+1)^{2a+1}} \right] \quad q < 1. \end{aligned}$$

Tab. 337.

2. Lisez $\sin x$ au lieu de $\operatorname{tg} x$ en le dénominateur ou posez $\cos^{q-1} x$ au lieu de $\cos^q x$. Il faut d'ailleurs que p soit un nombre entier. Voyez Tab. 158 N:o 8 et Tab. 336 N:o 18.

5 est fautive.

6. La condition est $3 > p > 1$.

8. Selon Mr B. d. H. la valeur est $= -\frac{\pi}{4} Ei(-p)$, mais Tab. 414 N:o 3 donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \cos x \sin (p \operatorname{tg} x) \cdot \frac{dx}{\sin 2x} = \frac{\pi}{4} li(e^{-p}).$$

Sa définition de la fonction $li(a)$ est

$$li(a) = \int_0^a \frac{dx}{lx}$$

conformément à l'usage. En y posant $x = e^y$ on aura

$$li(a) = \int_{-\infty}^{la} \frac{e^y dy}{y} = - \int_{-la}^{\infty} \frac{e^{-y} dy}{y}.$$

Suivant les tables (pag. 22) on a

$$\int_{-la}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy = Ei(la)$$

d'où il suit que $li(a) = -Ei(la)$ ou $li(e^a) = -Ei(a)$.

En ce cas N:o 8 est juste; mais communément on pose $li(a) = +Ei(a)$ et cela s'est fait précédemment (Voy. par ex. Tab. 150 N:o 3, 5).

12 est fautive.

14 est infinie.

23. On l'aura en posant $x = \frac{\pi}{2} - y$ dans Tab. 336 N:o 19.

Tab. 338.

4, 5 sont justes, mais je préfère d'écrire $\text{Sec} \frac{p\pi}{2}$ au lieu de $\text{Cosec} (1 + p) \frac{\pi}{2}$.

13, 14. Voyez Tab. 184 N:o 5, 6.

Tab. 339.

2, 3 Ajoutez: $p < 1$.

4. Ajoutez: $p < 1$, $q < 1$.

6. Ajoutez: $p < 1$. Je trouve $\pm \frac{2\pi}{p} \text{tg} \frac{p\pi}{2}$.

9 provient de Tab. 415 N:o 17.

10. Je trouve la valeur $= \frac{1^{a/2}}{2^{a/2}} \cdot \frac{\pi}{2} lq$.

12. Lisez 2^{p-2} au lieu de 2^{2p-2} .

18 provient de Tab. 206 N:o 2.

19. Je trouve la valeur $= \pm \frac{4}{q} [Si(q) \cos q - Ci(q) \sin q]$.

36. Posez le signe — devant le membre droit.

Tab. 340.

1. Ajoutez: $1 > p > 0$.

7 provient de Tab. 179 N:o 16. Ajoutez: $p < 1$.

13 dérive de Tab. 179 N:o 15.

Tab. 341.

9, 10. Ajoutez: $p^2 < 1$.

Tab. 342.

10, 11 sont justes, quoique déduites des formules fautives.

13. En posant $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x = y^{\frac{1}{2}}$ on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \operatorname{tg} \frac{1}{2}x \cdot \frac{\sin x dx}{1 - \cos^2 \lambda \sin^2 x} = \int_0^1 l y \cdot \frac{dy}{1 - 2y \cos 2\lambda + y^2}.$$

Par une formule que j'ai autrefois¹⁾ proposée, on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \operatorname{tg} \frac{1}{2}x \cdot \frac{\sin x dx}{1 - \cos^2 \lambda \sin^2 x} = \frac{2}{\sin 2\lambda} \left[\lambda (2 \sin \lambda) - \frac{4\lambda^2}{\pi^2} H\left(\frac{2\lambda}{\pi}\right) \right],$$

ce qui s'accorde bien avec la formule de LOBATSCHESKY

21 est fautive. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (l \operatorname{tg} x)^4 \cdot \frac{dx}{1 + \cos \lambda \sin 2x} = \frac{(\pi^2 - \lambda^2)(7\pi^2 - 3\lambda^2)}{30 \sin \lambda}.$$

24 qui contient N:o 22 et 23 comme cas particuliers, peut s'écrire

¹⁾ Voyez Nova Acta Upsal. pag. 31.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t \operatorname{tg} x)^{2a} \cdot \frac{dx}{1 - \operatorname{Cos} \lambda \operatorname{Sin} 2x} = \frac{2\Gamma(2a+1)}{\operatorname{Sin} \lambda} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{\operatorname{Sin} \nu \lambda}{\nu^{2a+1}}.$$

27 est fautive. Voyez Tab. 355 N:o 3.

Tab. 343.

1 est fautive avec Tab. 165 N:o 4.

8. Voyez Tab. 165 N:o 4.

$$9. \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \frac{1 + p \operatorname{Sin} x}{1 - p \operatorname{Sin} x} \cdot \frac{dx}{\operatorname{Sin} x} = \pi \operatorname{Arc} \operatorname{Sin} p, \quad p \leq 1.$$

15 est fautive. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \frac{1 + p \operatorname{Cos} x}{1 - p \operatorname{Cos} x} \cdot \frac{dx}{\operatorname{Cos} x} = \pi \operatorname{Arc} \operatorname{Sin} p, \quad p \leq 1.$$

16 ne provient point de Tab. 170 N:o 15, mais de Tab. 166 N:o 17. Elle est fautive. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \frac{1 + p \operatorname{Cos} x}{1 - p \operatorname{Cos} x} \cdot \frac{\operatorname{Cos} x dx}{1 - q \operatorname{Cos}^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{q}(1-q)} \frac{p\sqrt{q} + (1 - \sqrt{1-q})(1 - \sqrt{1-p^2})}{p\sqrt{q} - (1 - \sqrt{1-q})(1 - \sqrt{1-p^2})}$$

$$p \leq 1, \quad q \leq 1.$$

12, 18, 21 ont des fonctions hyperboliques et ne valent pas qu'en des cas particuliers.

Tab. 344.

3 est fautive: lisez $-\frac{\pi}{1+q^2}$ au lieu de $\mp \frac{\pi}{1+q^2}$.

4 à 6. Otez le facteur 2 dans les membres droites. Introduisons ici les intégrales plus générales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{L} \sin x \cdot \frac{\sin 2x dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2} = \frac{\mathfrak{L} \frac{b}{a}}{b^2(a^2 - b^2)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{L} \cos x \cdot \frac{\sin 2x dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2} = \frac{\mathfrak{L} \frac{b}{a}}{a^2(a^2 - b^2)}$$

dont la première manque et la dernière comprend N:o 5 et 6.

10. Ajoutez: $p < 1$.

12 provient de Tab. 65 N:o 7, 8.

13. Ajoutez: $q < 1$.

14. Lisez $-\frac{\mathfrak{L}q}{q^2}$ au lieu de $-\frac{2\mathfrak{L}q}{q^2}$.

16. ----- $\pm \frac{2\pi}{q(1+q^2)}$ ----- $\pm \frac{4\pi}{q(1+q^2)}$.

Tab. 345.

5 provient de Tab. 68 N:o 28. Ajoutez: $p < 1$.

8 dérive de Tab. 345 N:o 9 (non N:o 7), mais je trouve la valeur $= + \pi^2 \cos p\pi \operatorname{Cosec}^2 p\pi$.

10 est la somme des intégrales Tab. 313 N:o 8 et Tab. 357 N:o 10 et par suite $= \frac{\pi^2}{4p^2} \cdot \sin \frac{q\pi}{2p} \cdot \sec \frac{q\pi}{2p}$.

11 est de même la somme des intégrales Tab. 313 N:o 9 et Tab. 357 N:o 11. Sa valeur est donc $= \frac{\pi^2}{4p^2} \cdot \sec \frac{q\pi}{2p}$.

18. Je trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{L} \operatorname{tg} x \cdot \frac{\cos 2x dx}{(1 + \sin 2x)(1 + \cos \lambda \sin 2x)} = \frac{\lambda^2}{2(\cos \lambda - 1)}, \quad \pi > \lambda > 0.$$

19. Lisez $p^2 \cos^2 x$ et $\pm \frac{2\pi}{p^2}$ au lieu de $q^2 \cos x$ et $\pm \frac{2\pi}{p}$.

Tab. 346.

Ici manque la formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l \sin x dx}{1 - 2p \cos 2x + p^2} = \frac{\pi}{2(1-p^2)} l^{\frac{1-p}{2}}, \quad p^2 < 1;$$

$$= \frac{\pi}{2(p^2-1)} l^{\frac{p-1}{2}}, \quad p^2 > 1.$$

2. Lisez $\frac{\pi}{4p}$ au lieu de $-\frac{\pi}{4p}$.
 3 est déduite de la Tab. 355 N:o 5 en y posant $2x$ et p pour x et a , mais il faut lire $\cos 2x$ au lieu de $\cos x$ dans le premier facteur du dénominateur.
 6 est fautive. Il est indiqué qu'elle provient de Tab. 370 N:o 23, mais une telle formule n'existe pas. Posons l'intégrale $= J$: comme on a

$$\frac{\cos 2x - p}{1 - 2p \cos 2x + p^2} = -\frac{1}{2p} + \frac{1-p^2}{2p} \cdot \frac{1}{1 - 2p \cos 2x + p^2},$$

on trouve

$$J = -\frac{1}{2p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \cos x dx + \frac{1-p^2}{2p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l \cos x dx}{1 - 2p \cos 2x + p^2}$$

ou suivant Tab. 331 N:o 1 et Tab. 346 N:o 4

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \cos x \cdot \frac{(\cos 2x - p) dx}{1 - 2p \cos 2x + p^2} = \frac{\pi}{4p} l(1+p), \quad p^2 < 1.$$

10. Lisez $p^2 \leq 1$ au lieu de $p^2 \geq 1$.
 13 provient de Tab. 85 N:o 3.

Tab. 347.

3. Je trouve l'intégrale $= -\frac{q\pi}{8} \operatorname{Cosec} \frac{\pi}{q}$, $q > 1$.
 4. Lisez $F(\sqrt{1-p^2})$ au lieu de $F(\sqrt{1+p^2})$.

5. Lisez $+\frac{2\pi}{2p-1} \operatorname{Sec} p\pi$, $\frac{1}{2} > p > -\frac{1}{2}$.

6 est fautive. J'ai trouvé (Voy. Tab. 32 N:o 15)

$$\int_1^x \frac{dx}{x(x-1)^{p+\frac{1}{2}}} = \pi \operatorname{Sec} p\pi, \quad \frac{1}{2} > p > -\frac{1}{2}.$$

Posons $x = \frac{1}{\sin q}$: nous trouverons

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{p+\frac{1}{2}} q}{(1 - \sin q)^{p+\frac{1}{2}}} \cdot \operatorname{tg} q \, dq = \pi \operatorname{Sec} p\pi.$$

En intégrant par parties on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin q \cdot \frac{\sin^{p+\frac{1}{2}} q}{(1 - \sin q)^{p+\frac{3}{2}}} \cdot \operatorname{tg} q \, dq = -\frac{2\pi \operatorname{Sec} p\pi}{2p+1}, \quad \frac{1}{2} > p > -\frac{1}{2}$$

ou, en posant $p = q - 1$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin q \cdot \frac{\sin^{q-\frac{1}{2}} q}{(1 - \sin q)^{q+\frac{1}{2}}} \cdot \operatorname{tg} q \, dq = \frac{2\pi \operatorname{Sec} q\pi}{2q-1}, \quad \frac{3}{2} > q > \frac{1}{2}.$$

9. Lisez $-\frac{q\pi}{8} \operatorname{Cosec} \frac{\pi}{q}$ au lieu de $\frac{q\pi}{8} \operatorname{Cosec} \frac{\pi}{q}$.

10 dérive de Tab. 73 N:o 16. Je trouve la valeur

$$= +\frac{2\pi}{2p-1} \operatorname{Sec} p\pi, \quad \frac{1}{2} > p > -\frac{1}{2}.$$

11. Lisez $F(1 - \overline{p^2})$ au lieu de $F(1 - \overline{p^2})$.

12. Lisez $+\frac{2\pi \operatorname{Sec} p\pi}{2p-1}$, $\frac{3}{2} > p > \frac{1}{2}$.

13. Lisez $-\frac{1}{4}(1 - p^2)F'(p)$ (Voyez Tab. 185 N:o 4).

16 est bien juste, mais il est plus simple d'écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \frac{\sin x dx}{(1 - \sqrt{\cos x})^4 \sqrt{\cos^3 x}} = -2\pi^2.$$

17. Changez le signe devant le membre droit.

Tab. 348.

1 est exprimée par la transcendente de LOBATSCHESKY. Je l'ai cherchée comme il suit. Posons

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \, l (\sin \lambda \sin x + \sqrt{1 - \cos^2 \lambda \sin^2 x})$$

et différentions par rapport à λ : nous aurons

$$\frac{dJ}{d\lambda} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \lambda \sin x dx}{\sqrt{1 - \cos^2 \lambda \sin^2 x}} = l \cot \frac{1}{2} \lambda.$$

En intégrant cette équation différentielle on trouve

$$J = C + \int_0^{\lambda} l \cot \frac{1}{2} y dy$$

où j'ai posé y au lieu de λ sous le signe de l'intégration. En posant $\lambda = 0$ dans J on aura

$$J_{(\lambda=0)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \cos x dx = -\frac{\pi}{2} l^2 = C$$

et par suite

$$J = -\frac{\pi}{2} l^2 + \int_0^{\lambda} l \cot \frac{1}{2} y dy;$$

si l'on fait $y = \frac{4\lambda z}{\pi}$, on trouve

$$\begin{aligned} J &= -\frac{\pi}{2} l^2 + \frac{4\lambda}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} l \cot \frac{2\lambda z}{\pi} d\lambda \\ &= -\frac{\pi}{2} l^2 + \lambda l \cot \frac{1}{2} \lambda + \frac{4\lambda^2}{\pi^2} L\left(\frac{2\lambda}{\pi}\right) \end{aligned}$$

selon la formule (22) dans mon mémoire plusieurs fois cité. Je ne peux pas avoir la formule du texte et je soupçonne qu'il y a quelque faute d'impression.

2 à 9. Voyez l'avant-propos.

16 est la somme de N:o 10 et N:o 11: on a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathcal{U}(1 - p^2 \sin^2 x)}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 x}} dx = \frac{1}{2} \mathcal{U} \frac{4(1 - p^2)}{p} \cdot F'(p) - \frac{\pi}{4} F'(\sqrt{1 - p^2}), \quad p^2 < 1.$$

Dans le texte et dans l'Exposé (pag. 354) aussi on lit $\frac{1}{2} \mathcal{U} \frac{4(1 - p^2)}{p^2}$.

19 est juste, outre qu'il y a + — au lieu de +, mais je préfère de l'écrire ainsi:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \mathcal{U}(1 - p^2 \sin^2 x)}{\sqrt{(1 - p^2 \sin^2 x)^3}} dx \\ = - \frac{1}{p^2(1 - p^2)} [2 - p^2 + \frac{1}{2}(1 - p^2)\mathcal{U}(1 - p^2)] F'(p) \\ + \frac{1}{p^2(1 - p^2)} [2 + \frac{1}{2}\mathcal{U}(1 - p^2)] E'(p). \end{aligned}$$

20 provient en soustrayant N:o 19 de N:o 18, mais elle est fautive. Lisez

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x \mathcal{U}(1 - p^2 \sin^2 x)}{\sqrt{(1 - p^2 \sin^2 x)^3}} dx = \frac{1}{p^2} [2 - p^2 + \frac{1}{2}\mathcal{U}(1 - p^2)] F'(p) \\ - \frac{1}{p^2} [2 + \frac{1}{2}\mathcal{U}(1 - p^2)] E'(p). \end{aligned}$$

21 est aussi fautive. Lisez

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x \mathcal{U}(1 - p^2 \sin^2 x)}{\sqrt{(1 - p^2 \sin^2 x)^3}} dx \\ = \frac{1}{p^2(1 - p^2)} [(2 - p^2)^2 + (1 - p^2)\mathcal{U}(1 - p^2)] F'(p) \\ - \frac{2 - p^2}{p^2(1 - p^2)} [2 + \frac{1}{2}\mathcal{U}(1 - p^2)] E'(p). \end{aligned}$$

Tab. 349.

2 est déduite de la formule fautive Tab. 44 N:o 2. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (\iota \operatorname{Cosec} x)^{a+\frac{1}{2}} dx = \frac{3^{a/2}}{2^{a+1}} \sqrt{\pi}.$$

7 a la même faute que N:o 2. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x (\iota \operatorname{Sec} x)^{a+\frac{1}{2}} dx = \frac{3^{a/2}}{2^{a+1}} \sqrt{\pi}.$$

Tab. 350.

19, 20. Effacez le facteur π dans le membre droit.

22 est la somme des intégrales citées et par conséquent
 $= 2\iota \cos q\pi$, non $= 0$.

25. Lisez $\cot^p x - \operatorname{tg}^p x$ au lieu de $\operatorname{tg}^p x - \cot^p x$ dans le dénominateur.

Tab. 351.

1. Lises $-\frac{\pi}{2q} \iota \Gamma\left(\frac{q+\pi}{\pi}\right)$. Voyez Tab. 378 N:o 4.

3 est juste, mais je préfère de l'écrire ainsi:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x \iota \sin x}{q^2 + (\iota \sin x)^2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2q} + \iota \frac{\pi}{q} + Z\left(\frac{q}{\pi}\right) \right].$$

5 est fautive avec Tab. 173 N:o 14. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x \cdot \iota \sin x}{q^2 - (\iota \sin x)^2} dx = \frac{\pi^2}{4q^2} \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^{r+1} B_{2r+1}}{r+1} \left(\frac{\pi}{q}\right)^{2r}.$$

15. Lisez $\frac{\pi^2}{4q^2}$ au lieu de $\frac{\pi^4}{4q^4}$.

Tab. 352.

2. Lisez $-\frac{\pi}{2q} \mathcal{L}\Gamma\left(\frac{q+\pi}{\pi}\right)$ au lieu de $\frac{\pi}{2q} \mathcal{L}\Gamma\left(\frac{q+\pi}{\pi}\right)$.
7. ----- $\frac{\pi^2}{4q^2}$ ----- $\frac{\pi^4}{4q^4}$.
11. ----- $\frac{\pi^2}{4q^2}$ ----- $\frac{\pi^4}{4q^4}$.
- 15 dérive de Tab. 360 N:o 3.

Tab. 353.

- 2 doit être supprimée, puisque la notation $\mathcal{L} \sin x$ désigne le logarithme réel.
- 5 devient imaginaire entre les limites.
- 10, 12. Pour $p^2 < 1$ il faut écrire comme dans l'Exposé (p. 356)

$$\int_0^{\pi} \mathcal{L}(p \pm \cos x)^2 dx = -2\pi \mathcal{L} 2.$$

23. Ajoutez: $p < 1$. Voyez Moigno, Calc. int. pag. 331. Pour $p > 1$ on a l'intégrale $= 2\pi \mathcal{L} p$.
24. Ajoutez: $q < 1$.

Tab. 354.

- 4 est superflue.
- 5 est fautive. D'abord il faut écrire

$$J = \int_0^{\pi} \mathcal{L} \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg} 2x dx.$$

Par un théorème connue on trouve

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathcal{L} \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg} 2x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{L} \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg} 2x dx$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \mathcal{L} \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg} 2x dx + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \mathcal{L} \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg} 2x dx$$

lesquelles nous désignerons par J_1, J_2, J_3, J_4 , resp. En posant $x = \frac{\pi}{2} - y$ dans J_2 , $x = \frac{\pi}{2} + y$ dans J_3 , $x = \pi - y$ dans J_4 , nous trouverons

$$J_2 = J_1; \quad J_3 = -J_1; \quad J_4 = -J_1$$

et par suite

$$J = \int_0^{\pi} l \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg} 2x dx = 0.$$

14. Ajoutez: $b > a$.

Tab. 355.

2. Ajoutez: $\pi > \lambda > 0$.

4 ne provient point de Tab. 348 N:o 3; je ne sais pas d'où elle dérive.

$$19. \int_0^{\pi} l \operatorname{Cos}^2 x \cdot \frac{\operatorname{Cos} 2x - p}{1 - 2p \operatorname{Cos} 2x + p^2} \cdot dx = \frac{\pi}{p} l(1 + p), \quad p^2 < 1.$$

$$20. \int_0^{\pi} l \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{\operatorname{Cos} 2x - p}{1 - 2p \operatorname{Cos} 2x + p^2} \cdot dx = \frac{\pi}{p} l \frac{1-p}{1+p}, \quad p^2 < 1.$$

Dans cette table manquent les formules

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{l \operatorname{Sin} x \cdot \operatorname{Cos} x dx}{1 + 2p \operatorname{Cos} x + p^2} &= \frac{p\pi}{1-p^2} l2 - \frac{\pi(1+p^2)}{2p(1-p^2)} l(1-p^2), \quad p^2 < 1 \\ &= \frac{\pi}{p(p^2-1)} l2 - \frac{\pi(p^2+1)}{2p(p^2-1)} l(p^2-1), \quad p^2 > 1 \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{l \operatorname{Sin} x dx}{1 - 2p \operatorname{Cos} 2x + p^2} = \frac{\pi}{1-p^2} l \frac{1-p}{2}, \quad p^2 < 1.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{l \operatorname{Cos}^2 x \cdot \operatorname{Cos} 2x dx}{1 - 2p \operatorname{Cos} 2x + p^2} &= \frac{\pi}{p(1-p^2)} [(1+p^2)l(1+p) - 2p^2 l2], \\ & \quad p^2 > 1. \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{l \operatorname{Cos}^2 x dx}{1 - 2p \operatorname{Cos} 2x + p^2} = \frac{2\pi}{1-p^2} l \frac{1+p}{2}, \quad p^2 < 1.$$

Tab. 356.

- 1 n'est pas parfaitement juste, parce que Mr ARNDT n'a point distingué entre la valeur générale et la valeur principale du logarithme naturel. Il faut donc échanger la formule contre

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\pm \sin x)) dx = -2\pi i 2 + (4r + 1)\pi^2 i.$$

Voyez l'Exposé pag. 281.

2. Même remarque qu'à la Tab. 353 N:o 23.
 3. Voyez Tab. 63 N:o 2 ci-dessus.
 13, 14. Il faut que a soit multiple de b .

Tab. 357.

- 1 est juste, mais elle peut avoir la forme

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \operatorname{Cot} x dx = \frac{1}{2} L(1) = 0,9159655942.$$

- 5 est fautive. Lisez

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \cdot \frac{dx}{2 - \sin 2x} = \frac{2}{9\sqrt{3}} H\left(\frac{1}{3}\right) = 0,5859768097.$$

- 6 est aussi fautive. Lisez

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \cdot \frac{\sin 2x \cdot dx}{4 \cos^2 2x + \sin^2 2x} = \frac{1}{18\sqrt{3}} H\left(\frac{1}{3}\right) = 0,1464942024.$$

- 7 provient de Tab. 153 N:o 16.

12. Je trouve

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} \pm x \right) \cdot \frac{dx}{\sin 2x} = \pm \frac{\pi^2}{4}.$$

Tab. 358.

9. Lisez $\frac{\pi^3}{16p^3}$ au lieu de $\frac{\pi}{16p^3}$.
 10. ----- $\frac{\pi^3}{8p^3}$ ----- $\frac{\pi^2}{8p^3}$.
 12 provient de Tab. 155 N:o 1.
 13. Lisez $\frac{7\pi^2 - 3\lambda^2}{30}$ au lieu de $\frac{7\pi^2 - 3\lambda^2}{5}$.
-

Tab. 359.

- 1 dérive de Tab. 187 N:o 6.
 2 est contenue en N:o 1.
 5 à 7 sont exprimées par une transcendente de RAABE. On peut les avoir sans celle-ci en posant dans Tab. 159 N:o 3 ci-dessus l'arc λ égal à $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $2p\pi$ resp.
-

Tab. 360.

5. Lisez $-\frac{1}{2}\mathcal{L} \text{Cos} \frac{q\pi}{2p}$ au lieu de $\frac{1}{2}\mathcal{L} \text{Cos} \frac{q\pi}{2p}$.
 7, 8. Leurs limites ne sont point $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$, mais 0 et $\frac{\pi}{2}$, et elles sont les mêmes que Tab. 349 N:o 4 et N:o 9 resp.
-

Tab. 361.

- 1 ne vaut que pour $\alpha = 1$.
 2, 3. Si dans ces formules on fait $\alpha = \beta = r$, on trouve

$$\int_0^{2a\pi} ((\text{Sin } x)) dx = -2a\pi \mathcal{L}2 + (4r + 1)a\pi^2 i$$

$$\int_0^{(2a+1)\pi} ((\text{Sin } x)) dx = -(2a + 1)\pi \mathcal{L}2 + [a + 2r(2a + 1)]\pi^2 i$$

conformément aux formules de l'Exposé (pag. 281).

4 est un peu étrange. En posant $x = 4ay$ on aura

$$\int_0^{\frac{2a\pi}{b}} \cos \frac{bx}{a} \cdot l \sin \frac{x}{4a} \cdot dx = 4a \int_0^{\frac{1}{2}} \cos 4by \cdot l \sin y dy = -\frac{a\pi}{b}.$$

Voyez Tab. 63 N:o 2 ci-dessus

Tab. 364.

1 à 3 peuvent être exprimées par mes transcendentes comme il suit:

$$\int_{\lambda}^{\mu} l \sin x dx = \mu l \sin \mu - \lambda l \sin \lambda - \frac{4\mu^2}{\pi^2} H\left(\frac{2\mu}{\pi}\right) + \frac{4\lambda^2}{\pi^2} H\left(\frac{2\lambda}{\pi}\right).$$

$$\begin{aligned} \int_{\lambda}^{\mu} l \cos x dx &= \mu l \cos \mu + \frac{4\mu^2}{\pi^2} \left[L\left(\frac{4\mu}{\pi}\right) - H\left(\frac{4\mu}{\pi}\right) \right] \\ &\quad - \lambda l \cos \lambda - \frac{4\lambda^2}{\pi^2} \left[L\left(\frac{4\lambda}{\pi}\right) - H\left(\frac{4\lambda}{\pi}\right) \right]. \end{aligned}$$

$$\int_{\lambda}^{\mu} l \operatorname{tg} x dx = \mu l \operatorname{tg} \mu - \lambda l \operatorname{tg} \lambda - \frac{8\mu^2}{\pi^2} L\left(\frac{4\mu}{\pi}\right) + \frac{8\lambda^2}{\pi^2} L\left(\frac{4\lambda}{\pi}\right).$$

5. Lisez $l \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$ au lieu de $l \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$.

Tab. 365.

1 est fautive. Voyez l'Exposé pag. 281.

Tab. 366.

3 provient de Tab. 152 N:o 12.

On y peut ajouter

$$\int_0^1 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x \cdot l x dx = \frac{\pi^2}{48} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} l 2.$$

Tab. 367.

6. Lisez $F'(p)$, $\frac{F'(\sqrt{1-p^2})}{F'(p)}$ au lieu de $F(p)$, $\frac{F(\sqrt{1-p^2})}{F(p)}$.
- 8 est fautive. Elle serait la somme de N:o 1 et de N:o 7, mais puisque les dérivées ne sont point égales, il faut qu'on écrive N:o 1 ainsi:

$$\int_0^1 dx \operatorname{Li}\left(\frac{1}{x}\right) (lx)^{p-1} = (-1)^{-p} \pi \operatorname{Cot} p\pi \Gamma(p).$$

Il est donc évident que N:o 8 ne puisse être la somme de celle-ci et de N:o 7; au reste le facteur π manque.

La même faute se trouve dans l'Exposé (pag. 542).

Tab. 368.

6. Lisez $\frac{\pi}{4}$ au lieu de $\frac{\pi^2}{4}$.

Tab. 369.

- 1 dérive de Tab. 431 N:o 11.
- 3, 6. On ne voit pas d'où dérive la condition $p \geq 1$.
7. Une faute est corrigée, une autre reste: lisez $-\frac{\pi}{8} l^2$ au lieu de $\frac{\pi}{8} l^2$.

Tab. 370.

- 2 est déduite de l'intégrale (Tab. 246 N:o 18)

$$\int_0^{\pi} \frac{x \cos x}{p^2 - \cos^2 x} dx = -\frac{4}{\sqrt{p^2-1}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(p - \sqrt{p^2-1})^{2r+1}}{(2r-1)^2}, \quad p > 1.$$

En intégrant par parties on trouve

$$\int \frac{x \cos x}{p^2 - 1 + \sin^2 x} dx = \frac{x \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\sin x}{\sqrt{p^2 - 1}} \right)}{\sqrt{p^2 - 1}} \\ - \frac{1}{\sqrt{p^2 - 1}} \int \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\sin x}{\sqrt{p^2 - 1}} \right) dx.$$

Quand on introduit les limites, le terme intégré s'évanouit, et on aura

$$\int_0^1 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\sin x}{\sqrt{p^2 - 1}} \right) dx = 4 \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(p - \sqrt{p^2 - 1})^{2r+1}}{(2r+1)^2}, \quad p > 1.$$

Il faut donc lire $\sin x$, non $\sin^2 x$.

16. Lisez $\sin(2a-1)x \cos x$ au lieu de $\cos(2a-1)x \sin x$.

Tab. 371.

11, 12. Posons l'intégrale = J et différencions par rapport à p : nous aurons

$$\frac{dJ}{dp} = \int_0^\pi \frac{\cos x dx}{1 + p^2 + 2p \cos x} = -\frac{p\pi}{1 - p^2}, \quad p^2 < 1 \\ = -\frac{\pi}{p(p^2 - 1)}, \quad p^2 > 1$$

selon Tab. 84 N:o 3 en y posant $a = 1$ et $-p$ au lieu de p . Pour $p^2 < 1$ on a en intégrant

$$J = C - \pi \int \frac{p dp}{1 - p^2} = C + \frac{\pi}{2} \mathcal{U}(1 - p^2).$$

Pour $p = 0$ l'intégrale s'évanouit aussi bien que $\mathcal{U}(1 - p^2)$, donc $C = 0$ et

$$\int_0^\pi \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left(\frac{p \sin x}{1 + p \cos x} \right) \cdot \cot x dx = \frac{\pi}{2} \mathcal{U}(1 - p^2), \quad p^2 < 1.$$

N:o 11 est donc exacte.

Pour $p^2 > 1$ on trouve

$$J = C - \pi \int \frac{dp}{p(p^2 - 1)} = C - \frac{\pi}{2} \mathcal{U} \frac{p^2 - 1}{p^2}.$$

Afin de déterminer la constante il faudrait faire $p = \infty$, mais alors on trouverait $C = \infty$. Ainsi N:o 12 n'est pas juste.

13, 14. Comme auparavant on trouve que N:o 14 est exacte, mais que N:o 13 ne vaut pas.

15 n'est pas valable, mais N:o 16 est exacte.

Tab. 372.

2. D'après les corrections de M:r B. d. H. on aura

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \text{Arc tg} \left(\frac{a \sin x}{b + a \cos x} \right) \cdot \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 + b^2 - 2b \cos x}} \\ &= \frac{1+a}{ab} \cdot \frac{b^2+a}{b-a} \cdot \frac{b+a}{b+1} \cdot H' \left(\frac{4ab}{(b-a)^2} \cdot \frac{2b}{1+b} \right) + \frac{(1+b)(b-a^2)}{ab} \cdot F'(b) \\ &- \frac{2}{b} E'(b) + \frac{1+b}{b} \cdot D \text{ où } D \text{ etc.} \end{aligned}$$

8 se trouve aussi dans les nouvelles tables: la valeur est la même, outre que les lettres sont différentes, mais les dérivées ne s'accordent pas. Il faut donc chercher l'intégrale du texte. Posons pour cela

$$J_p = \int_0^{\pi} \text{Arc tg} \left(\frac{bp \cos x}{\sqrt{a - b^2 \cos^2 x}} \right) \cdot \frac{\cos x dx}{\sqrt{a - b^2 \cos^2 x}}$$

et différencions par rapport à p : nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{dJ_p}{dp} &= b \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x dx}{a - b^2(1 - p^2) \cos^2 x} \\ &= - \frac{\pi}{b(1 - p^2)} + \frac{\pi \sqrt{a}}{b(1 - p^2) \sqrt{a - b^2(1 - p^2)}}. \end{aligned}$$

En intégrant on trouve

$$J_p = C - \frac{\pi}{2b} \frac{1+p}{1-p} + \frac{\pi \sqrt{a}}{b} \int \frac{dp}{(1 - p^2) \sqrt{a - b^2(1 - p^2)}}.$$

Si l'on pose $p = \frac{\sqrt{a-b^2}}{b} \operatorname{tg} \varphi$, on trouve

$$\begin{aligned} \int \frac{dp}{(1-p^2)\sqrt{a-b^2+b^2p^2}} &= \frac{1}{2\sqrt{a}} \operatorname{tg} \frac{b + \sqrt{a} \operatorname{Sin} \varphi}{b - \sqrt{a} \operatorname{Sin} \varphi} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a}} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{a-b^2+b^2p^2} + p\sqrt{a}}{\sqrt{a-b^2+b^2p^2} - p\sqrt{a}} \end{aligned}$$

en rétablissant la variable p , et par suite

$$J_p = C - \frac{\pi}{2b} \operatorname{tg} \frac{1+p}{1-p} + \frac{\pi}{2b} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{a-b^2+b^2p^2} + p\sqrt{a}}{\sqrt{a-b^2+b^2p^2} - p\sqrt{a}}.$$

Pour $p = 0$ on trouve $C = 0$ et par conséquent

$$J_p = \frac{\pi}{2b} \operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{a-b^2+b^2p^2} + p\sqrt{a}}{\sqrt{a-b^2+b^2p^2} - p\sqrt{a}} \cdot \frac{1-p}{1+p} \right).$$

Pour obtenir l'intégrale cherchée il faut faire ici

$p = 1$: en ce cas le facteur $\frac{1-p}{\sqrt{a-b^2+b^2p^2} - p\sqrt{a}}$ devient

$= \frac{0}{0}$, mais sa juste valeur est $= \frac{\sqrt{a}}{a-b^2}$, et on trouve

$$J_1 = \int_0^{\pi} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left(\frac{b \operatorname{Cos} x}{\sqrt{a-b^2 \operatorname{Cos}^2 x}} \right) \cdot \frac{\operatorname{Cos} x dx}{\sqrt{a-b^2 \operatorname{Cos}^2 x}} = \frac{\pi}{2b} \operatorname{tg} \frac{a}{a-b^2}$$

comme dans le texte. Dans les nouvelles tables il faut lire q^2 au lieu de q .

Tab. 374.

2. Mr B. d. H. est d'avis qu'elle est fautive: il a raison, mais c'est une faute typographique. Posons

$$J = \int_0^{\infty} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} px \operatorname{Sin} qxdx$$

et différencions par rapport à p : nous aurons

$$\frac{dJ}{dp} = \int_0^{\infty} x \operatorname{Sin} qxdx \frac{1}{1+p^2x^2} = \frac{\pi}{2p^2} e^{-\frac{q}{p}}.$$

L'intégration donne

$$J = C + \frac{\pi}{2q} e^{-\frac{q}{p}}.$$

Puisque $C = 0$, on trouve

$$J = \frac{\pi}{2q} e^{-\frac{q}{p}}.$$

3. Mr B. d. H. prétend qu'il faut changer $a + 1$ contre $a - 1$. Posons

$$J = \int_0^{\infty} \text{Cos}^{a+1} \left(\text{Arc tg } \frac{x}{q} \right) \text{Sin} \left[(a+1) \text{Arc tg } \frac{x}{q} \right] \text{Sin } x dx$$

et faisons $x = q \text{ tg } y$: nous trouverons

$$J = q \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}^{a-1} y \text{Sin} (a+1)y \text{Sin} (q \text{ tg } y) dy.$$

Si dans Tab. 59 N:o 17 on introduit y , a , q au lieu de x , p , c resp., on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}^{a+1} y \text{Sin} (a+1)y \text{Sin} (q \text{ tg } y) dy = \frac{\pi q^a e^{-q}}{2\Gamma(a+1)}$$

et conséquemment

$$\int_0^{\infty} \text{Cos}^{a+1} \left(\text{Arc tg } \frac{x}{q} \right) \text{Sin} \left[(a+1) \text{Arc tg } \frac{x}{q} \right] \text{Sin } x dx = \frac{\pi q^{a+1} e^{-q}}{2\Gamma(a+1)}.$$

Le membre gauche est donc juste, mais dans le membre droit il faut être q^{a+1} , non q^a .

4. Il en est de même que de N:o 3.
7. On a (Voyez Tab. 249 N:o 8)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{Arc tg} (a + b \text{ tg } x) dx = \pi \text{Arc Cot } \frac{b+1}{a}.$$

Tab. 375.

- 5 est fautive: lisez $\mathcal{L}\frac{2}{(1+p)\sqrt{p}}$ au lieu de $\mathcal{L}\frac{1}{(1+p)\sqrt{p}}$. Voyez l'Exposé pag. 369.

Tab. 377.

6. Lisez $4p^a$ au lieu de $2(2p)^a$.
 15 me semble fautive. Elle est la somme des intégrales

$$J_1 = \int_0^x e^{-px} \mathcal{U}(q^2 - x^2)^2 \cdot x dx, \quad J_2 = \int_0^x e^{-px} \mathcal{U}(q^2 + x^2)^2 \cdot x dx.$$

À l'aide de quelques formules en Tab. 130 on a

$$J_1 = \frac{2}{p^2} \mathcal{L}q^2 + \frac{4}{p^2} - \frac{2(pq + 1)}{p^2} e^{-pq} \mathcal{U}(e^{pq}) + \frac{2(pq - 1)}{p^2} e^{pq} \mathcal{U}(e^{-pq})$$

$$J_2 = \frac{2}{p^2} \mathcal{L}q^2 + \frac{4}{p^2} - \frac{2q}{p} [2Ci(pq) \sin pq - 2Si(pq) \cos pq + \pi \cos pq]$$

$$- \frac{2}{p^2} [2Ci(pq) \cos pq + 2Si(pq) \sin pq - \pi \sin pq].$$

Leur somme ne donne pas N:o 15, car le diviseur p^2 y manque aussi bien que le facteur 2 devant $Ci(pq) \cos pq$. Les signes ne sont pas tout à fait d'accord (Voyez Tab. 337 N:o 8 ci-dessus).

- 16, 17. De ces formules on peut dire en partie autant que de la précédente.

Tab. 378.

- 5 à 8. Le facteur dx manque.
 12. Lisez $2q^2x^4$ au lieu de $2q^3x^4$.

Tab. 380.

8. Lisez $(e^{\pi x} - 1)$ au lieu de $(e^{2\pi x} - 1)$.
 9. ----- $\pi x e^{\pi x} - a(e^{2\pi x} - 1)$ ----- $ae^{2\pi x} + \pi x e^{\pi x} - a$.
 16 est fautive avec Tab. 120 N:o 20. Lisez
 $\frac{2^{2a} - 1}{2a}$ au lieu de $\frac{2^{2a} - 1}{a}$.
 20 est fautive comme Tab. 124 N:o 1. La dérivée est aussi fautive. Si dans la juste formule

$$\int_0^x \frac{x dx}{e^x + e^{-x} - 1} = \frac{4}{9\sqrt{3}} H\left(\frac{1}{3}\right)$$

on intègre par parties, on aura

$$\int_0^x \mathcal{L}x \cdot \frac{x(e^x - e^{-x}) - 2(e^x + e^{-x} - 1)}{(e^x + e^{-x} - 1)^2} \cdot x dx = \frac{4}{9\sqrt{3}} H\left(\frac{1}{3}\right).$$

Tab. 381.

5. est fautive avec Tab. 139 N:o 8. Lisez

$$\begin{aligned} \int_0^x \mathcal{L}x \cdot e^{-\left(px + \frac{q}{x}\right)} [2px^2 - (2c + 1)x - 2q] x^{c - \frac{1}{2}} dx \\ = 2\sqrt{\frac{\pi}{p}} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{c+1}{2}} e^{-2\sqrt{pq}} \sum_{r=0}^{r=c} \frac{(c+1-r)^{2r-1}}{2^{r/2} (2\sqrt{pq})^r} \cdot c \geq 1. \end{aligned}$$

7. Lisez $e^{-a^2\left(x + \frac{1}{x}\right)}$ au lieu de $e^{-q^2\left(x + \frac{1}{x}\right)}$.

Tab. 382.

- 12 est fautive, car elle ne s'accorde ni avec N:o 13 ni avec N:o 15 dont elle est un cas particulier.
 17. Je préfère d'écrire

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-px^2 - qx} (2px^2 + qx - 2\alpha - 1) x^{2\alpha} \mathcal{L}x dx \\ = \frac{e^{\frac{q^2}{4p}}}{p^{\alpha + \frac{1}{2}}} \sum_{r=0}^{r=\alpha} (2\alpha)_{2r} \left(\frac{q}{2\sqrt{p}}\right)^{2r} \Gamma\left(\alpha - r + \frac{1}{2}\right); \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-px^2 - qx} (2px^2 + qx - 2\alpha - 2)x^{2\alpha+1} dx$$

$$= -\frac{e^{\frac{q^2}{4p}}}{p^{\alpha+1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=\alpha} (2\alpha+1)_{2\nu+1} \left(\frac{q}{2\sqrt{p}}\right)^{2\nu+1} \Gamma(\alpha - \nu + \frac{1}{2}).$$

Tab. 384.

4. Au lieu de cette formule je trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-q \cot x} (q \cos x - \sin x)}{\sin^3 x} \cdot x dx = Ci(q) \cos q - \sin q \left[\frac{\pi}{2} - Si(q) \right].$$

10. Je la trouve $= -\frac{1}{2}(\mathcal{L}2 - \frac{1}{2})$.

Tab. 386.

7. Lisez $\sin x$ au lieu de $\cos x$.

11 est contenue en N:o 12.

12, 13. Ajoutez: $a > 0$.

14 à 21 sont superflues.

20. Lisez $\cos^r \left(\text{Arc tg } \frac{q}{p} \right)$ au lieu de $\cos^r \left(\text{Arc tg } \frac{g}{p} \right)$.

Tab. 388.

2. On écrit tout aussi bien

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos ax \cdot x dx = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^{\nu} a^{2\nu}}{(\nu+1)^{\nu/1}}.$$

14 à 19 sont comprises en N:o 24.

21 provient de Tab. 439 N:o 9.

Tab. 391.

5, 6. Ajoutez: $a < \pi$. Dans N:o 6 lisez $e^{\pi x} - e^{-\pi x}$ au lieu de $e^{\pi x} + e^{-\pi x}$.

Tab. 392.

8. Ajoutez: $p > q$.
 13. Lisez $\sqrt{a^2 + 4(b-c)^2}$ au lieu de $\sqrt{a^2 - 4(b-c)^2}$.
-

Tab. 393.

18. Lisez $\text{Arc tg } \frac{qr-ps}{pr+qs}$ au lieu de $\text{Arc tg } \frac{qr-ps}{pr-qs}$.
-

Tab. 394.

- 7, 8. Otez le facteur $\text{Cos } q$.
 9 à 17. Ces formules contiennent partie la fonction $\Gamma(\dots)$ à l'argument négatif, partie la quantité p , mentionnée Tab. 126 N:o 15. Il faut les remplacer par les formules¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty e^{-cx} x^{a-1} \text{Cos } bxdx &= \frac{\Gamma(a)}{(b^2 + c^2)^{\frac{a}{2}}} \text{Cos} \left(a \text{ Arc tg } \frac{b}{c} \right) \\ \int_0^\infty e^{-cx} x^{a-1} \text{Sin } bxdx &= \frac{\Gamma(a)}{(b^2 + c^2)^{\frac{a}{2}}} \text{Sin} \left(a \text{ Arc tg } \frac{b}{c} \right) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} c &> 0. \\ a &> 0. \end{aligned}$$

- 21 qui contient aussi la prétendue constante p , doit être remplacée par la formule

$$\int_0^\infty e^{-(c+bi)x} x^{a-1} dx = \frac{\Gamma(a)}{(c+bi)^a}. \quad c > 0; \quad a > 0.$$

- 22, 23. Ajoutez: $t < 1$.
-

Tab. 395.

- 3 ne vaut que pour $a=2$ et $a=1$: en le premier cas elle est contenue en N:o 1 ($p=1$) et en le second en N:o 2 ($p=1$).
-

Tab. 396.

- 5 est déduite de N:o 16 et fautive comme celle-ci. Lisez

¹⁾ Voyez MINDING, Integral-Tafeln pag. 157.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin qx}{e^{\frac{\pi x}{4}} + e^{-\frac{\pi x}{4}}} \cdot \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{\pi e^{-q}}{2\sqrt{2}} + \frac{e^q - e^{-q}}{4\sqrt{2}} \mathcal{U} \frac{e^q + \sqrt{2} + e^{-q}}{e^q - \sqrt{2} + e^{-q}} - \frac{e^q + e^{-q}}{2\sqrt{2}} \text{Arc tg} \left(\frac{\sqrt{2}}{e^q - e^{-q}} \right).$$

6. Lisez $-\frac{\pi e^{-q}}{2\sqrt{2}}$ au lieu de $-\frac{e^{-q}}{2\sqrt{2}}$.

16. En traitant N:o 5 j'ai déjà remarqué que cette formule est fautive. La valeur est

$$\frac{\pi e^{-q}}{2} \sin p + \frac{e^q - e^{-q}}{4} \cos p \mathcal{U} \frac{e^q + 2 \sin p + e^{-q}}{e^q - 2 \sin p + e^{-q}} - \frac{e^q + e^{-q}}{2} \sin p \text{Arc tg} \left(\frac{2 \cos p}{e^q - e^{-q}} \right).$$

19. Lisez $\mathcal{U} \frac{e^q + \sqrt{2} + e^{-q}}{e^q - \sqrt{2} + e^{-q}}$ au lieu de $\mathcal{U} \frac{e^q + e^{-q} + 2}{e^q + e^{-q} - \sqrt{2}}$.

21. ----- $\frac{e^q + e^{-q}}{2}$ ----- $\frac{e^q - e^{-q}}{2}$.

35 est fautive. Elle proviendrait, si l'on soustrairait N:o 27 de N:o 4, mais alors je trouve

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{\pi x} + e^{-\pi x}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} \cdot \frac{\cos qx}{x(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} + \frac{q}{2} e^{-q} + \frac{e^q + e^{-q}}{2} \mathcal{U}(1 - e^{-q}) - \mathcal{U} \left(e^{\frac{q}{2}} - e^{-\frac{q}{2}} \right);$$

mais comme on a

$$\mathcal{U} \left(e^{\frac{q}{2}} - e^{-\frac{q}{2}} \right) = \frac{q}{2} + \mathcal{U}(1 - e^{-q}),$$

il vient

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{\pi x} + e^{-\pi x}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} \cdot \frac{\cos qx}{x(1+x^2)} dx = \frac{1}{2}(1 - q + qe^{-q}) + \frac{1}{2} \left(e^{\frac{q}{2}} - e^{-\frac{q}{2}} \right)^2 \mathcal{U}(1 - e^{-q}).$$

Il faut donc effacer le diviseur $1 - e^{-q}$.

Tab. 397.

1, 2 sont fautives. Lisez

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\frac{1}{2}} \sin x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{5}{4}}} \cdot \sin \frac{3\pi}{8},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\frac{1}{2}} \cos x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{5}{4}}} \cdot \cos \frac{3\pi}{8}.$$

Elles sont des cas particuliers de Tab. 386 N:o 1 et 2.

Tab. 398.

9, 10 sont des cas particuliers de Tab. 386 N:o 12 et 13, mais il n'y a pas de raison pour mettre $\sin \beta = -\frac{q \sin \lambda}{r}$;

on peut aussi bien poser $\sin \beta = \frac{q \sin \lambda}{r}$ et on trouve alors

$$\text{N:o 9} = \sin \frac{1}{2} \beta \sqrt{\frac{\pi}{r}}.$$

11, 12 sont fautives. Le mieux est de les remplacer par les formules plus générales

$$\int_0^{\infty} e^{-(r^2 x + \frac{q^2}{x})} \sin p x dx = e^{-2q\lambda} (\mu \cos 2q\mu + \lambda \sin 2q\mu) \sqrt{\frac{\pi}{r^4 + p^2}}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-(r^2 x + \frac{q^2}{x})} \cos p x dx = e^{-2q\lambda} (\lambda \cos 2q\mu - \mu \sin 2q\mu) \sqrt{\frac{\pi}{r^4 + p^2}}$$

où l'on a

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{r^4 + p^2 + r^2})}, \quad \mu = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{r^4 + p^2} - r^2)}.$$

Voyez l'Exposé pag. 451.

Tab. 399.

1 à 16. M:r B. d. H. revoque en doute ces formules, exceptées N:o 1 et N:o 9; je suis d'avis que toutes ensemble sont fautives, car elles sont des cas particuliers des formules Tab. 386 N:o 12 et 13 dans lesquelles il faut que a soit > 0 .

Tab. 400.

1, 2. Je n'ai pas pu trouver ces formules. Si en Tab. 286 N:o 13 et 14 on pose

$p = p$, $q = -2q \operatorname{Cós} \lambda$, $r = 0$, $s = 0$, $t = 2q \operatorname{Sin} \lambda$, $u = -\lambda$,
on aura

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-px^2 + 2qx \operatorname{Cos} \lambda} \operatorname{Sin} (-\lambda + 2qx \operatorname{Sin} \lambda) dx \\ = e^{\frac{q^2}{p} \operatorname{Cos} 2\lambda} \operatorname{Sin} \left(-\lambda + \frac{q^2}{p} \operatorname{Sin} 2\lambda \right) \sqrt{\frac{\pi}{p}}; \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-px^2 + 2qx \operatorname{Cos} \lambda} \operatorname{Cos} (-\lambda + 2qx \operatorname{Sin} \lambda) dx \\ = e^{\frac{q^2}{p} \operatorname{Cos} 2\lambda} \operatorname{Cos} \left(-\lambda + \frac{q^2}{p} \operatorname{Sin} 2\lambda \right) \sqrt{\frac{\pi}{p}}. \end{aligned}$$

En différentiant par rapport à q , on aura

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-px^2 + 2qx \operatorname{Cos} \lambda} \operatorname{Sin} (2qx \operatorname{Sin} \lambda) \cdot x dx \\ = \frac{q}{p} e^{\frac{q^2}{p} \operatorname{Cos} 2\lambda} \operatorname{Sin} \left(\lambda + \frac{q^2}{p} \operatorname{Sin} 2\lambda \right) \sqrt{\frac{\pi}{p}}, \quad (a) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-px^2 + 2qx \operatorname{Cos} \lambda} \operatorname{Cos} (2qx \operatorname{Sin} \lambda) \cdot x dx \\ = \frac{q}{p} e^{\frac{q^2}{p} \operatorname{Cos} 2\lambda} \operatorname{Cos} \left(\lambda + \frac{q^2}{p} \operatorname{Sin} 2\lambda \right) \sqrt{\frac{\pi}{p}}. \end{aligned}$$

C'est précisément les formules du texte, excepté le facteur π . Je ne sais pas d'où il vient.

3. On l'aura en posant $\lambda = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{q}{2}$ au lieu de q dans la formule (a) ci-dessus.

4 est atteinte d'une grave faute d'impression, car il faut lire $a + 1$ au lieu de $a + i$. Pour le prouver je vais chercher l'intégrale ($= J$) même. Puisque on a

$$(2 \operatorname{Cos} x)^{a-1} = (e^{xi} + e^{-xi})^{a-1} = \frac{(1 + e^{2xi})^{a-1}}{e^{(a-1)xi}},$$

on trouve

$$\begin{aligned}
 J &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2xi} (1 + e^{2xi})^{a-1} \cdot x dx \\
 &= \sum_{r=1}^{r=a} (a-1)_{r-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2rxi} \cdot x dx = \frac{\pi i}{2} \sum_{r=1}^{r=a} \frac{(-1)^{r-1}}{r} (a-1)_{r-1}.
 \end{aligned}$$

Posons

$$s = \sum_{r=1}^{r=a} \frac{(-1)^{r-1}}{r} (a-1)_{r-1} \cdot y^r;$$

en différentiant on trouvera

$$\frac{ds}{dy} = \sum_{r=1}^{r=a} (-1)^{r-1} (a-1)_{r-1} y^{r-1} = (1-y)^{a-1}$$

et en intégrant

$$s = \frac{1 - (1-y)}{a} \quad \left(\text{Const.} = \frac{1}{a} \right)$$

Si l'on pose $y = 1$, on trouve

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{(a+1)xi} (2 \cos x)^{a-1} \cdot x dx = \frac{\pi i}{2a}.$$

Tab. 401.

17. Je trouve

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\infty} \frac{(e^{2\pi x} - 1)(x^2 - q^2) + 2\pi x e^{2\pi x}(x^2 + q^2)}{(e^{2\pi x} - 1)^2(q^2 + x^2)^2} \cdot \text{Arc tg } \frac{x}{q} dx \\
 &= \frac{1}{4q^3} \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{B_{2r+1}}{q^{2r}}.
 \end{aligned}$$

Tab. 403.

7, 8 proviennent de Tab. 279 N:o 3 et 4 et peuvent avoir une forme plus courte. Voyez les dites formules.

11. Lisez $\text{Cot} \left(ql \frac{1}{x} \right)$ au lieu de $\text{Cot} (qlx)$.

12, 13 sont fautives comme Tab. 279 N:o 18 et 19 dont elles dérivent. Lisez

$$\begin{aligned} \int_0^1 \text{Sin} (qlx)^2 x^{2p-1} dx &= \frac{\sqrt{2\pi}}{4q} \left(\text{Cos} \left(\frac{p^2}{q^2} \right) + \text{Sin} \left(\frac{p^2}{q^2} \right) \right) \\ &- \frac{1}{q} \left[\text{Cos} \left(\frac{p^2}{q^2} \right) \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(2r+1)} \cdot \frac{\left(\frac{p}{q} \right)^{4r+1}}{4r+1} \right. \\ &\left. + \text{Sin} \left(\frac{p^2}{q^2} \right) \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\Gamma(2r)} \cdot \frac{\left(\frac{p}{q} \right)^{4r-1}}{4r-1} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \text{Cos} (qlx)^2 x^{2p-1} dx &= \frac{\sqrt{2\pi}}{4q} \left(\text{Cos} \left(\frac{p^2}{q^2} \right) - \text{Sin} \left(\frac{p^2}{q^2} \right) \right) \\ &+ \frac{1}{q} \left[\text{Sin} \left(\frac{p^2}{q^2} \right) \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(2r+1)} \cdot \frac{\left(\frac{p}{q} \right)^{4r+1}}{4r+1} \right. \\ &\left. - \text{Cos} \left(\frac{p^2}{q^2} \right) \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\Gamma(2r)} \cdot \frac{\left(\frac{p}{q} \right)^{4r-1}}{4r-1} \right]. \end{aligned}$$

14, 15 proviennent de N:o 12 et 13 et sont fautives avec celles-ci. Lisez

$$\begin{aligned} \int_0^1 \text{Sin} (p^2 - (lx)^2) x^{2p-1} dx &= -\frac{\sqrt{2\pi}}{4} + \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(2r+1)} \cdot \frac{p^{4r+1}}{4r+1} \\ \int_0^1 \text{Cos} (p^2 - (lx)^2) x^{2p-1} dx &= \frac{\sqrt{2\pi}}{4} - \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\Gamma(2r)} \cdot \frac{p^{4r-1}}{4r-1}. \end{aligned}$$

16 est déduite de Tab. 280 N:o 21 selon l'indication, mais elle n'en provient pas à moins qu'on n'y lise e^{-bx} . Voyez Tab. 280 N:o 21 ci-dessus.

Tab. 404.

- 5 est déduite de Tab. 282 N:o 15 tel que PLANA l'a donnée, mais je trouve

$$\int_0^1 \frac{\text{Sin}(p\mathfrak{L}x) \cdot x^{q-1}}{1-x} dx = - \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{p}{p^2 + (q+r)^2}.$$

7. Ajoutez: $p < 1$.

- 14 est fautive avec Tab. 391 N:o 6. Lisez

$$\int_0^1 \text{Cos}(p\mathfrak{L}x) \cdot \frac{\mathfrak{L}x}{1-x^2} \cdot dx = -\frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{e^{p\pi}}{(e^{p\pi} + 1)^2}.$$

- 16 est déduite de Tab. 282 N:o 13 (non N:o 14): il faut lire x^{q-1} au lieu de x^{q+1} .

- 21 provient de N:o 11.

Tab. 405.

- 6 est à mon avis indéterminée. En posant $x = e^{-\frac{y}{p}}$ on aura

$$\int_0^1 \frac{\text{Cos}(q\mathfrak{L}x)}{(1+x^p)^2} \cdot x^{p-1} dx = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} \frac{\text{Cos}\left(\frac{qy}{p}\right)}{(1+e^{-y})^2} \cdot e^{-y} dy;$$

en intégrant par parties on trouve

$$\int \frac{\text{Cos} \frac{py}{p}}{(1+e^{-y})^2} \cdot e^{-y} dy = \frac{\text{Cos} \frac{py}{p}}{1+e^{-y}} + \frac{q}{p} \int \frac{\text{Sin} \frac{qy}{p}}{1+e^{-y}} dy.$$

Quand on introduit les limites, la dernière intégrale devient finie, mais le terme intégré indéterminé.

10. Lisez 1 au lieu de $\mathfrak{L}x$ en le numérateur. Voyez Tab. 284 N:o 1.

Tab. 406.

- 4 est fautive: lisez $pq + rs$ au lieu de $pq - rs$.
11, 12 peuvent être remplacées (Voy. Tab. 394 N:o 11) par

$$\int_0^1 \frac{x^{q-1} \operatorname{Sin} \left(r \sqrt{\frac{1}{x}} \right)}{\left(\sqrt{\frac{1}{x}} \right)^{1-p}} \cdot dx = \frac{\Gamma(p)}{(q^2 + r^2)^{\frac{p}{2}}} \operatorname{Sin} \left(p \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{r}{q} \right)$$

$$\int_0^1 \frac{x^{q-1} \operatorname{Cos} \left(r \sqrt{\frac{1}{x}} \right)}{\left(\sqrt{\frac{1}{x}} \right)^{1-p}} \cdot dx = \frac{\Gamma(p)}{(q^2 + r^2)^{\frac{p}{2}}} \operatorname{Cos} \left(p \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{r}{q} \right).$$

$$p < 1.$$

Tab. 407.

5 dérive de Tab. 280 N:o 10 en y posant x au lieu de e^{-x^2} , mais alors je trouve

$$\int_0^1 x^{q-1} \operatorname{Sin} \left(p \sqrt{\frac{1}{x}} \right) \cdot \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x}}} = 2 \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^r}{(r+2)^{r+1/4}} \cdot \frac{p^{2r+1}}{q^{r+1}}.$$

On peut bien avoir la valeur du texte, mais en ce cas il faut mettre x^{q^2-1} à gauche au lieu de x^{q-1} .

6. Même remarque.

7 provient de Tab. 280 N:o 22. Par la formule que j'y ai proposée on trouve

$$\int_0^1 \operatorname{Cot} \left(p \sqrt{\frac{1}{x}} \right) \cdot \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x}}} = 2p \sqrt{\pi} \sum_{r=1}^{r=\infty} e^{-(rp)^2}.$$

Tab. 408.

21 est fautive avec Tab. 396 N:o 35. Lisez

$$-\frac{1 - p\pi + p\pi e^{-p\pi}}{2\pi^2} \text{ au lieu de } -\frac{1 - p\pi + p\pi e^{-p\pi}}{2\pi^2(1 - e^{-p\pi})}.$$

Tab. 409.

1 est fautive avec Tab. 396 N:o 5. Lisez

$$\int_0^1 \frac{\sin(2p\mathfrak{L}x)}{\pi^2 + (\mathfrak{L}x)^2} \cdot \frac{\mathfrak{L}x}{1+x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{\pi e^{-p\pi}}{2\sqrt{2}} + \frac{e^{p\pi} - e^{-p\pi}}{4\sqrt{2}} \left[\frac{e^{p\pi} + \sqrt{2} + e^{-p\pi}}{e^{p\pi} - \sqrt{2} + e^{-p\pi}} \right. \\ \left. - \frac{e^{p\pi} + e^{-p\pi}}{2\sqrt{2}} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{2}}{e^{p\pi} - e^{-p\pi}} \right) \right].$$

6 est fautive avec Tab. 396 N:o 16. Lisez

$$\int_0^1 \frac{\sin(p\mathfrak{L}x)}{\pi^2 + (\mathfrak{L}x)^2} \cdot \frac{x^2 - x^{-q}}{1-x} \cdot \frac{\mathfrak{L}x}{\sqrt{x}} dx = -\frac{\pi e^{-p\pi}}{2} \sin q\pi \\ + \frac{e^{p\pi} + e^{-p\pi}}{2} \sin q\pi \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left(\frac{2 \cos q\pi}{e^{p\pi} - e^{-p\pi}} \right) \\ - \frac{e^{p\pi} - e^{-p\pi}}{4} \cos q\pi \mathfrak{L} \frac{e^{p\pi} + 2 \sin q\pi + e^{-p\pi}}{e^{p\pi} - 2 \sin q\pi + e^{-p\pi}}, \quad q^2 < \frac{1}{4}.$$

9. Lisez $\frac{dx}{x}$ au lieu de $\frac{dx}{\sqrt{x}}$

11. Une faute est corrigée, mais deux restent. Lisez

$$\frac{dx}{x}, \mathfrak{L} \frac{e^{p\pi} - 1}{e^{p\pi} + 1} \text{ au lieu de } \frac{dx}{\sqrt{x}}, \mathfrak{L} \frac{1 + e^{-p\pi}}{1 - e^{-p\pi}}.$$

12. Divisez le membre droit par 2.

13 est juste après une correction de Mr B. d. H., mais pour plus de clarté j'ajoute que le membre droit est $= 1 - \frac{\pi}{2} e^{-p\pi} \cos q\pi + \text{etc.}$

Tab. 410.

1 est fautive non seulement parce qu'elle est déduite d'une formule fautive Tab. 238 N:o 19, mais elle a aussi une faute propre. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{p-1} \mathfrak{L} \sin x dx = -\frac{1}{2p} \left(\frac{\pi}{4} \right)^p \left[\mathfrak{L} 2 + 2 - \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{S_{2r}}{p+2r} \cdot \frac{1}{4^{2r-1}} \right].$$

$$10. \text{ Lisez } \frac{3-\pi}{16\pi} \text{ au lieu de } \frac{\pi-3}{16}.$$

$$11. \text{ ----- } \frac{l^2-1}{64\pi} \text{ ----- } \frac{1-l^2}{64}.$$

Tab. 411.

1 est fautive avec Tab. 238 N:o 18. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{p-1} \text{Sin } x dx = -\frac{1}{p} \left(\frac{\pi}{2} \right)^p \left[\frac{1}{p} - 2 \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{S_{2r}}{p+2r} \cdot \frac{1}{4^r} \right].$$

3. est fautive. Lisez

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{p-1} \text{U}(1 - \text{Cos } x) dx = -\frac{1}{p} \left(\frac{\pi}{2} \right)^p \left[\frac{2}{p} - \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{S_{2r}}{p+2r} \cdot \frac{1}{4^{2r-1}} \right].$$

6. Lisez 2^{a+1} au lieu de 2^a .

9. Lisez $\sqrt{(1-p^2 \text{Sin}^2 x)^3}$ au lieu de $\sqrt{(1-p^2 \text{Sin}^2 x)^3}$.

$$14. \text{ ----- } l \frac{p}{4(1-p^2)} \text{ ----- } l \frac{p}{2(1-p^2)}.$$

$$15. \text{ ----- } \frac{2x}{p^2} \text{ ----- } \frac{\pi}{p^2}.$$

17. En intégrant par parties on trouve

$$\int \frac{\text{Cos } x dx}{\sqrt{l} \text{Cosec } x} = \frac{x \text{Cos } x}{\sqrt{l} \text{Cosec } x} + \frac{1}{2} \int \frac{2 \text{Sin}^2 x l \text{Cosec } x - \text{Cos}^2 x}{\text{Sin } x (l \text{Cosec } x)^{\frac{3}{2}}} \cdot x dx.$$

Lorsque on introduit les limites, on a

$$\frac{x \text{Cos } x}{\sqrt{l} \text{Cosec } x} = \pi \text{ pour } x = \frac{\pi}{2} \text{ et ensuite}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \text{Sin}^2 x l \text{Cosec } x - \text{Cos}^2 x}{(l \text{Cosec } x)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{x dx}{\text{Sin } x} = 2(\sqrt{\pi} - \pi).$$

Le texte a $2\sqrt{\pi} - \pi$.

Tab. 412.

3. En défaut du Journal de l'école polyt. je ne sais pas corriger cette formule, mais on voit qu'elle est fautive, puisque N:o 2 proviendrait en y posant $a = 0$, ce qui n'arrive point.

Tab. 413.

7. Lisez $\frac{2\alpha + 1}{2}$ au lieu de $\frac{2\alpha + 1}{1}$.
 8 à 15 sont déduites par Mr B. d. H. en différentiant par rapport à une constante, mais dans la formule qui a servi de point de départ, cette constante est un nombre entier, et la formule ne vaut qu'en cette hypothèse. Toutes ces formules sont donc fautives. Voyez Tab. 248 N:o 7 ci-dessus.

Tab. 414.

3. Ajoutez: $\infty > a > 0$.
 11 à 16. Je les trouve infinies.
 17, 18 s'obtiennent en différentiant Tab. 193 N:o 14, 15 par rapport à p , mais il faut qu'on ait $1 > p > 0$. Voyez MINDING, Int.-Tafeln pag. 158.
 19. Je la trouve indéterminée.

Tab. 415.

- 1 à 5. Dans ces formules il faut écrire $\mathcal{L} \sin^2$, $\mathcal{L} \cos^2$ sous le signe de l'intégration et π au lieu de $\frac{\pi}{2}$ dans le membre droit. (Voyez SCHLÖMILCH, Anal Studien II pag. 118.)
 9, 10 peuvent être trouvées par N:o 7 et N:o 6. Voyez la remarque sur N:o 1—5.

Tab. 416.

- 12, 13. Mr B. d. H. a remarqué que ces formules ne valent que pour $p^2 \leq 1$, et il en a parfaitement raison; mais si l'on soustrait N:o 11 de N:o 8 et réciproquement, on trouve deux formules qui valent pour $p > 1$.

Tab. 417.

1 à 4 sont comprisez en N:o 5 et N:o 6. Dans N:o 2 lisez $\frac{\pi}{4}$ au lieu de $\frac{\pi}{4q}$.

Tab. 418.

1, 2. On les aura, si dans Tab. 207 N:o 2 et 1 on change p avec q et qu'on différentie par rapport à q . M:r B. d. H. prétend que celles-ci sont infinies, je ne sais pour quoi.

Tab. 419.

4. Lisez $1 + pe^{-qr}$ au lieu de $(1 + p)e^{-qr}$.

Tab. 421.

12 est fautive. Selon LEGENDRE il faut lire

$$2x + \text{Cos } x l \frac{1 + \text{Sin } x}{1 - \text{Sin } x} \text{ au lieu de } 2x + l \frac{1 + \text{Sin } x}{1 - \text{Sin } x}.$$

Tab. 422.

10. Lisez $\pi l \text{Cot} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2} \right)$ au lieu de $\pi l \text{Cot} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2} \right)$

$$27. \text{-----} \sum_{r=0}^{r=\infty} \dots \text{-----} \sum_{r=1}^{r=\infty} \dots \text{ (V.T.158 N:o 1).}$$

28 ne provient pas de Tab. 152 N:o 13, comme il est indiqué, et je ne sais d'où elle dérive.

29. Je trouve

$$\int_0^1 \text{Arc tg } x \cdot \frac{(1-x^2)lx + 1 + x^2}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{4} l^2.$$

32. Lisez $-\frac{\pi}{8}$ au lieu de $-\frac{\pi}{16}$.

Tab. 423.

3. Ajoutez: $p < 1$.9. Je trouve $\frac{x dx}{1 - p^2 x^2}$, non $\frac{x dx}{(1 - p^2 x^2)^2}$.

11. Lisez

$$\int_0^1 \text{Arc Cos } x \cdot \frac{l(1 - p^2 x^2) - 2}{(1 - p^2 x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot x dx = \frac{l(1 - p^2)}{2p^2} \cdot F'(p).$$

17 provient de Tab. 165 N:o 24.

18. Voyez N:o 9 ci-dessus.

19. On peut écrire

$$\int_0^1 (\text{Arc Sin } x) l x \cdot \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi^2}{8} - L(1) = -0,5982306382.$$

Selon Tab. 257 N:o 2 et Tab. 259 N:o 3, 4 on trouve

$$20. \int_0^1 (\text{Arc Sin } x)^{p-1} \cdot \frac{l x \cdot dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{1}{p} \left(\frac{\pi}{2} \right)^p \left[\frac{1}{p} - 2 \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{S_{2\nu}}{p + 2\nu} \cdot \frac{1}{4^\nu} \right].$$

$$21. \int_0^1 (\text{Arc Cos } x)^{p-1} \cdot \frac{l(1+x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{p} \left(\frac{\pi}{2} \right)^p \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(4^\nu - 1) S_{2\nu}}{p + 2\nu} \cdot \frac{1}{4^{2\nu-1}} \Big].$$

$$22. \int_0^1 (\text{Arc Cos } x)^{p-1} \cdot \frac{l(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ = -\frac{1}{p} \left(\frac{\pi}{2} \right)^p \left[\frac{2}{p} - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{S_{2\nu}}{p + 2\nu} \cdot \frac{1}{4^{2\nu-1}} \right].$$

$$23. \int_0^1 (\text{Arc Cos } x)^{p-1} \cdot \frac{l(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ = -\frac{2}{p} \left(\frac{\pi}{2} \right)^p \left[\frac{1}{p} - \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{S_{2\nu}}{p + 2\nu} \cdot \frac{1}{2^{2\nu-1}} \right].$$

24 est fautive avec Tab. 261 N:o 24. Lisez

$$\int_0^1 l^x \cdot \left[p + \frac{x \operatorname{Arc Sin} x}{1-x^2} \right] \cdot \frac{(\operatorname{Arc Sin} x)^{p-1}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} \right)^p \left[\frac{1}{p} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{2^{2\nu}-1}{4^{2\nu-1}} \cdot \frac{S_{2\nu}}{p+2\nu} \right]$$

26. On peut écrire

$$\int_0^1 l(1+x^2) \left[2 \operatorname{Arc tg} x - \frac{x}{1+x^2} \right] \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2} L(1).$$

27 est fautive avec Tab. 260 N:o 20. Lisez

$$\int_0^1 l(1+x^2) \left[2 \operatorname{Arc tg} x - \frac{px}{1+x^2} \right] \frac{(\operatorname{Arc tg} x)^{p-1}}{x^3} dx$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} \right)^p \left[\frac{2}{p} - l2 - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{S_{2\nu}}{p+2\nu} \cdot \frac{1}{4^{2\nu-1}} \right].$$

28 est égale à $-2L(1)$.

29. Voyez Tab. 258 N:o 15 ci-dessus.

30. Je trouve $2\pi \operatorname{Sin}^2 \mu$ au lieu de 2π .

Tab. 424.

1. Lisez $l \frac{\pi}{4}$ au lieu de $l \frac{4}{\pi}$.

2 ne provient pas de Tab. 174 N:o 5, mais de Tab. 172 N:o 6, en y posant $p=1$ et par conséquent $q < 1$. On trouve donc

$$\int_0^1 \operatorname{Arc tg} x \cdot \frac{x^q - x^{-q} - q(x^q + x^{-q})lx}{x(lx)^2} dx = l \operatorname{tg} (1+q) \frac{\pi}{4} - \frac{q\pi}{2}.$$

8. Je trouve

$$\int_0^1 \operatorname{Arc Cot} x \cdot \frac{lx}{(q^2 + (lx)^2)^2} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$= -\frac{1}{8q} \left[\frac{\pi}{q} + Z \left(\frac{2q+3\pi}{4\pi} \right) - Z \left(\frac{2q+\pi}{4\pi} \right) \right].$$

11. Lisez $(1 + p)^2 - 4px^2$ au lieu de $(1 - p)^2 - 4px^2$.
 12. Même correction.
 14 est selon l'indication déduite de Tab. 412 N:o 7, mais alors il faut lire $\mathcal{L}(2x^2 - 1)$ ou plutôt

$$\int_0^1 \frac{\mathcal{L}(2x^2 - 1)^2}{(\text{Arc Cos } x)^2 + (\mathcal{L}x)^2} \cdot \frac{dx}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi}{4}.$$

Tab. 425.

3 est juste, mais je préfère d'écrire

$$\int_0^1 \text{Arc tg } x \left[\frac{1 - x^2}{1 + x^2} \cdot \mathcal{L}x + 1 \right] \cdot \frac{dx}{1 + x^2} = 0.$$

7. Je trouve

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \text{Arc tg } x \cdot \frac{[(p-1)x^p - (q-x)x^q] \mathcal{L}x - x^p + x^q}{(x\mathcal{L}x)^2} \cdot dx \\ = \mathcal{L} \left(\text{Cot } \frac{p\pi}{4} \text{ tg } \frac{q\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

8 est fautive, autant que j'en puis voir. Mr B. d. H. renvoie à Tab. 266 N:o 2 et à Tab. 182 N:o 2, mais il faut employer Tab. 182 N:o 6. La première donne

$$\int_0^\infty \mathcal{L}x [2x \text{ Arc tg } x - 1] \cdot \frac{dx}{(1 + x^2)^2} = \frac{\pi}{2} \mathcal{L}2$$

et Tab. 182 N:o 6, en posant $a = b = 1$, $p = 2$,

$$\int_0^\infty \frac{\mathcal{L}x dx}{(1 + x^2)^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

En additionnant et en divisant par 2 on aura

$$\int_0^\infty \mathcal{L}x \cdot \text{Arc tg } x \cdot \frac{x dx}{(1 + x^2)^2} = \frac{\pi}{2} (\mathcal{L}2 - \frac{1}{2}).$$

C'est selon moi la juste formule N:o 8.

13. On peut écrire

$$\int_0^{\infty} \mathcal{L}x [2x \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x - 1] \cdot \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = L(1).$$

14 est fautive. En intégrant par parties en Tab. 269 N:o 10 on aura

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \mathcal{L}x \cdot \left[\frac{x \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left(\frac{x\sqrt{p^2-1}}{\sqrt{1+x^2}} \right)}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\sqrt{p^2-1}}{1+p^2x^2} \right] \frac{dx}{1+x^2} \\ = \frac{\pi}{2} \mathcal{U}(p + \sqrt{p^2-1}), \quad p \geq 1; \end{aligned}$$

mais par Tab. 180 N:o 10 on trouve

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{p^2-1}}{(1+x^2)(1+p^2x^2)} \cdot \mathcal{L}x dx = -\frac{p\pi \cdot \mathcal{L}p}{2\sqrt{p^2-1}}, \quad p \geq 1$$

et en additionnant

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \mathcal{L}x \cdot x \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left(\frac{x\sqrt{p^2-1}}{\sqrt{1+x^2}} \right) \cdot \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ = \frac{\pi}{2} \left[\mathcal{U}(p + \sqrt{p^2-1}) - \frac{p\mathcal{L}p}{\sqrt{p^2-1}} \right], \quad p \geq 1. \end{aligned}$$

28 est fautive. Lisez

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \mathcal{L}(1+x^2) \left[2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x - \frac{px}{1+x^2} \right] (\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x)^{p-1} \cdot \frac{dx}{x} \\ = 2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^p \left[\frac{1}{p} - 2 \sum_{\nu=1}^{r=\infty} \frac{S_{2\nu}}{p+2\nu} \cdot \frac{1}{4^\nu} \right]. \end{aligned}$$

29. Lisez $-\frac{\pi}{2q^2} \mathcal{U}(1+p^2q^2)$. Il y a une discontinuité.

Tab. 426.

4. Lisez $\frac{lx}{p}$ au lieu de plx .

5 est fautive. Par la formule ajoutée à Tab. 366 N:o 3 ci-dessus on aura en posant $\frac{1}{x}$ au lieu de x

$$\int_1^{\infty} \text{Arc Cot } x \cdot lx \cdot \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{48} - \frac{1}{2}l2.$$

7. On peut écrire

$$\int_1^{\infty} lx [2x \text{ Arc tg } x - 1] \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{3\pi}{8}l2 - \frac{1}{4}L(1).$$

10 est fautive. Lisez

$$\int_0^{\infty} l(1+x^2) \left[2 \text{ Arc tg } x - \frac{x}{1+x^2} \right] \frac{dx}{x^3} = \pi l2 - \frac{1}{2}L(1).$$

Tab. 427.

1, 2 sont fautives: je trouve

$$\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} lx \cdot \frac{(\text{Arc Sin } x)^{p-1}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{2^p} \left(\frac{\pi}{4} \right)^p \left[-l2 - \frac{2}{p} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{S_{2\nu}}{p+2\nu} \cdot \frac{1}{4^{2\nu-1}} \right],$$

$$\int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{\infty} l(1-x^2) \cdot \frac{(\text{Arc Cos } x)^{p-1}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{p} \left(\frac{\pi}{4} \right)^p \left[-l2 - \frac{2}{p} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{S_{2\nu}}{p+2\nu} \cdot \frac{1}{4^{2\nu-1}} \right].$$

Outre la faute provenant de Tab. 238 N:o 19 celle-ci a la faute $l2$ au lieu de $-l2$.

Tab. 428.

3. Lisez $p > 0$ au lieu de $p < 1$.
 5. Ajoutez $1 \geq p \geq 0$.
-

Tab. 430.

- 1 à 18. Toutes ces formules sont obtenues en différentiant par rapport à une constante laquelle toujours est un nombre entier. En traitant Tab. 248 j'ai démontré qu'une telle différentiation n'est pas permise.
 19. Sa place est Tab. 370. Faute du journal de Crelle (7. 309) je ne peux pas comparer cette formule à l'originale, mais par les formules (115) et (116) pag. 190 de l'Exposé j'ai trouvé

$$\int_0^{\pi} (a^2 + 2ab \cos x + b^2)^{\frac{p}{2}} \cos \left(cx - p \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{a \sin x}{b + a \cos x} \right) dx \\ = \pi a^c b^{c-p} \cdot p_c, \quad (b > a, \quad p > c - 1)$$

conformément à la formule du texte, outre que celle-ci a $\sin bx$. Je crois donc qu'il faut lire $\sin x$ au lieu de $\sin bx$.

Tab. 432.

16. Lisez $\frac{1}{2}p + 1$ au lieu de $\frac{1}{2}p - 1$.
-

Tab. 433.

- 10 à 13. Mr B. d. H. a démontré (Voy. l'Exposé pag. 449) qu'il faut que b soit $= 0$ dans N:o 8 et 9. Commenant par ces formules un peu généralisées (Voy. l'Exposé (1203) et (1202)), savoir

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \left(p \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{q} \right)}{(q^2 + x^2)^{\frac{p}{2}}} \cdot \frac{x dx}{s^2 + x^2} = \frac{\pi}{2(q + s)^p} \quad \text{-----} \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \left(p \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{q} \right)}{(q^2 + x^2)^{\frac{p}{2}}} \cdot \frac{dx}{s^2 + x^2} = \frac{\pi}{2s(q+s)^p} \quad \text{-----} \quad (2)$$

il a déduit (Voy. l'Exposé pag. 572—574) les intégrales dont il s'agit ici, mais puisque j'y soupçonne une faute, je vais les déduire de nouveau, après avoir écrit ici quelques formules¹⁾ dont nous aurons besoin, savoir

$$D_s^a \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{(-1)^a \Gamma(a+1)}{s^{a+1}}, \quad \text{-----} \quad (A)$$

$$D_s^a \left(\frac{1}{(q+s)^p} \right) = \frac{(-1)^a \Gamma(p+a)}{\Gamma(p)(q+s)^{p+a}}, \quad \text{-----} \quad (B)$$

$$D_s^a \left(\frac{1}{s(q+s)^p} \right) = \frac{(-1)^a \Gamma(a+1)}{\Gamma(p)} \cdot \sum_{\nu=0}^{\nu=a} \frac{\Gamma(p+\nu)}{\Gamma(\nu+1) \cdot s^{a-\nu+1} (q+s)^{p+\nu}}, \quad (C)$$

$$D_s^a \left(\frac{s}{(q+s)^p} \right) = \frac{(-1)^a \Gamma(p+a-1) [(p-1)s - aq]}{\Gamma(p)(q+s)^{p+a}}, \quad \text{-----} \quad (D)$$

$$D_s^a \left(\frac{x}{s^2 + x^2} \right) = (-1)^a \Gamma(a+1) \cdot \frac{\sin \left[(a+1) \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{s} \right]}{(s^2 + x^2)^{\frac{1}{2}(a+1)}}, \quad \text{-----} \quad (E)$$

$$D_s^a \left(\frac{s}{s^2 + x^2} \right) = (-1)^a \Gamma(a+1) \cdot \frac{\cos \left[(a+1) \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{s} \right]}{(s^2 + x^2)^{\frac{1}{2}(a+1)}}. \quad \text{-----} \quad (F)$$

Par les formules (1), (E), (B) on trouve

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{\sin \left(p \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{q} \right) \sin \left[(a+1) \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{s} \right]}{(q^2 + x^2)^{\frac{1}{2}p} (s^2 + x^2)^{\frac{1}{2}(a+1)}} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Gamma(p+a)}{\Gamma(p)\Gamma(a+1)} \cdot \frac{1}{(q+s)^{p+a}}; \quad \text{-----} \quad (3) \end{aligned}$$

c'est N:o 1687 de l'Exposé et elle peut remplacer N:o 10 du texte.

¹⁾ Voyez SCHLÖMILCH, Diff.-Rechnung, Greifswald 1847, pag. 60, 63.

Par les formules (2), (F), (B) on aura

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \left(p \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{q} \right)}{(q^2 + x^2)^{\frac{1}{2}p}} \cdot \frac{\cos \left[(a+1) \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{s} \right]}{(s^2 + x^2)^{\frac{1}{2}(a+1)}} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Gamma(p+a)}{\Gamma(p)\Gamma(a+1)} \cdot \frac{1}{(q+s)^{p+a}} \quad \text{-----} \quad (4)$$

ou N:o 1686 de l'Exposé. Elle repondre au N:o 13 du texte.

Au lieu de (1) on peut écrire

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \left(p \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{q} \right)}{(q^2 + x^2)^{\frac{1}{2}p}} \cdot \frac{s}{s^2 + x^2} \cdot x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{s}{(q+s)^p} :$$

par les formules (F), (D) on trouve

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \left(p \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{q} \right)}{(q^2 + x^2)^{\frac{1}{2}p}} \cdot \frac{\cos \left[(a+1) \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{s} \right]}{(s^2 + x^2)^{\frac{1}{2}(a+1)}} x dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Gamma(p+a-1)}{\Gamma(p)\Gamma(a+1)} \cdot \frac{(p-1)s-aq}{(q+s)^{p+a}} \quad \text{-----} \quad (5)$$

Cette formule qui peut remplacer N:o 11 du texte, serait la formule (1695) de l'Exposé, mais celle-ci a $(p-1)s + aq$, ce qui probablement est une faute d'impression.

Si l'on écrit la formule (2) ainsi:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \left(p \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{q} \right)}{(q^2 + x^2)^{\frac{1}{2}p}} \cdot \frac{x}{s^2 + x^2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2s(q+s)^p},$$

on trouvera, en employant (E) et (C),

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \left(p \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{q} \right)}{(q^2 + x^2)^{\frac{1}{2}p}} \cdot \frac{\sin \left[(a+1) \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{s} \right]}{(s^2 + x^2)^{\frac{1}{2}(a+1)}} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{\pi}{2\Gamma(p)} \sum_{\nu=0}^{\nu=a} \frac{\Gamma(p+\nu)}{\Gamma(\nu+1)s^{a-\nu+1}(q+s)^{p+\nu}}. \quad \text{-----} \quad (6)$$

C'est la formule (1694) de l'Exposé et elle peut remplacer N:o 12 du texte.

14 est fautive: lisez $2^{a+1}r^a$ au lieu de $(2r)^{a+1}$.

16, 17 peuvent être trouvées comme il suit. Si dans N:o 4 du texte on pose $r = q$, $q = 1$, il vient

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \left(p \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{q} \right)}{(q^2 + x^2)^{\frac{1}{2}p}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2q^p}$$

qui coïncide avec form. (1204) de l'Exposé. Si l'on en soustrait la form. (1) ci-dessus (10 à 13), on aura, après avoir divisé par s ,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \left(p \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{q} \right)}{(q^2 + x^2)^{\frac{1}{2}p}} \cdot \frac{s}{s^2 + x^2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{sq^p} - \frac{1}{s(q+s)^p} \right].$$

À l'aide des formules (F), (A), (C) on trouvera

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \left(p \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{q} \right)}{(q^2 + x^2)^{\frac{1}{2}p}} \cdot \frac{\cos \left[(a+1) \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{s} \right]}{(s^2 + x^2)^{\frac{1}{2}(a+1)}} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{q^p s^{a+1}} - \frac{1}{\Gamma(p)} \sum_{\nu=0}^{\nu=a} \frac{\Gamma(p+\nu)}{\Gamma(\nu+1)s^{a-\nu+1}(q+s)^{p+\nu}} \right].$$

Cette formule diffère de la form. (1696) de l'Exposé à plus d'un titre.

Prenons la somme et la différence de cette formule et de la form. (6) ci-dessus (sous 10 à 13): nous aurons

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \left[p \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{q} + (a+1) \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{s} \right]}{(q^2 + x^2)^{\frac{1}{2}p} (s^2 + x^2)^{\frac{1}{2}(a+1)}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2q^p s^{a+1}}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{\sin \left[p \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{q} - (a+1) \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{s} \right]}{(q^2 + x^2)^{\frac{1}{2}p} (s^2 + x^2)^{\frac{1}{2}(a+1)}} \cdot \frac{dx}{x} \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{q^p s^{a+1}} - \frac{2}{\Gamma(p)} \sum_{\nu=0}^{\nu=a} \frac{\Gamma(p+\nu)}{\Gamma(\nu+1) s^{a-\nu+1} (q+s)^{p+\nu}} \right]. \end{aligned}$$

En prenant la différence et la somme de (4) et (3) ci-dessus (sous 10 à 13), on aura

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \left[p \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{q} + (a+1) \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{s} \right]}{(q^2 + x^2)^{\frac{1}{2}p} (s^2 + x^2)^{\frac{1}{2}(a+1)}} \cdot dx = 0,$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{\cos \left[p \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{q} - (a+1) \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{s} \right]}{(q^2 + x^2)^{\frac{1}{2}p} (s^2 + x^2)^{\frac{1}{2}(a+1)}} \cdot dx \\ &= \frac{\pi \Gamma(p+a)}{\Gamma(p) \Gamma(a+1)} \cdot \frac{1}{(q+s)^{p+a}}. \end{aligned}$$

La première de ces formules répond à la form. (16) du texte laquelle donc est fautive, et la troisième à N:o 17.

18, 19. Ajoutez $1 > q > -1$.

Tab. 436.

3, 4. Par les formules indiquées je trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{p \cos 2x} \cos x \cdot \cos (2x + p \sin 2x) dx = \frac{\pi}{4p} (1 - e^{-p}),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{p \cos 2x} l \sin x \cdot \cos (2x + p \sin 2x) dx = \frac{\pi}{4p} (1 - e^p).$$

Les facteur $l \sin x$, $l \cos x$ sont confondues dans le texte.

Tab. 437.

3 est fautive avec Tab. 289 N:o 4. La valeur est $= \frac{\Gamma(a)}{16p^a}$.

4. Il m'a été impossible d'obtenir cette formule. Je trouve

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \operatorname{tg} x \cdot e^{-q(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{Cot}^2 x)} \cdot \operatorname{tg}^{2a+1} x \cdot \frac{(2a+1) \sin^2 2x + 8q \cos 2x}{\sin^3 2x} dx \\ = -\frac{e^{-2q}}{4\sqrt{q}} \sum_{r=0}^{r=a} \frac{(a+r)2^r \Gamma(r+\frac{1}{2})}{q^r}. \end{aligned}$$

7. Lisez $\mp$ au lieu de $\pm$ dans le membre droit.

8. $\pm$ $\mp$

9 provient par l'addition de N:o 7 et 8. On trouve

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-p \operatorname{tg} x} l \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} \pm x \right) \cdot \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx \\ = \pm \frac{2}{p} \left[(1+p)e^{-p} Ei(p) - (1-p)e^p Ei(-p) \right]. \end{aligned}$$

14, 15 sont fautives avec Tab. 289 N:o 15 et 16.

18. Lisez $\sin^{3p+1} x$ au lieu de $\sin^{3p-1} x$.

21 est fautive. La valeur est $= \frac{1}{4} \Gamma(a)$.

22 est fautive. Lisez

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \operatorname{tg} x \cdot e^{-q(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{Cot}^2 x)} \cdot \frac{(2a+1) \sin^2 2x - 8q \cos 2x}{\operatorname{tg}^{2a+1} \sin^3 2x} dx \\ = \frac{e^{-2q}}{4\sqrt{q}} \sum_{r=0}^{r=a} \frac{(a+r)2^r \Gamma(r+\frac{1}{2})}{q^r}. \end{aligned}$$

25, 26 semblent fautives: au moins il m'a été impossible de les obtenir par Tab. 378 N:o 7 et 8.

Tab. 438.

- 7 ne provient pas de Tab. 293 N:o 16, mais de Tab. 136 N:o 14, en y posant d'abord $\operatorname{tg} x$ au lieu de x et puis en intégrant par parties.

Tab. 439.

4. Lisez $p \operatorname{tg} qx - 2q$ au lieu de $p \operatorname{tg} x - q$.
 14 est fautive dans l'original même (SCHLÖMILCH, Anal. Stud. I pag. 159 form. (4)). Selon CATALAN¹⁾ on a

$$U(1 - 2x \operatorname{Cos} q + x^2) = -2 \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{x^r}{r} \operatorname{Cos} rq$$

et par suite

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x^2} U(1 - 2p \operatorname{Cos} 2ax + p^2) dx &= -2 \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{p^r}{r} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \operatorname{Cos} 2arx dx \\ &= -\sqrt{\pi} \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{p^r}{r} e^{-a^2 r^2} \end{aligned}$$

par Tab. 280 N:o 1. Le signe est donc incorrect dans le texte. N:o 12 et 13 proviennent de N:o 14, en y posant $p = 1$ et $p = -1$ respectivement. Il faut donc mettre le signe — devant le membre droit de toutes les deux. Quant au N:o 13 cela convient avec la formule de SCHLÖMILCH (Stud. I pag. 160 form. (6)).

- 17 est fautive avec Tab. 396 N:o 5. La valeur est

$$\begin{aligned} &-2\pi e^{-q} \sqrt{2} - (e^q - e^{-q}) \sqrt{2} \operatorname{L} \frac{e^q + \sqrt{2} + e^{-q}}{e^q - \sqrt{2} - e^{-q}} \\ &+ 2(e^q + e^{-q}) \sqrt{2} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{2}}{e^q - e^{-q}} \right). \end{aligned}$$

Tab. 440.

2. Lisez e^{-a} au lieu de e^{-q} .
 4, 5 sont déduites de Tab. 446 N:o 27 et 28.

¹⁾ Voyez Traité élém. des séries. Paris 1860, pag. 105 form. (A).

Tab. 446.

1. La limite supérieure est omise, mais à cause de Tab. 404 N:o 7 dont l'intégrale est déduite, je conjecture que la dite limite est $= 1$. Le calcul montre que cela est juste. Ajoutez $p < 1$.
2. En posant $\frac{p}{2}$ au lieu de p dans Tab. 406 N:o 15 on aura

$$\int_0^1 \frac{\sin(plx)}{lx} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arc tg}(e^{\frac{1}{2}p\pi})$$

et en intégrant par parties

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin(plx)}{lx} \cdot \frac{dx}{1+x^2} &= \frac{\sin(plx)}{lx} \text{Arc tg } x \\ &\quad - \int \text{Arc tg } x \cdot \frac{plx \cos(plx) - \sin(plx)}{(lx)^2} \cdot \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

Si l'on introduit les limites, on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^1 \text{Arc tg } x \cdot \frac{plx \cos(plx) - \sin(plx)}{(lx)^2} \cdot \frac{dx}{x} \\ = \int_0^1 \text{Arc tg } x \cdot \frac{\sin(plx)}{lx} - \text{Arc tg}(e^{\frac{1}{2}p\pi}); \end{aligned}$$

pour $x = 1$ la fraction $\frac{\sin(plx)}{lx}$ devient $= \frac{0}{0}$, mais par la méthode ordinaire on la trouve $= p$, et par suite

$$\begin{aligned} \int_0^1 \text{Arc tg } x \cdot \frac{plx \cos(plx) - \sin(plx)}{(lx)^2} \cdot \frac{dx}{x} \\ = \frac{p\pi}{4} - \text{Arc tg}(e^{\frac{1}{2}p\pi}). \end{aligned}$$

Le premier terme est donc $\frac{p\pi}{4}$, non $\frac{p\pi}{2}$.

- 11 provient de Tab. 439 N:o 10 (non de Tab. 431 N:o 10). Lisez $+ 12$ au lieu de $- 12$.

Le défaut des écrits originaux a empêché l'examen des intégrales suivantes

Tab.	N:o.	Tab.	N:o.
30	8, 9	247	27
40	19, 20, 25—27	249	24
61	6, 7, 11—17	252	7, 8
80	11	277	8, 9
111	1—4	279	15
112	12	280	22
116	3	283	4—12
131	3	285	18
135	18	293	1—5
139	5	297	7
149	1	298	15, 16; 17, 18
150	8—10	355	5
168	19, 20	378	4
171	13	387	2—5
186	5—8	390	13, 14, 17—20
189	6, 7	399	17, 18
202	12—29; 31—38	400	5
»	40; 41	412	6—12
210	3, 4	418	1—3
220	10—13	419	1—6
230	1, 7	420	
232	8, 9	432	9—12
233	8, 9	440	1
234	3, 6, 7	445	14—17
235	8, 9	446	16, 17; 21—23
236	9, 10	»	26—28
241	26		

Corrections :

Page	ligne	Au lieu de	lisez
7	9	pus	pu
8	3	d'évanouissent	s'évanouissent
24	17	conjugées	conjuguées
35	4	$p < 1$	$p > 1$
—	7	Cauchy	CAUCHY
42	1	$\sqrt{\frac{\cos^2 x - p^2 \sin^2 x}{\cos^2 x}}$	$\sqrt{\frac{\cos^2 x - p^2 \sin^2 x}{\cos 2x}}$
43	8, 9	$x dx$	$x dx$
56	15	$(r) - f(-r)$	$f(r) - f(-r)$
57	6	d'en	en
71	5	$\frac{p^2}{p^2 - q^2}$	$\frac{p^2}{p^2 - q^2}$
80	11	est fautive	5 est fautive
85	17	q'on	qu'on
101	3	$x^r + \beta - r$	$x^r + \beta - \mu$
—	10	connue	connue ¹⁾
128	2	sert rien	sert à rien
129	3	quatorse	quatorze
138	5	$\int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1-x^{2\lambda}} \int_0^1, \quad \frac{d\omega}{dx}$	$\int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1-x^{2\lambda}} dx \int_0^{\omega}, \quad \frac{dx}{dx}$
142	11	$\frac{1}{2}U(1-x), \quad U(1-x)$	$\frac{1}{2}U(1-x^2), \quad U(1-x^2)$
157	5	$a(\cos 2r - 1)\frac{\pi}{2b}$	$a \cos(2r - 1)\frac{\pi}{2b}$
162	1	i	Si
166	13	$\frac{x}{\sqrt{x}}$	$\frac{dx}{\sqrt{x}}$
173	3	$x^2 x$	$x^2 dx$
198	6	4^r	4^{2r-1}
210	17	$\int_0^1$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}}$

En outre, il y a quelques fautes d'accent que le lecteur voudra bien excuser.

SUR
LA SOMMATION DES PUISSANCES SEMBLABLES
DES
N PREMIERS NOMBRES ENTIERS.

PAR
C. O. BOIJE AF GENNÄS

COMMUNIQUÉ À L'ACADÉMIE ROY. DES SCIENCES DE SUÈDE LE 12 NOVEMBRE 1884.

STOCKHOLM. 1885
KONGL. BOKTRYCKERIET.
P. A. NORSTEDT & SÖNER

A l'aide de la formule du binôme de NEWTON on a

$$\begin{aligned}
 (n+1)^{p+2} - n^{p+2} &= \frac{p+2}{\underline{1}} \cdot n^{p+1} + \frac{(p+2)(p+1)}{\underline{2}} \cdot n^p \\
 &\quad + \frac{(p+2)(p+1)p}{\underline{3}} \cdot n^{p-1} + \dots \\
 n^{p+2} - (n-1)^{p+2} &= \frac{p+2}{\underline{1}} \cdot (n-1)^{p+1} + \frac{(p+2)(p+1)}{\underline{2}} \cdot (n-1)^p \\
 &\quad + \frac{(p+2)(p+1)p}{\underline{3}} \cdot (n-1)^{p-1} + \dots \\
 3^{p+2} - 2^{p+2} &= \frac{p+2}{\underline{1}} \cdot 2^{p+1} + \frac{(p+2)(p+1)}{\underline{2}} \cdot 2^p \\
 &\quad + \frac{(p+2)(p+1)p}{\underline{3}} \cdot 2^{p-1} + \dots \\
 2^{p+2} - 1^{p+2} &= \frac{p+2}{\underline{1}} \cdot 1^{p+1} + \frac{(p+2)(p+1)}{\underline{2}} \cdot 1^p \\
 &\quad + \frac{(p+2)(p+1)p}{\underline{3}} \cdot 1^{p-1} + \dots
 \end{aligned}$$

Alors, en ajoutant entre elles les égalités précédentes, on aura

$$\begin{aligned}
 (n+1)^{p+2} - 1 &= \frac{p+2}{\underline{1}} \sum k^{p+1} + \frac{(p+2)(p+1)}{\underline{2}} \sum k^p \\
 &\quad + \frac{(p+2)(p+1)p}{\underline{3}} \sum k^{p-1} + \dots \dots \quad (\text{I})
 \end{aligned}$$

le signe $\sum$ s'étendant aux valeurs de k

$$1, 2, 3, \dots, (n-1), n$$

En partant de la formule

$$n^{p+2} - (n-1)^{p+2} = \frac{p+2}{\underline{1}} \cdot n^{p+1} - \frac{(p+2)(p+1)}{\underline{2}} \cdot n^p \\ + \frac{(p+2)(p+1)p}{\underline{3}} \cdot n^{p-1} - \dots$$

nous obtenons de la même manière

$$n^{p+2} = \frac{p+2}{\underline{1}} \sum k^{p+1} - \frac{(p+2)(p+1)}{\underline{2}} \sum k^p \\ + \frac{(p+2)(p+1)p}{\underline{3}} \sum k^{p-1} - \dots \quad (\text{II})$$

Maintenant nous avons

$$n^s (n+1)^{p-s+2} = (n+1)^{p-s+2} \left[(n+1)^s - \frac{s}{\underline{1}} (n+1)^{s-1} \right. \\ \left. + \frac{s(s-1)}{\underline{2}} (n+1)^{s-2} - \dots \right] = (n+1)^{p+2} - \frac{s}{\underline{1}} (n+1)^{p+1} \\ + \frac{s(s-1)}{\underline{2}} (n+1)^p - \frac{s(s-1)(s-2)}{\underline{3}} (n+1)^{p-1} + \dots$$

et à cause de l'identité

$$1 - \frac{s}{\underline{1}} + \frac{s(s-1)}{\underline{2}} - \frac{s(s-1)(s-2)}{\underline{3}} + \dots = 0$$

il nous vient en posant pour abrégé

$$(n+1)^r - 1 = \alpha_r$$

$$n^s (n+1)^{p-s+2} = \alpha_{p+2} - \frac{s}{\underline{1}} \alpha_{p+1} \\ + \frac{s(s-1)}{\underline{2}} \alpha_p - \frac{s(s-1)(s-2)}{\underline{3}} \alpha_{p-1} + \dots \quad (\text{III})$$

En écrivant pour plus de conformité

$$n^r = \beta_r$$

nous avons aussi

$$n^{p-s+2} (n+1)^s = \beta_{p+2} + \frac{s}{\underline{1}} \beta_{p+1} + \frac{s(s-1)}{\underline{2}} \beta_p + \frac{s(s-1)(s-2)}{\underline{3}} \beta_{p-1} + \dots \quad (\text{IV})$$

Des équ. (I) et (II) on trouve alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[n^s (n+1)^{p-s+2} - n^{p-s+2} (n+1)^s \right] \\ = (\alpha_{p+2} - \beta_{p+2}) - \frac{s}{\underline{1}} (\alpha_{p+1} + \beta_{p+1}) + \frac{s(s-1)}{\underline{2}} (\alpha_p - \beta_p) \\ - \frac{s(s-1)(s-2)}{\underline{3}} (\alpha_{p-1} + \beta_{p-1}) + \dots \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[n^s (n+1)^{p-s+2} - n^{p-s+2} (n+1)^s \right] = \\ - \left[\frac{(p+2)(p+1)}{\underline{2}} - \frac{s}{\underline{1}} \cdot \frac{p+1}{\underline{1}} \right] \sum k^p + \left[\frac{(p+2)(p+1)p(p-1)}{\underline{4}} - \right. \\ \left. - \frac{s}{\underline{1}} \cdot \frac{(p+1)p(p-1)}{\underline{3}} + \frac{s(s-1)}{\underline{2}} \cdot \frac{p(p-1)}{\underline{2}} - \frac{s(s-1)(s-2)}{\underline{2}} \cdot \frac{p-1}{\underline{1}} \right] \sum k^{p-2} \\ + \left[\frac{(p+2)(p+1)p(p-1)(p-2)(p-3)}{\underline{6}} - \frac{s}{\underline{1}} \cdot \frac{(p+1)p(p-1)(p-2)(p-3)}{\underline{5}} \right. \\ + \frac{s(s-1)}{\underline{2}} \cdot \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{\underline{4}} - \frac{s(s-1)(s-2)}{\underline{3}} \cdot \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{\underline{3}} \\ + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{\underline{4}} \cdot \frac{(p-2)(p-3)}{\underline{2}} - \\ \left. - \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)}{\underline{5}} \cdot \frac{p-3}{\underline{1}} \right] \sum k^{p-4} + \dots \end{aligned}$$

Les expressions entre les parenthèses pouvant être réduites, notre formule enfin prend la forme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[n^s (n+1)^{p-s+2} - n^{p-s+2} (n+1)^s \right] &= \frac{(p-s+2)(p-s+1)-s(s-1)}{\underline{2}} \sum k^p \\ &+ \frac{(p-s+2)(p-s+1)(p-s)(p-s-1)-s(s-1)(s-2)(s-3)}{\underline{4}} \sum k^{p-2} \\ &+ \frac{(p-s+2)(p-s+1)\dots(p-s-3)-s(s-1)\dots(s-5)}{\underline{6}} \sum k^{p-4} + \dots \quad (\text{V}) \end{aligned}$$

Pour $p = 2s$ on trouve comme cas spécial

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} n^s (n+1)^s (2n+1) &= \frac{2s+1}{\underline{1}} \sum k^{2s} + \frac{(2s-1)s(s-1)}{\underline{3}} \sum k^{2s-2} \\ &+ \frac{(2s-3)s(s-1)(s-2)(s-3)}{\underline{5}} \sum k^{2s-4} + \dots \quad (\text{VI}) \end{aligned}$$

et pour $p = 2s - 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} n^s (n+1)^s &= \frac{s}{\underline{1}} \sum k^{2s-1} + \frac{s(s-1)(s-2)}{\underline{3}} \sum k^{2s-3} \\ &+ \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)}{\underline{5}} \sum k^{2s-5} + \dots \quad (\text{VII}) \end{aligned}$$

De ces deux formules il est aisé de voir que chaque somme d'ordre pair est divisible par $n(n+1)(2n+1)$, tandis que les sommes d'ordre impair sont divisibles par $n(n+1)$ seulement; et, comme $\sum k^3$ est divisible par $n^2(n+1)^2$, toutes les sommes suivantes d'ordre impair seront divisibles par la même expression (Voir LUCAS — Recherches sur l'analyse indéterminée et l'arithmétique de Diophante).

Des expressions (V), (VI) et (VII) on pourrait déduire des autres formules nous permettant de calculer les sommes plus rapidement encore, mais comme ces formules deviennent un peu compliquées, nous les avons omises ici.

Göteborg, Juin 1884.

ÖFVER

RADIKALEN CYANUR OCH DESS FÖRENING

MED

HALOIDERNA.

AF

PETER CLAËSSON.

MEDDELADT DEN 10 DECEMBER 1884.



STOCKHOLM, 1885.

KONGL. BOKTRYCKERIET.

P. A. NORSTEDT & SÖNER.

I sitt epokgörande arbete öfver blåsyran erhöLL GAY-LÜSSAC genom inverkan af klor på denna syra, löst i vatten, en gas, som han kallade »acide chloro-cyanique.» Studiet af denna förening fortsattes 12 år sednare (1827) af SERULLAS (Ann. ch. phys. [2] 35 p. 291. 337). För att erhålla densamma i rent tillstånd användes samma metod, som ledt honom till framställningen af cyanbromid, nemligen klors inverkan på kvicksilfvercyanid. Det lyckades honom äfven såsom bekant att på så sätt erhålla cyanklorid i rent tillstånd. Sker inverkan i solljus så uppkommer helt litet af densamma, utan i stället den s. k. klorecyanoljan, som af SERULLAS anses i hufvudsak såsom en blandning af klorecyan, klorkväfve och kolets klorider. Huru härmed än må vara, uppkommer den genom kloreens inverkan på cyanklorid. Oljan är särdeles explosiv och är väl anledningen till de explosioner, som kunna inträffa vid klors inverkan på cyankvicksilfver, och om hvilka äfven WEITH berättar (Ber. Ber. 1874 s. 1745). I ifrågavarande afhandling anmärker Serullas i förbigående, att om cyanväte hålles i en torr flaska med torr klogas, så att klogasen är närvarande i stort öfverskott, det uppkommer en fast kropp af en stickande lukt, olöslig i vatten och som i luften afgifver ångor af klorväte.

Följande året återkommer han till denna förening. Han framställer densamma på så sätt, att i en flaska fylld med torr klogas ihålles så mycket torrt cyanväte, att på 1 m. af den senare kommer minst 2 at. klor. Härefter korkas flaskan och utsättes för solljuset. Klogasens färg försvinner så småningom. Det afsätter sig på kärlets väggar en färglös vätska, som så småningom stelnar till en hvit fast massa, blandad med kristaller. Det åtgår flera dagar innan denna punkt är nådd. Den så erhållna massan, tvättad och destillerad, gaf en cyanklorid, som af Serullas kallades »perchlorure de cyanogène» och på grund af anställda analyser ansågs hafva formeln $CNCl_2$.

Sju år senare (1835) var cyankloriden åter föremål för undersökning af LIEBIG (Pogg. Ann. 34 s. 604). Han erhöLL densamma blandad med klorsvafvel vid klor inverkan på torrt rhodankalium. Man erhåller på så sätt 4 - 5 pet af det använda rhodankaliet. Han analyserar den ånyo och påvisar att den har samma procentiska sammansättning som cyankloriden. Då den emellertid lätt öfvergår i den trebasiska cyanursyra, uppfattade han den såsom cyanurklorid, hvilket af BINEAU bekräftades, som bestämde dess volumvigt.

Cyanurklorid öfvergår ytterst lätt i cyanursyra. Den omvända reaktionen, cyanursyrans öfverförande i cyanurklorid medelst fosforsuperklorid, utförde BEILSTEIN 1860 (Ann. Ch. Pharm. 116 s. 357).

Ingen af de angifna metoderna kan emellertid användas för erhållandet af något större mängder af denna reaktionskraftiga förening.

A. GAUTIER har 1867 angifvit en annan framställningsmetod för denna förening (Ann. ch. pharm. 141 s. 122). »In eine Auflösung von 1 Th. Cyanwasserstoffsäure in etwa 4 Th. wasserfreiem Aether leitet man, unter Erkaltung der Mischung, einen langsamen Chlorstrom; bald sieht man an der Wandung des Glases zähe Tropfen sich bilden, welche nach kurzer Zeit zu festem Chloreyan erstarren, selbst wenn die Flüssigkeit kein überschüssiges Chlor enthält. Nach 24 st. stehenlassen hat man oft eine prächtige Anhäufung gut ausgebildeter Krystalle.»

Jag förfor på alldeles samma sätt som Gautier angifvit. Till 340 gr. ren och fullkomligt torr eter, som i en flaska hölls väl afkyld med is och koksalt inleddes 85 gr. torr cyanvätegas, framställd enligt WÖHLERS metod (Vid en väl utförd operation erhålles 85 gr. cyanväte af 500 gr. gult blodlutsalt). I denna blandning af eter och cyanväte inleddes väl torkad klogas. Under hela tiden klor inleddes, hölls vätskan afkyld till en temperatur som ej öfversteg -15° . Klogasen absorberades ögonblickligen och någon klorväteutveckling förekom dervid ej. I början höll sig vätskan fullkomligt klar. Efter hand inträdde dock grumling och en kropp afsatte sig på botten och sidorna af kärlet. Denna var än fast och kristallinisk, än tjockflytande och seg. I senare fallet blef den dock efter hand i regeln fullständigt fast och kristallinisk.

Som nämnt utvecklas ej vid behandlingen med klor något klorväte, ifall temperaturen hålles vederbörligen lågt. Det förekom deremot ofta, att efter slutad klorinledning och sedan köldblandningen aflägsnats, utvecklades betydliga mängder klorväte, hvarvid blandningen uppvärmde sig.

Den kropp, som vid behandlingen med klor afsatte sig ur lösningen, är emellertid i hufvudsak ej cyanurklorid, såsom GAUTIER antagit, utan den förening, som han sjelf sedermera beskrifvit (Ann. ch. phys. [4] 17 p. 129) under namn af »Chlorhydrate de formonitrile», och som utgör en förening af cyanväte och klorväte till lika molekyler. GAUTIER erhöill densamma genom att mätta vattenfritt cyanväte med klorväte och derefter uppvärma till 30—40°, då ifrågavarande kropp utkristalliserar. Grunden till dess uppkomst vid här ifrågavarande fall är sålunda lätt att göra sig reda för. Det vid cyanvätets inverkan af klor uppkomna klorvätet förenar sig in statu nascendi med en annan molekyler cyanväte till ifrågavarande förening. Anställt försök lärde mig äfven, att om man mättar vattenfritt cyanväte med klorväte, så bildas ifrågavarande kropp äfven vid låg temperatur, om än ej i synnerlig mängd.

Jag har analyserat ifrågavarande förening och funnit den i allo öfverensstämma med GAUTIERs uppgifter, utom hvad beträffar lösligheten i kloroform, hvari min förening är olöslig, då deremot GAUTIER angifver sin vara deri löslig, hvilket dock synes vara ett misstag, då den af mig direkt af klorväte och cyanväte erhållna föreningen äfven är olöslig i kloroform.

Analys af HCN + HCl

H₂ — 2 — 3,15 — 4,01

Cl — 35,5 — 55,90 — 55,11

C — 12 — 18,91 — 17,64

N — 14 — 22,04

63,5 100,00

Analysens resultat stämmer visserligen icke väl med formeln. Det må dock anmärkas, att produkten ej fullständigt kunde befrias från cyanurklorid, äfvensom att den är mycket hygroskopisk.

Substansen i fråga löser sig i vatten långsamt. I första ögonblicket har lösningen neutral reaktion. Efter en tid

innehålles deri emellertid endast myrsyra och salmiak samt något cyanväte. Kroppen uppkommer som nämndt i stor mängd och utgör den vida öfvervägande delen af reaktionsprodukterna. Då klor äfven lätt angriper eter under bildning af klorväte, är det lätt förklarligt, att större delen af cyanvätet öfvergår i denna förening. Den nu omtalade fasta föreningen mellan cyanväte och klorväte synes emellertid icke vara den primära produkten af klorvätes och cyanvätes förening med hvarandra, utan i första hand bildas en olja, hvilken så småningom, ofta dock ganska hastigt, öfvergår i den fasta föreningen. Denna olja skiljer sig från den fasta föreningen deri, att den med ytterlig våldsamhet löser sig i vatten. Reaktionsprodukterna äro härvid väsendtligen desamma som erhållas genom inverkan af vatten på den fasta kroppen, nemligen myrsyra och ammoniak. Det synes som om äfven en gas dervid utvecklar sig. Närmare har jag ej undersökt förhållandet. Den flytande föreningen karakteriseras emellertid deraf, att den ytterst lätt öfvergår i den fasta. Det har därför icke varit mig möjligt att kunna analysera densamma eller närmare kunna undersöka den. Det förefaller mig emellertid som förhållandet vore följande. Cyanväte och klorväte förena sig först till lika molekyler. Resultatet utgör den omtalade flytande föreningen, som karakteriseras genom att den lätt öfvergår i den isomera fasta af GAUTIER först framställda föreningen.

Efter slutad inledning af klor (jag inledde deraf så mycket, att på en molekul cyanväte kom 2 at. klor) hade ofvann på den förut omtalade kroppen som oftast afsatt sig en del kristaller af cyanurklorid, hvilken kropp äfven hölls löst i etern. Det hela uppvärmdes med uppåtväändt kylrör en tid. Lösningen afhöllades och destillerades, då cyanurklorid erhöles såsom återstod i retorten efter eterns afdestillering.

Efter denna metod har jag åtskilliga gånger framställt cyanurklorid och dervid något varierat försöken, så att ibland afkylningen icke varit så stark, ibland mer ibland mindre klor inledts. I det hela hafva försöken utfallit på samma sätt. Af 85 gr. cyanväte har jag aldrig erhållit öfver 30 gr. cyanurklorid men oftast mindre än så. Jag har därför sökt att utfinna någon annan metod, som lemnade rikligare utbyte, än den nu nämnda af GAUTIER angifna.

Jag opererade sålunda först med en vattenlösning af cyanväte, hvori klor inleddes. Jag iakttog äfven här det samma som GAUTIER, nemligen att om lösningen är för concentrerad, öfvergår ej allt cyanvätet i cyanklorid, utan en del öfvergår i salmiak. Detta beror tydligen derpå, att ifall lösningen är för concentrerad, så bildas ofvanomtalta förening af cyanväte och klorväte eller rättare denna förenings sönderdelningsprodukter. Är emellertid lösningen mera utspädd, så öfvergår allt cyanvätet i cyanklorid och cyankloriden afsätter sig på bottnen som ett oljelager. Vid dermed företagen destillation erhöles emellertid cyanurklorid endast i ytterst ringa mängd. Den öfverdestillerade cyankloriden polymeriserar sig endast långsamt och ofullständigt.

Jag inledde derpå torr klorgas i oförtunnad vattenfri blåsyra. Kloten absorberades ögonblickligen. Ymniga mängder klorväte blandadt med cyanklorid utvecklades. Klorgas inleddes tills vätskan färgades gul. Ett tunnt hvitt fast lager afsatte sig så smaningom på bottnen. Derofvanpå fanns den lättflytande cyankloriden. Togs vätskan derpå ur köldblandningen, så utvecklade sig ymniga mängder gas och inom kort var all cyanklorid under våldsamma uppkokningar borta, och en blandning af cyanurklorid och den ofvan omtalta föreningen mellan cyanväte och klorväte återstod. Utbytet var dock icke här större än enligt GAUTIERS metod. Det försöktes derpå att hålla cyankloriden kvar i kolfven vid vanlig temperatur, under användandet af öfver en atmosfärs tryck. Det visade sig emellertid, att cyankloridens tension vid 15—18° är betydligt större. Möjligen skulle cyankloriden fullständigt polymeriseras ifall den kunde hållas vid omkring - 15° i flera dagar; detta har jag ej försökt, då följande sätt fullständigt uppfyller sitt ändamål.

Cyanurklorid.

Målet nådde jag emellertid genom användandet af en kloroformlösning af blåsyra. Genom upprepade försök har jag funnit följande sätt vara det lämpligaste. I en kolf med 325 gr. vattenfri kloroform (som erhålles genom destillation med svafvelsyra) inledes 85 gr. torr blåsyregas under kolfvens afkylande med is och koksalt. Den nämnda kvantiteten blåsyra erhålles af 500 gr. gult blodlutsalt. Blåsyrans fram-

ställning skedde enligt WÖHLERS metod. I denna blandning, afkyld med is och koksalt, inledes torr klorgas i godtyckligt stark ström. Klor absorberas dock ögonblickligen och fullständigt. Under operationen utvecklas betydliga mängder klorväte och en jämförelsevis obetydlig mängd af den fasta föreningen mellan HCl och HCN afsätter sig understundom först såsom en olja, understundom direkt i fast form. När vätskan färgas gul är allt cyanvätet försvunnet. Klor absorberas dock ännu i ganska betydliga mängder och man fortsätter lämpligen inledningen af klor ännu en liten tid.

Man låter derpå kolfven stå i omkring tolf timmar, under hvilken tid betydliga mängder klorväte utvecklas, cyanklorid deremot i minimala mängder. Man förenar derpå kolfven med ett uppåtvänt kylrör och kokar tills klorvätet och de spår af cyanklorid som ännu finnas i vätskan aflägsnats. Det öfverskott af klor som finnes går naturligtvis äfven dels bort, dels öfverför kloroform i kolklorid. När vätskan blifvit nästan färglös afbrytes kokningen, hvarpå den slås ännu varm ifrån den fasta föreningen mellan klorväte och cyanväte som finnes olöst på botten, i en retort hvarpå destilleras, då kloroformen och cyanurkloriden äro lätta att skilja åt. På så sätt erhålles af 85 gr. blåsyra 130 gr. cyanurklorid. Under antagandet att allt cyanväte öfverförts i cyanurklorid skulle 193 gr. häraf bildats. Det erhålles sålunda omkring 70 proc. häraf. *) Frånsedt mycket små mängder cyanklorid, som ej blifvit polymeriserad, återfinnes resten af cyanvätet i förening med klorväte i den nämnda fasta i kloroform olösliga föreningen dem emellan. Det erhålles omkring 50 gr. häraf. Enligt denna metod låter sig sålunda utan nämnvärd möda godtyckliga mängder cyanurklorid framställas.

Det kan nu frågas, hvad det är som egentligen åstadkommer polymeriseringen. Ljuset utöfvar ej, såsom man skulle tro enligt SERULLAS undersökning, något inflytande härpå, alldenstund utbytet blir lika stort, äfven om allt ljus under hela operationen utestänges. Om klorinledningen afbrytes innan ännu all blåsyran är sönderdelad, men i öfrigt förfäres på samma sätt, så erhålles äfven ett ganska ringa utbyte af cyanurklorid. Det kan sålunda ej vara kloroform-

*) Det må emellertid anmärkas, att en och annan gång händer det, att cyanklorid ej så fullständigt polymeriseras som här är angifvet, utan att jag har kunnat finna någon förklarlig grund härtill.

men, som verkar polymeriserande. Ett väsentligt villkor för operationen är som nämndt, att klor skall finnas i öfverskott. Det synes sålunda egentligen vara den fria kloren, som verkar polymeriserande. Kloroformen åter gör cyankloriden mindre flygtig och verkar dessutom absorberande för den vid polymeriseringen nödvändiga kloren och verkar dervid indirekt gynnsamt därför. Då emellertid äfven, om än i långt ringare grad, en polymerisation sker i eterlösning, der aldrig klor är närvarande i öfverskott, så synes äfven klorväte, om än i långt ringare mån kunna verka polymeriserande på cyankloriden.

Jag skall här inskränka mig till att anföra de erfarenheter jag gjort beträffande cyanurkloridens förhållande till vatten och alkoholer.

Redan SERULLAS påvisade cyanurkloridens lätta öfvergång i cyanursyra vid inverkan af vatten såväl som af luftens fuktighet. Å andra sidan stannar substitutionen med 2 kloratomer vid inverkan af ammoniak. Det kan därför frågas, huruvida ej någon cyanuroxiklorid primärt uppstår vid vattens inverkan på cyanurklorid. För att få kännedom härom, lät jag pulveriserad cyanurklorid ligga i luften en tid, då klorväte långsamt men städse utvecklades. Härpå behandlades massan med en conc. lösning af kaliumsulphhydrat. En del löstes under svafvelväteutveckling. En del blef åter olöst. Den senare befanns vara ren cyanursyra. Lösningen åter innehöll, utom små mängder cyanursyra, endast den förut af mig beskrifna trithiodicyanursyan. Någon dithiodicyanursyra, som likaledes är af mig förut beskrifven, eller någon monothiodicyanursyra kunde jag ej deri påvisa. Dessa senare voro dock lätta att skilja från trithiodicyanursyan, hvilken sednare är äfven i kokande vatten så godt som olöslig, då deremot redan dithiodicyanursyan löses deri i rätt betydliga mängder, hvilket ännu mer måste vara fallet med monothiodicyanursyan. Någon oxiklorid synes sålunda ej existera, utan vatten öfverför cyanurklorid direkt i cyanursyra. ALEX. NAUMANN och E. VOGT (Ber. Ber. 1870, 523) anföra: »Gelegentlich der versuchten Darstellungen des sogenannten Chloreycanwasserstoff wurde mehrfach die Beobachtung gemacht, dass festes Chloreycan bei niedriger Temperatur in Berührung mit den salzsäurehaltigen wässrigen Flüssigkeiten sich allmählig mit Wasser unter Kohlensäureentwicklung in

Salmiak umsetzte.» Med kännedom om den fasthet, hvarmed atomerna i komplexen cyanur äro bundna vid hvarandra, vore denna reaktion ytterst egendomlig. Anställda försök med ren cyanurklorid visa också, att så ingalunda är förhållandet, utan bildas härvid som med rent vatten endast cyanursyra och klorväte. Uppgiften härrör sig tydligt deraf, att deras cyanurklorid varit förorenad af additionföreningar mellan cyanväte och klorväte, hvilka som nämdt alltid samtidigt uppkomma vid klors inverkan på blåsyra.

Angående cyanurklorids förhållande till alkoholer föreligger endast en uppgift af LIEBIG (loc. cit.). »Das chloreycan löst sich in abs. Alkohol ohne zersetzung auf; von gewöhnlichem Alkohol wird es ebenfalls aufgenommen, aber kurze Zeit nach der Auflösung erhitzt die Flüssigkeit sich heftig; es entwickeln sich Dämpfe von chlorwasserstoffsäure, und man sieht eine Menge glänzender Würfel von Cyanursäure zu Boden fallen.» Jag har undersökt cyanurklorids förhållande till metyl-, etyl- och amylalkohol samt fenol. Uppvärmes cyanurklorid med de ifrågavarande föreningarne till kokning, så inträder enahanda reaktion med dem alla. Först löses kloriden i alkoholerna. Vid derpå följande kokning transformerar cyanurkloriden i cyanursyra som såsom ett hvitt pulver utfaller och i kloriden af alkoholradikalen. Detta är alltid den vida öfvervägande hufvudreaktionen. I mycket underordnad grad inträder dock äfven här den vid kloriders inverkan på alkoholer vanliga reaktionen, det bildas äfven cyanureterarter och klorväte. Ganska märkvärdigt är det, att fenol af cyanurklorid öfverföres i klorbenzol. Det synes sålunda vara generellt, att cyanurklorid kan transformera alla alkoholer såväl som fenoler i klorider. Detta har väl ingen praktisk betydelse, men det kan ha en teoretisk, under förutsättning att reaktionen är generell. Hydroxyl bunden vid karbonyl förmår deremot cyanurkloriden icke angripa. Cyanurkloriden löses nemligen utan sönderdelning i isättika, hvarur den vid afsvälning åter utkristalliserar.

Af concentrerad salpetersyra och svafvelsyra öfverföres cyanurklorid i cyanursyra delvis redan vid vanlig temperatur.

I ren eter löses cyanurkloriden i värme utan sönderdelning och faller åter till stor del ut igen vid afsvälning. Det bästa lösningsmedlet för cyanurklorid synes emellertid vara kloroform.

Jag förbigår här cyanurbromid, som af A. EGHIS (Ber. Ber. 1869. s. 159) framställdes genom upphettning af cyanbromid och äfven helt nyligen blifvit erhållen af V. MERZ och W. WEITH (Ber. Ber. 1883, 2893) genom upphettning af gult och rödt blodlutsalt med brom till omkring 200° längre tid.

Cyanurjodid.

Det har hittills icke lyckats att polymerisera cyanjodid. Cyanurjodid är sålunda ännu obekant. Denna förening, som i morfologiskt hänseende just ej erbjuder något synnerligt intresse, har det emellertid lyckats mig att på indirekt väg erhålla. Digereras nemligen pulveriserad cyanurklorid med 57-procentig jodvätesyra, så sker en omsättning redan vid vanlig temperatur till cyanurjodid och klorväte och detta under märkbar värmeutveckling.*)

Man digererar pulveriserad cyanurklorid med något mer än den beräknade mängden jodvätesyra ett par dagar vid vanlig temperatur under ofta upprepade omskakning. Värme får härvid ej användas, då jodväte verkar reducerande på cyanurjodiden, hvarvid bland annat ammoniak bildas. Så småningom färgas syran allt mer och mer brun af fri jod. ett tecken till att äfven i köld sker någon reduktion. Syran afhålls och ny tillsättes, hvarmed den fasta massan väl pulveriseras. Efter ytterligare en dags digestion filtreras och tvättas den bildade cyanurjodiden samt torkas derpå i exsiccator.

Den erhållna cyanurjodiden är ett mörkbrunt glanslöst pulver, fullkomligt olösligt i alla vanliga lösningsmedel. Fullkomligt ren har jag därför ej kunnat erhålla densamma. utan innehåller den ännu circa 3 pet klor. Äfven vidhänger densamma 3—4 pet jod, molekylärt bundet, hvarifrån den icke har kunnat befrias och som antagligen är orsak till den mörka färgen. Cyanurjodid sönderdelas ej af vatten vid vanlig temperatur. Vid upphettning dermed till 125° bildas cyanursyra och jodväte. Hvad som egentligen ger denna förening sitt särskilda intresse är den stora lätthet, hvarmed den sönderfaller i fri jod och paracyan.

*) Antagligen är jodkalium lämpligare än jodvätesyra till att öfverföra cyanurklorid i cyanurjodid.

Cyanur eller Paracyan.

Denna, den enda kända modifikationen af den fria radikalen cyan, uppkommer som bekant vid glödgnung af åtskilliga cyanmetaller (JOHNSTON: BERZ. Jahresber. 10, 72, THAU-LOW: Förh. vid de skand. naturfors. tredje möte 1842). Vid 500° öfvergar cyan långsamt i paracyan (TROOST, HAUTEFEUILLE Jahresber. 1868, 299) liksom paracyan vid 860° öfvergår åter i cyan. Paracyan är sålunda otvifvelaktigt en verkligt polymer modifikation af cyan.

Upphettas cyanurjodid, så börjar den sönderdelas redan vid omkring 200° under bildning af fri jod. Reaktionen är dock vid denna temperatur mycket långsam. Vid 360° går förloppet fortare, i synnerhet om jodångorna aflägsnas. Är provet deremot vid upphettningen omgifvet af jodgas, går äfven vid denna temperatur reaktionen långsamt. Operationen verkställdes sålunda, att cyanurjodiden i fullkomligt torr form inlades i ett profrör, som derefter i mynningen utdrogs till ett nästan kapillärt rör, hvarefter upphettades i 12 t. till 360° i kvicksilfverbad. Efter operationens slut finnes i profröret trenne lager. Underst ett mörkbrunt luckert pulver, som fränsedt färgen påminner om carbo animale. Ett litet stycke deröfver ett hvitt sublimat i fjäderformiga kristaller samt derofvan jod, dels i derba massor, dels i vackra kristaller. Det kunde dervid konstateras att preparatet under upphettningen ej förlorar det minsta i vikt, ifall det förut var fullkomligt torrt. Någon gas utvecklades sålunda ej vid operationen. Det understa bruna pulvret upphettas å nyo i ett annat rör, hvarmed fortsättes så länge jodångor utvecklas. Man kan ock upphetta cyanurjodid med fri låga i ett rör i en kolsyreström, hvarvid reaktionen naturligtvis går mycket fortare.

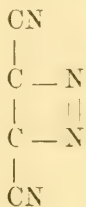
Det understa bruna luckra pulfret har samma sammansättning som den fria cyanen. I och för dess analys måste det kallna i excicator, då det är mycket hygroskopiskt. Det upptagna vattnet bindes dervid med stor kraft, så att det endast långsamt bortgår fullständigt vid 360° . I och för analys upphettar man därför cyanurjodid inlagd i ett skepp i ett glaströr och i en kolsyreström slutligen till lindrig rödglödgnung, hvarpå det, efter kallnandet i excicator, omedelbart analyseras, eljest erhåller man ej riktigt resultat.

Analys:

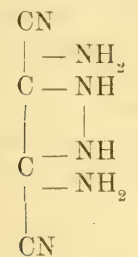
	ber.	erh.
C — 12 —	46,16	45,85.
N — 14 —	53,84	53,91.

Den ifrågavarande substansen förhåller sig fullständigt som paracyan. Vid full rödglödning förflygtigas den långsamt i en kolsyreström till cyan under lemning af endast ett spår kol. För att förflygtiga 0,2 g åtgick fulla två timmar med användande af all den värme som en vanlig förbränningsugn förmår ge. Det kan sålunda ej vara något tvifvel om, att den af mig erhållna föreningen är paracyan.

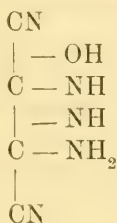
Öfver paracyanens eller som den enligt ofvanstående syntes mera rätt bör heta cyanurens konstitution föreligger så vidt jag vet endast en undersökning nemligen af O. JACOBSEN och A. EMMERLING (Ber. Ber. 1871, 947) och denna är af mera spekulativ natur. De antaga att cyanuren är ett azoderivat, som får sitt uttryck i följande formel:



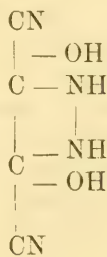
De dermed beslägtade kropparne hydrazulmin, azulminsyra och mykomelinsyra få följande formler:



Hydrazulmin.



Azulminsyra.



Mykomelinsyra.

Den af mig här relaterade framställningen af paracyan visar emellertid, att paracyan står i samma förhållande till radikalen cyanur, som den fria cyanen till radikalen cyan och att dess rätta formel sålunda är

ÖFVER
NORMALA CYANURFÖRENINGAR.

AF

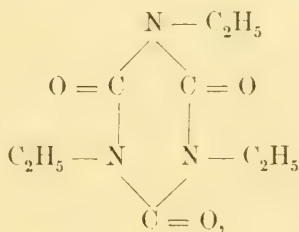
PETER CLAËSSON.

MEDDELADT DEN 12 NOVEMBER 1884.

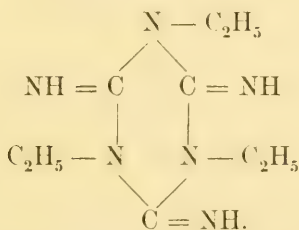


STOCKHOLM, 1885.
KONGL. BOKTRYCKERIET.
P. A. NORSTEDT & SÖNER.

Bland andra skäl för cyanursyrans imidställning anför NENCKI (B. B. 1876, 1008), att den genom polymerisering af etyleyanamid erhållna trietylmelamin ytterst lätt med syror ger ammoniak och trietylammelin och slutligen isocyanureter, hvilket äfven gäller inom metyl- och fenylserierna, såsom HOFMANN visat. Då nu isocyanuretern otvifvelaktigt har sammansättningen:



så måste också trietylmelamin ha sammansättningen:



Å andra sidan kan cyanamid polymeriseras till melamin och denna kan som bekant med syror öfverföras i cyanursyra. Melamin och cyanursyra motsvara sålunda trietylmelamin och isocyanureter och måste sålunda ha en liknande byggnad. Det är onekligt att denna slutledning har mycken sannolikhet för sig. Den förutsätter emellertid, att cyanamid och etylecyanamid äro fullständigt analogt byggda, hvilket a priori är

ganska antagligt, da de uppsta pa analogt sätt. Under den förutsättningen nemligen, att de båda äro t. ex. isocyanför-
 eningar, bör också polymeriseringsprodukterna vara isocyanur-
 föreningar. Äro de ater omvändt normala cyanföreningar, bör
 också condensationsprodukterna vara normala cyanurföreningar.
 Nu har emellertid FILET och R. SCHIFF (B. B. 1877. 426)
 visat, att cyanamid är en verklig cyanförening. På den grund
 bör också melamin och trietylmelamin vara normala cyanur-
 föreningar. Man kommer sålunda på olika vägar till motsatta
 åsichter om saken. Det finnes sålunda intet annat sätt att lösa
 fragan, än att söka framställa isomera föreningar, och det är
 undersökningar i den riktningen, som delvis skola blifva före-
 mål för denna uppsats.

Framställningen af melamin och substituerade melaminer
 direkt af cyanurklorid har ännu ej blifvit gjort, antagligen på
 grund af vanskligheten att erhålla den senare kroppen. Tro-
 ligen bör på denna väg vinnas kännedom om hvilkendera
 åsigten som är den rigtige. Utgangen har också visat detta.
 Af cyanurklorid erhalles nemligen den af gammalt kända mela-
 minen, men deremot erhalles med de hittills kända och af HOF-
 MANNS framställda substituerade melaminerna isomera föreningar.
 Melamin och alkylmelaminer äro sålunda icke analoga för-
 eningar. Resultatet är sålunda ytterligare en bekräftelse på,
 att cyanursyran är en oxyförening och ingen imid.

Normala melaminer.

Den först bekanta föreningen inom denna klass var mela-
 min sjelf, hvilken som bekant först framställdes af LIEBIG
 (Pogg. Ann. 34 s. 586) ur aterstoden efter rhodanammoniums
 upphettning. Dess genetiska sammanhang med cyanursyran
 förbisags emellertid af LIEBIG, som gaf densamma en dubbelt
 så stor equivalentvigt som cyanursyran. Det var egentligen
 LAURENT och GERHARDT (Ann. Ch. Phys. 1847, 85), som bragte
 reda i sammanhanget mellan de af LIEBIG och VÖLCKEL fram-
 ställda produkterna vid rhodanammoniums upphettning. Fran
 dem härrör den ännu gällande formeln för melamin. Det må
 äfven här anmärkas, att L. och G. ansågo LIEBIGS melamin ut-
 göra en blandning af melon och en isomelamin, eller som
 VÖLCKEL kallar den polien, och att denna polien vid behand-
 ling med alkalier öfvergår i melamin.

Genom afsvafning af substituerade thiourinämnen framställde HOFMANN deriverade cyanamider och genom deras polymerisering substituerade melaniner, neml. trietylmelamin (B. B. 1869, 600), trimetylmelamin, triamylmelamin och trifenylmelamin (B. B. 1870, 264). Tillika uttalar HOFMANN den förmodan, att den af WILL framställda sinamin är triallylmelamin. Behandlas dessa föreningar med syror, öfverga de lätt i isocyanureterarter.

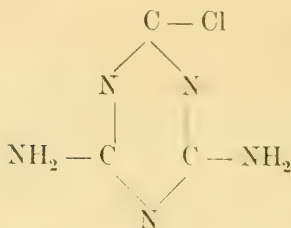
Genom upphettning af difenylguanidin erhöLL HOFMANN (B. B. 1874, 1736) under förlust af anilin och ammoniak en kropp, som han uppfattar som tetrafenylmelamin.

Slutligen är en tribenzoylmelamin framställd af GERLICH (J. pr. Ch. [2] 13, 272) genom polymerisation af benzoylcyanamid.

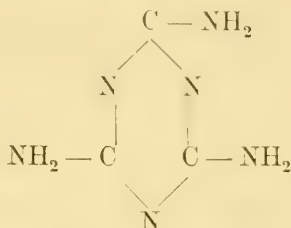
Normal melamin och klore cyanurdiamid.

I sitt arbete öfver rhodanföreningarnes sönderdelningsprodukter (l. c.) omnämner LIEBIG äfven den produkt, han erhöLL genom ammoniaks inverkan på cyanurklorid. LIEBIGS teorier såväl som analyser förde honom i detta fall på villovägar. Ifrågavarande kropp har enligt L. sammansättningen $C_6H_8ClN_{10}$. LIEBIG grundar sin radikalteori hufvudsakligen på detta arbete, hvori han trott sig erhålla två fria radikaler, svafveleyan och melon. För att påvisa ohållbarheten af LIEBIGS åsikter underkasta LAURENT och GERHARDT (l. c.) LIEBIGS ifrågavarande undersökningar en experimentell granskning, hvarvid bland annat den af LIEBIG angifna formeln $C_6H_8ClN_{10}$ ändras till $C_3H_4ClN_5$. Kroppen benämnes klore cyanamid. Da, såsom här nedan skall visas, kroppen är en normal cyanurförening, bör dess namn rätteligen vara *klore cyanurdiamid*.

Upphettas klore cyanurdiamid med ammoniak till 140°, erhålles melamin, identisk såväl med melamin ur melam som med den förut af mig erhållna melamin af trithiocyanursyrans eterarter. Såsom redan LIEBIG påvisat, öfvergar melamin genom inverkan af syror i cyanursyra. Enligt ofvan anförda bevisgrunder har såhunda klore cyanurdiamid formeln:



och melamin eller cyanuramid formeln:



Melamin af cyanurklorid gaf vid analys:

		ber.	erh.
C ₃ —	36 —	28,56 —	28,63
H ₆ —	6 —	4,76 —	5,01
N ₆ —	84 —	66,67 —	—
C ₃ H ₆ N ₆ —	126 —	100,00	

För att närmare påvisa identiteten af den af mig framställda melamin af cyanurklorid såväl som melamin af thio-cyanursyrans eterarter och melamin af melam har jag äfven framställt melamin på sednare sättet.

Enligt uppgift af LIEBIG (l. c) sker detta genom längre tids kokning af melam med en utspädd lösning af kalihydrat, hvilket äfven af CLAUS (Ann. ch. Ph. 179, 120) bekräftats. Man erhåller ungefär hälften af den använda melamen såsom melamin. VOLHARD (J. pr. Ch. [2] 9, 29) öfverförde nästan fullständigt melam i melamin genom upphettning med ammoniak till 150°. JÄGER (B. B. 1876, 1554) erhöi uteslutande melamin genom lindrig uppvärmning af melam med conc. svafvelsyra. Slutligen har CLAUS (B. B. 1876, 1915) visat, att vid upphettning af rhodan ammonium till 250° en betydlig del af återstoden utgöres af rhodanvätesyrad melamin.

Jag har följt de två sednaste metoderna. Melam behandlades med conc. svafvelsyra i enlighet med JÄGERS föreskrift.

Produkten fälldes med sprit. Det fällda löstes i kokande vatten, hvarpå filtrerades, då en stor mängd utkristalliserade, som enligt J. är melaminsulfat. Detta behandlades med kokande sodalösning, hvari större delen om ock svårt löses. Det dervid utkristalliserade skulle enligt J. vara ren melamin. En stor del var dock vida svarlösligare än melamin och bestod antagligen af en blandning af ammelin och ammolid. Jag har sålunda ej funnit JÄGERS uppgifter bekräftade. Enligt min erfarenhet är metoden föga lämplig för framställningen af melamin. Härmed vill jag dock ingalunda påstå, att JÄGERS uppgifter äro origtiga. Resultatet kan möjligen bero på den använda melamens beskaffenhet. Jag upphettade derpå rhodan ammonium till 250°, tills en fast massa återstod. Denna, pulveriserad och utlakad med kokande vatten, gaf i lösningen rhodanvätesyrad melamin, ur hvilken den fria basen lätt kunde erhållas. Af 60 g. ra produkt erhöles 10 g. ren melamin. Denna visade sig i sina reaktioner identisk med de af mig förut framställda produkterna. För att ytterligare påvisa identiteten har min collega M. WEIBULL lofvat att underkasta dem en närmare kristallografisk undersökning.

Slutligen vill jag nämna, att jag framställt det ännu obekanta *dubbelsaltet mellan klorvätesyrad melamin och platina-klorid*. Saltet är temligen lösligt i vatten och kristalliserar i väl utbildade fyrkantiga gula prismor. Dess sammansättning är enligt formeln $(C_3N_3(NH_2)_3HCl)_2 PtCl_4 + 2H_2O$

Analys:

Vid 100° förlorade saltet 5,47 %; ber. 5,28 %. Det torra saltet gaf 29,47 % platina; ber. 29,71 %.

Normal trimetylmelamin.

Cyanurklorid löstes i eter och i denna lösning inleddes metylamin under afkylning till fullständig mättning. Det utföll en hvit kropp. Etern afdestillerades och vatten tillsattes. I lösningen gick saltsyrad metylamin. Den i vatten olösliga kroppen var *kloreycanurdimetyldiamin*. Denna kropp är i vatten olöslig, men löses i kokande alkohol och eter, hvarur den vid afsvauning åter utkristalliserar i prismor. Den har för öfrigt ej blifvit föremål för någon undersökning. Upphettas denna med alkoholisk metylamin till 140°, så löses den och vid afsvauning utkristalliserar intet. Lösningen afdestades till

torrhet, da en sirup återstod, som behandlades med ren eter, hvilken utdrog den bildade trimetylmelaminen under lemning af saltsyrad metylamin. Etern afdunstades, då en sirup återstod som, löst i vatten och afdunstad till sirupskonsistens, så småningom stelnade i excieccator till en kristallkaka.

Analys af den fria basen torkad vid 100°:

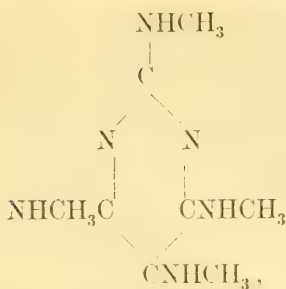
		ber.	erh.
C ₆	— 72 —	42,85 —	42,53
H ₁₂	— 12 —	7,15 —	7,42
N ₆	— 84 —	50,00 —	50,36
C ₆ H ₁₂ N ₆	— 168 —	100,00 —	100,31

Trimetylmelamin smälter vid 115° och löses ytterst lätt i vatten, alkohol och eter. Vattenlösningen reagerar alkaliskt. Försattes dess lösning med saltsyra och platinaklorid, så utkristalliserar ett salt i vackra guldgula prismor med sammansättningen C₆H₁₂N₆, 2HCl, PtCl₄. Platinasaltet gaf 32,94 % platina; ber. 34,01 %. Saltet tal ej behandling med vatten, hvarvid det synes öfvergå i ett salt med sammansättningen (C₆H₁₂N₆, 2HCl)₂ PtCl₄, åtminstone att döma efter en platinabestämning i med vatten behandladt salt.

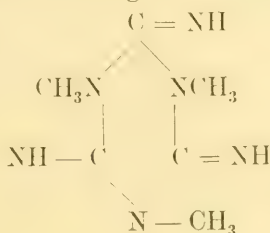
Upphettas trimetylmelamin med saltsyra till 180° i tre timmar, bildas cyanursyra, som utkristalliserade i röret i vackra kristaller. Lösningen innehåller saltsyrad metylamin. Platina-saltet gaf 41,06 gr. Pt; för metylaminplatinasalmiak beräknas 41,61 gr. Pt.

Trimetylmelamin upphettades till 360° under tvänna timmar, hvarvid den långsamt öfverdestillerar och icke synes dervid sönderdelas. Den kallnade glasiga produkten upphettades med saltsyra till 180°, hvarvid cyanursyra bildades. Trimetylmelamin kan sålunda ej genom upphettning öfvergå i den isomera föreningen.

Den af Hofmann (l. c.) erhållna trimetylmelamin har helt andra egenskaper. Den förflygtigas vid upphettning utan att smälta och ger vid upphettning med saltsyra metylisocyanurat. Det är sålunda tydligt att den af mig af cyanurklorid erhållna trimetylmelamin är den normala föreningen med formeln:



då deremot HOFMANNNS förening har formeln:



Normal Trietylmelamin.

Denna förening framställdes af cyanurklorid och etylamin på alldeles samma sätt som föregående förening. Först erhöles *kloreycanurdietyldiamin*, som vid högre temperatur med alkoholisk etylamin gaf trietylmelamin. Efter slutad upphettning var allt i försöksröret löst. Innehållet afdunstades på vattenbad till torrhet, då en sirup återstod, hvilken behandlades med absolut eter, som utdrog trietylmelamin. Etern afdunstades. Återstoden behandlades med vatten, då den stelnade.

Trietylmelamin löses ytterst lätt i alkohol och eter och kan knappast erhållas kristalliserad derur. I vatten, äfven i varmt, är den deremot mycket svarlösliq och kristalliserar derur i nålar. Vattenlösningen reagerar alkaliskt. Det klorvätesyra saltet är löslösligt, deliquescent och kristalliserar i nålar. Med platinaklorid erhållet saltet $\text{C}_9\text{H}_{18}\text{N}_6 \cdot 2\text{HCl} \cdot \text{PtCl}_4$, som kristalliserar i vackra guldgula prismor. Saltet tål lika litet som föregående tvättning med vatten, utan synes äfven öfvergå i saltet $(\text{C}_9\text{H}_{18}\text{N}_6 \cdot 2\text{HCl})_2\text{PtCl}_4$.

Platinasaltet gaf 31,14 % platina; ber. 31,71 %. Trietylmelamin smälter vid 73°. Upphettad med saltsyra till 180° öfverföres den glatt till cyanursyra och etylamin. Den kunde lika litet som metylföreningen genom upphettning öfverföras i den isomera föreningen.

Den af HOFMANN genom polymerisering af etylecyanamid erhållna trietylmelamin är lättlös i vatten och alkohol samt ger upphettad med saltsyra etylisocyanurat och ammoniak. Här, såsom fallet är med metylföreningen, ge båda etylmelaminerna med platinaklorid salter af samma sammansättning. Äfven här är sålunda den af mig erhållna föreningen den normala, då deremet HOFMANNS representerar isoföreningen.

Normal Trifenylmelamin.

Till en eterlösning af cyanurklorid sattes något mer än den beräknade mängden anilin under afkylning. Etern afdestillerades från reaktionsprodukten, hvilken sednare tvättades med vatten, alkohol och eter och utgöres derefter i hufvudsak af *kloreycanurdifenyldiamin*. Den innehåller emellertid redan nu något trifenylmelamin, från hvilken den är svår att fullständigt skilja. Den upphettades derpå med alkoholisk anilin till 150° . Produkten behandlades med vattenångor för att aflägsna överskottet af anilin, tvättades derpå med vatten, alkohol och eter, samt omkristalliserades derpå ur kokande isättika, det bästa lösningsmedlet för densamma.

Trifenylmelamin är i motsats mot föregående melaminer indifferent. Den löser sig väl till mycket ringa mängd i kokande saltsyra, men faller åter ut vid afsvålning. Med saltsyra och platinaklorid kunde ej heller någon förening erhållas. I alkohol och eter löses den i värme i ringa mängd. Vid kallnandet kristalliserar dock intet ut, först vid afdunstning inträder detta. I kokande isättika löses den i temlig mängd och kristalliserar åter ut i fina nålar vid afsvålning. Smpt 223° . Vid 360° sublimerar den långsamt utan sönderdelning och utan att öfverföras i isoföreningen. Upphettad med saltsyra till 150° synes ingen vidare förändring försigga; först närmare 200° dekomponeras den af saltsyra fullständigt i cyanursyra och anilin. En del af cyanursyran sönderdelas därvid i kolsyra och ammoniak.

Analys:

	ber.	erh.
C_{21} — 252 —	71,19 —	71,22
N_6 — 84 —	23,73 —	23,84
H_{18} — 18 —	5,08 —	5,36
$C_{21}N_6H_{18}$ — 354 —	100,00 —	100,42

Den af HOFMANN genom polymerisering af fenylecyanamid erhållna trifenylnmelamin smälter vid 162° , är en bas och sönderdelas redan vid uppkokning med saltsyra i ammoniak och fenylisocyanurat. Cyanurklorid ger sålunda äfven med anilin den normala melaminen.

Normal p-Tritolylmelamin.

Inom toluolgruppen kan 8 isomera melaminer tänkas, af hvilka ingen är hittills bekant. Här skall jag endast anföras ofvanstående förening.

Den framställdes af cyanurklorid och p-toluidin på alldeles samma sätt som trifenylnmelamin.

Föreningen är indifferent, olöslig eller mycket svårslöslig i alla lösningsmedel. Bäst kommer man äfven här till malet med isättika, ur hvilken den kristalliserar i nalar. Smpt. 283° . Dekomponeras med svårighet af saltsyra. Äfven härvid kunde cyanursyra påvisas.

Analys:

	ber.	erh.
C_{24} — 288	72,72	73,23
N_6 — 84	21,21	—
H_{24} — 24	6,07	6,53

Da såväl ammoniak som aminbaser vid lindrig inverkan lemna den ena kloratomen i cyanurklorid intakt, kan naturligtvis en stor mängd deriverade melaminer, ammelineer, thioammelineer m. m. framställas. Jag har emellertid ej ansett detta löna mödan, då sådana föreningar för närvarande icke hafva något vidare hvarken teoretiskt eller praktiskt intresse. Blott två dylika skall jag här omnämna, nemligen normal monofenylnmelamin och normal thioammelin.

Normal Monofenylnmelamin.

Denna förening erhöles af klorecyanurdiamin och alkoholisk anilin vid upphettning till 150° . Reaktionen förlöper icke här så rent som vid de förut omtalade föreningarne, i det en del färgade produkter uppträda. Efter afdunstning till torrhet tvättades produkten med kall alkohol, eter och vatten samt omkristalliserades ur alkohol tills den blef färglös.

Monofenylmelamin är temligen löslig i alkohol och kristalliserar i prismor. Smpt. 284. Vid upphettning med saltsyra erhöles äfven af denna förening cyanursyra.

Analys:

		ber.	erh.
C ₉	— 108 —	53,46	— 53,68
N ₆	— 84 —	41,58	—
H ₁₀	— 10 —	4,96	— 5,39
C ₉ N ₆ H ₁₀	— 202 —	100,00	—

Monofenylmelamin är en bas, som med saltsyra ger ett i prismor kristalliserande temligen svarlösligt salt. Detta ger med platinaklorid ett i guldgula prismor väl kristalliserande dubbelsalt, hvars sammansättning är något olika mot motsvarande melaminers platinaföreningar inom fettserien. Det har formeln $(C_3N_3 \cdot NHC_6H_5(NH_2)_2, 2HCl)_2 + PtCl_4$, sålunda samma formel som saltsyrad metyl- och etylmelaminplatinaklorid erhålla, när de först utkristalliserade salterna behandlas med vatten.

Ett preparat häraf, som tvättades något med vatten innan det analyserades, gaf 22,02 % platina; ett annat som pressades starkt från moderluten utan att förut tvättas, gaf 23,06 % platina. Enligt ofvanstående formel beräknas 22,17 % platina.

Det framgår sålunda som allmän regel af föregående undersökningar, att cyanurklorid med såväl ammoniak- som aminbaser ger normala cyanuraminer, hvilka icke kunna öfverföras i isoföreningar.

Normal Thioammelin.

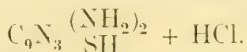
Denna förening framställdes af kloreyanurdiamid och en konc. lösning af kaliumsulfhydrat. Uppvärmes kloreyanurdiamid lindrigt med en lösning af kaliumsulfhydrat, så löses den snart. Ur lösningen fälles den bildade thioammelinen med ättiksyra. Den renas genom omkristallisation ur kokande vatten, i hvilken den dock är mycket svåröslig eller ock genom lösning i ammoniak och fällning med ättiksyra.

Thioammelin utkristalliserar ur kokande vatten genast vid afsvauning i fina nålar, som torkade bilda mjuka, ulliga massor. Föreningen löses lätt i kaustika alkalier, ammoniak samt äfven i mineralsyror men ej i ättiksyra. Med syror bildar den lätt kristalliserbara salter. Det svafvelsyrade saltet är svårösligt

och kristalliserar i vackra prismor. Det saltsyrade saltet kristalliserar i fina prismor och är äfven temligen svarlösigt.

Den fria basen gaf vid analys 22,52 % svafvel; ber. 22,38 %.

Det klorvätesyrade saltet har sammansättningen



En klorbestämning gaf 19,97 % Cl; ber. 20,33 %.

1 del thioammelin löser sig i 310 delar kokande vatten.

Löses thioammelin i utspädd svafvelsyra och lösningen derpa oxideras med öfvermangansyradt kali, så utkristalliserar ur filtratet efter tillsats af klorammonium och neutraliseradt med ammoniak en kropp i mikroskopiska prismor, som har alla egenskaper af att vara ammelin.

Klorvätesyrad thioammelin ger med platinakloridlösning genast en gul fällning. I öfrigt faller thioammelin ej lösningar af metallsalter. En ammoniakalisk lösning af thioammelin ger med en ammoniakalisk lösning af silfvernitratt en amorf fällning. Är silfversaltet i öfverskott blir fällningen finkornig.

Det är förut en thioammelin beskrifven af PONOMAREW (Beilstein, Handbuch der org. Chemie s. 705). Den erhöles af pseudosvafvelcyan genom upphettning med konc. ammoniak. Huruvida denna är identisk med den nu af mig beskrifna låter sig ej med säkerhet afgöra. Enligt Ponomarew löses 1 del i 145 delar vatten. Ur en utspädd lösning utfaller den i kristallkorn. Löses såväl af alkalier som syror och oxideras af salpetersyra redan vid vanlig temperatur till ammelin. Huruvida den med syror bildar salter, finnes ej omnämndt. Ehuru dess egenskaper differera något från ofvan anförda thioammelin, är det dock troligt att de äro identiska och att Ponomarews förening verkligen är normal thioammelin, om än i något orent tillstånd. Derför talar särskildt, att den redan vid vanlig temperatur oxideras till ammelin och dess förhållande till silfversalt, som är identiskt med hvad anfördt är om den förening, som erhöles af cyanurklorid.

Till normala cyanurföreningar maste äfven räknas följande förut kända kroppar:

Ammelin eller normal oxycyanurdiamin.

Det är förut anfördt, att normal thioammelin genom oxidation vid vanlig temperatur öfvergår i ammelin. Samma

kropp erhålles af klorecyanurdiamid och kalihydrat, såsom redan LAURENT och GERHARDT (l. c.) visat och som jag sjelf har öfvertygat mig om. Cyanurklorid står såhunda i ett fullständigt genetiskt sammanhang med ammelin.

Melanurensyra (ammelid) eller normal dioxycyanuramid.

Då denna förening uppstår vid upphettning af melamin med konc. svafvelsyra (JÄGER, l. c.) och sjelf vid behandling med alkalier eller syror lätt öfvergår i cyanursyra, måste den äfven sjelf höra till de normala cyanurföreningarne.

Thiomelanurensyra eller normal dithiocyanuramid.

Denna förening, framställd af pseudosvafveleyan och alkalisulphhydrater, öfvergår med syror i cyanursyra samt öfverensstämmer för öfrigt i sin allmänna kemiska habitus med melanurensyra.

Normal hexafenylmelamin.

WEITH (B. B. 1874, 843) erhöill vid inverkan af kloreyan på smält difenylamin a-trifenylguanidin, som vid hög temperatur sönderdelas i difenylamin och en polymerform af difenylecyanamid. Den smälter vid 292° och ger med saltsyra vid 250° difenylamin, kolsyra och ammoniak. Det är tydligt att i första hand uppstår difenylamin och cyanursyra, hvilken sednare vid den höga temperaturen sönderfaller i kolsyra och ammoniak. Det återstår visserligen att visa, att föreningen är en cyanurförening och ingen dicyanförening. Den höga smältpunkten tyckes emellertid tillkännagifva detta. Syntetiskt bör den antagligen erhållas af difenylamin och cyanurklorid, Försök i den riktningen har jag dock ej ännu anställt.

Normala cyanursyrade eterarter.

Utvecklingen af vår kännedom om dessa föreningar är i korthet följande.

CLOEZ (Compt. Rend. 94, 882) framställde genom inverkan af cyanklorid på kaliumalkoholat den s. k. cyanetolin, som var isomer med de dittills kända etylecyanat och etylecyanurat.

Produkten utvecklar enligt Cloez med kali ammoniak och förenar sig med syror till kristalliserbara salter.

GAL (Compt. Rend. III, 527) underkastar denna kropp en förnyad undersökning och finner, att han vid behandling med kali ger kaliumcyanat och alkohol, med saltsyra cyanursyra och kloretyl. Gal och Cloez anse på grund häraf, att cyanetolin hör till vattentypen, är enligt modernt språkbruk normalt etylecyanat eller cyanurat.

Sedan HOFMANN bevisat, att de af gammalt kända cyan-syrade och cyanursyrade eterarterna höra till ammoniaktypen och sålunda egentligen äro isoföreningar, underkastade HOFMANN och OLSHAUSEN (B. B. 1870, 269) cyanetolin en förnyad undersökning. Här af framgick, att cyanetolin ej är en homogen kropp, utan kunde de derur isolera dietyletern af amidocyanursyra och etyletern af diamidocyanursyra, men hvarken något etylecyanat eller cyanurat. Bättre gingo försöken i metylserien, der ett cyanat erhöles med smpt 132° och kokpunkt 160—170°. Upphettas föreningen med kali, erhålles cyanursyra och metylalkohol. Det var sålunda den normala cyanuretern. Underkastas föreningen en destillation, öfvergår den i det af gammalt kända metylecyanuratet med smpt 175°. Vid kloretyans inverkan på natriummetylat erhöles dessutom amidocyanursyrad dimetyleter. I amylierien erhöles en produkt som destillerade vid omkring 200° under sönderdelning och ansågs med reservation såsom amylecyanurat. I fenylserien erhöles ett cyanat, som vid destillation öfvergick i ett cyanurat med smpt 224°, isomert med det af HOFMANN förut framställda cyanuratet (iso) med smpt 264°.

Kort tid derefter försökte CANNIZZARO (B. B. 1870, 517) cyanurklorids inverkan på benzylalkohol, hvarvid tre substanser erhöles, af hvilka den ena ansågs såsom benzylurethan, den andra med smpt 153° såsom benzylicyanurat. Öfver den tredje substansen uttalades ingen mening.

E. LETTS (B. B. 1872, 90) destillerade benzylklorid med silfvercyanat och erhöles dels benzylicyanat, dels benzylicyanurat. Den sednare hade en smpt af 157°, som nära öfverensstämde med Cannizzaros uppgift.

E. MULDER (B. B. 1882, 69) undersökte ånyo natriumalkoholats inverkan på cyanbromid och erhöles dervid en kristalliserbar kropp med smpt 29°, som med kali ger cyanursyra. Denna förening är sålunda normalt etylecyanurat.

Kort tid derefter offentliggjorde I. PONOMAREFF (Ber. Ber. 1882, 513) en uppsats, hvori MULDERs experimenter bekräftades. Enligt honom smälter etyletern vid 28° . I förbigående angifver han tillika att han erhållit samma kropp genom cyanurklorids eller cyanurbromids inverkan på natriumalkoholat. Huruvida etylecyanurat liksom motsvarande metylförening vid upphettning öfvergår i isoföreningen är ej fastställt.

Jag skall här inskränka mig till att relatera experimenter inom amylallefenylserien. De äro anställda hufvudsakligen för att utröna huruvida äfven dessa vid upphettning öfvergå i isoföreningarne.

Normalt isoamylecyanurat.

Isoamylalkohol löstes i ren eter, hvarefter natrium tillsattes. Metallen löstes deri under vätgasutveckling och utan att någon fällning inträdde. En mot den använda metallen svarande mängd cyanurklorid, likaledes löst i eter, tillsattes derpå. Reaktionen är ytterst liflig, hvarför måste sörjas för god afkylning. Etern afdestillerades och vatten tillsattes, då isoamylecyanurat blandadt med amylalkohol afsatte sig sasom en olja, hvarifran amylalkoholen kan aflägsnas med vattenånga.

Isoamylecyanurat är en färg- och luktlös olja af ungefär samma konsistens som glycerin, hvilken icke kunde bringas att kristallisera äfven genom stark afkylning. Den destillerar vid en temperatur som ligger något öfver 360° , till större delen osönderdeladt. Vid destillationen öfvergår en ringa del i isoamylisocyanat, lätt igenkänlig på den stickande lukten. Destillatet innehöll den normala etern, likaledes retortåterstoden, alldenstund båda saponifierade med alkoholiskt kali ge cyanursyra. Någon amylamin kunde deremot ej påvisas. Amylcyanurat är sålunda flytande liksom amylthiocyanurat och öfvergår ej vid upphettning i isoföreningen.

Analys:

		ber.	erh.
C_{18}	— 216 —	63,72	— 63,94
H_{33}	— 33 —	9,73	— 10,01
O_3N_3	— 90 —	26,55	— —
$C_{18}H_{33}O_3N_3$	— 339 —	100,00	

Då den förut omnämnda af Hofmann framställda föreningen kokar vid omkring 200° , kan den ej vara identisk med denna.

Normalt Fenylecyanurat.

Ren fenol löstes i abs. eter och härtill sattes en beräknad mängd met. natrium, som under vätgasutveckling löstes deri. Lösningen förblef fullkomligt klar äfven efter afsvalnandet. Natriumfenylat är sålunda lösligt i eter, åtminstone i fenolhaltig sådan. Till denna lösning sattes en beräknad mängd cyanurklorid, likaledes löst i eter. En lillig reaktion inträder. Etern afdestillerades och reaktionsprodukten tvättades med vatten och alkohol och omkristalliserades ur kokande alkohol, deri den är till ringa mängd löslig och utkristalliserar derur i fina nålar. Bättre lösningsmedel är isättika, ur hvilken den kristalliserar i vackra prismor. Smpt 224° .

Det af HOFMANN genom polymerisering af fenylecyanat erhållna fenylecyanurat smälter vid 224° , da deremot fenylisocyanurat erhållit af isotrifenylnmelamin smälter vid 264° . Det förra är sålunda identiskt med den af mig framställda föreningen.

Upphettas det normala cyanuratet till 360° , utvecklas en stickande lukt af fenylisocyanat. Preparatet svärtas, men ingen destillation eller sublimation inträder. Det normala cyanuratet är sålunda ej flygtigt, men öfvergår delvis vid upphettning i fenylisocyanat. I sednare fallet förhåller det sig sålunda analogt med amylföreningen.

Normalt metylecyanurat.

Denna förening framställdes på samma sätt som isoamylföreningen. Cyanurklorid fick inverka på natriummetylat i metylalkoholisk lösning under afkylning. Sedan metylalkoholen blifvit bortdunstad, fälldes den bildade etern med vatten, hvarpå den omkristalliserades ur eter. Föreningen smälter vid 132° . Vid destillation öfvergår den delvis i det isomera vid 176° smältande cyanuratet, delvis destillerar det osönderdeladt öfver.

Det af cyanurklorid erhållna cyanuratet öfverensstämmer sålunda fullkomligt med det af HOFMANN och OLSHAUSEN medelst cyanklorid och natriummetylat erhållna cyanuratet.

Vid upphettning af normalt metylecyanurat med alkoholisk ammoniak bildas amidocyanursyrad dimetyleter. En full-

ständig amidering af cyanuratet visade sig ej vara möjligt att åstadkomma ej ens vid upphettning med ammoniak till 200°.

Normalt etylecyanurat.

Framställdes på samma sätt som metylföreningen. Det erhållna cyanuratet öfverensstämmer med det af MULDER genom inverkan af cyanbromid på natriumalkoholat erhållna cyanuratet. Etylcyanurat destillerar osönderdeladt vid 275° och öfvergår härvid icke i den isomera föreningen.

Vid inverkan af alkoholisk ammoniak vid omkring 160° erhålles en blandning af monamido- och diamidocyanursyrad etyleter. Någon fullständig amidering kunde ej heller här ernås.

Af undersökta normala cyanureterarter är det sålunda endast metylföreningen som vid upphettning öfvergår i isoföreningen.



ÖFVER

SUBSTITUERADE CYANAMIDERS KONSTITUTION

AF

PETER CLAËSSON.

MEDDELAGT DEN 12 NOVEMBER 1884.



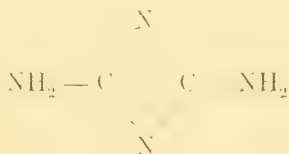
STOCKHOLM. 1885.

KONGL. BOKTRYCKERIET

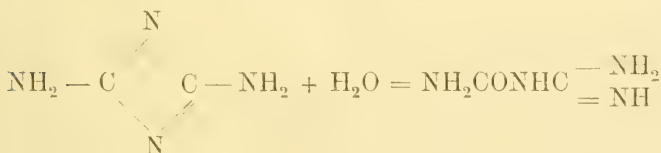
P. A. NORSTEDT & SÖNER.

Det blef efter hand fastställt, att vid afsvafning af thiokarbamider uppstår alltid i första hand cyanamider. Detta uttalades först tydligen af WEITH (B. B. 1874, 10). Såsom jag i en föregående uppsats nämt är cyanamid sjelf en normal förening, hvilket FILETI och R. SCHIFF (B. B. 1877, 426) visat. Det kan nu frågas, om de substituerade cyanamiderna äfven äro normala eller ej.

Cyanamid sjelf polymeriseras till dicyandiamid, hvilken å sin sida öfvergår till melamin, som är en normalförening. Dicyandiamid är sålunda äfven normal och har följaktligen formeln



Dicyandiamids öfvergång i dicyandiamiden är med denna formel lätt förklarlig.

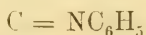


Att dicyandiamidin verkligen är karbaminguanidin öfverensstämmer också såväl med syntesen af denna förening af guanidin och urinämne som af dess analytiska förhållanden, då den vid oxidation ger guanidin och med alkalier ger kolsyra, ammoniak och urinämne. Omvänt kan såväl konstitutionen af melamin som af dicyandiamidin gälla som bevis för, att cyanamid är en normal cyanförening.

Metyl-, etyl- och fenyleyanamid polymeriseras deremot till isocyanurföreningar, såsom jag i en föregående uppsats har visat. Alla reagera de neutralt men kunna dock i eterlösning förena sig med klorväte. HOFMANN angifver visserligen, att metyl-, etyl- och fenyleyanamid äro neutrala och icke förena sig med saltsyra, men han opererade i vattenlösning. Då difenyleyanamid förenar sig med klorväte (i benzollösning), så är det väl antagligt, att monofenyleyanamid gör det äfven. Cyanamid förenar sig emellertid med 2 m. klorväte, de substituerade (karbodifenyylimid) blott med 1 m. Cyanamid förhåller sig sålunda i dubbelt hänseende olika med de substituerade cyanamiderna. Då nu cyanamid är en normalförening, så följer att de substituerade cyanamiderna äro isoföreningar, äro karbodiimider.

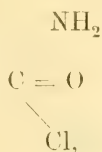
Å andra sidan har HOFMANN visat, att de monosubstituerade cyanamiderna, som erhållas genom cyanklorids inverkan på aminbaser äro identiska med dem som erhållas vid afsvafving af substituerade thiokarbamider. Då nu vid cyanklorids inverkan på aminbaser i första hand alltid måste uppstå en normal cyanamid, så följer deraf, att de monosubstituerade normala cyanamiderna redan vid vanlig temperatur öfvergå i isocyanamider. Metyl-, etyl- och fenyleyanamid böra sålunda egentligen heta monometyl-, etyl och fenylkarbodiimid. Då vidare thiokarbamid vid afsvafving ger normal cyanamid, synes deraf följa, att i allmänhet vid afsvafving af thiokarbamider båda väteatomerna tagas från en och samma kväfveatom, för så vidt sådant är möjligt, så att primärt erhållas normala cyanamider, hvilka dock, hvad de substituerade beträffar, genom omlagring öfvergå i isoföreningar.

Det må äfven här anmärkas, att då cyanamiderna reagera neutralt och deras föreningar med klorväte ej ge dubbelsalter med platinaklorid, så synes anledning vara för handen att antaga, att klorväte adderar sig på annat sätt till dem än till aminbaserna, så att t. ex. föreningen mellan klorväte och difenyleyanamid får formeln



är difenyylimidokarbaminklorid.

Sak samma torde äfven förhållandet vara med den af WÖHLER framställda additionsprodukten mellan isocyansyra och klorväter, som möjligen har en analog formel



är karbaminsyrans klorid, liksom den af mig framställda analoge föreningen mellan isorhodanvätet och klorväte då voro thio-karbaminsyrans klorid NH_2CSCl .

Särskilda försök få emellertid afgöra huruvida det finnes någon grund för dessa antaganden eller ej.

OM

RHODANINSYRA

AF

PETER CLAËSSON.

MEDDELAGT DEN 12 NOVEMBER 1884.

STOCKHOLM, 1885.

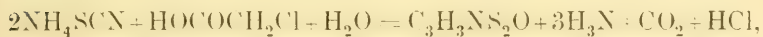
KONGL. BOKTRYCKERIET.

P. A. NORSTEDT & SÖNER.



Ungefär samtidigt med min första uppsats öfver rhodankaliums inverkan på föreningar af monoklorättiksyra (öfversigt af K. V. Akad. Handl. 1877 s. 47) offentliggjorde M. NENCKI (J. pr. Chem. 1877 b. 16 s. 1) en afhandling »über die Einwirkung der Monochloressigsäure auf Sulfocyansäure und ihre Salze», undersökningar som sålunda berörde samma tema.

Han uppvärmden en conc. lösning af monoklorättiksyra och tredubbla molekularvigten rhodanammonium i lösning. Vid omkring 70° inträdde reaktion under häftig gasutveckling och vid kallhandet utkristalliserade en kropp af gul färg med den empiriska sammansättningen $C_3H_3NS_2O$. Den kallades rhodaninsyra. Såsom sannolik formel för syrans uppkomst angifves:

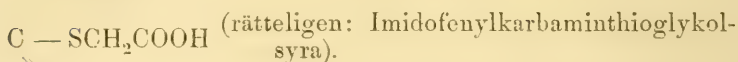


hvarvid dock iföljd af sekundära reaktioner äfven andra produkter uppkomma. Åt rhodaninsyran själf uppställdes såsom sannolik konstitutionsformel $HSCH_2C(=O)SCN$.

Å andra sidan lät NENCKI klorättiksyra inverka på fri rhodanvätesyra, erhållen genom att destillera en rhodankaliumlösning med svafvelsyra. Det erhöles dervid bredvid vexlande mängder rhodaninsyra sasom hufvudprodukt den äfven af mig (loc. cit.) beskrifna karbaminthioglykolsyran. NENCKI antar på grund häraf att reaktionen förlöper i två faser. Först bildas karbaminthioglykolsyra, som genom upptagande af vatten öfvergår i kolsyra, ammoniak och thioglykolsyra, hvilken sednare förenar sig med en andra molekul rhodanväte och ger dermed under dehydration rhodaninsyra.

Samtidigt undersökte JÄGER (ibid. s. 17) klorättikas inverkan på rhodanvätesyrade alkylaminer, hvarvid reaktionen i princip förlöper så som vid samma syras inverkan på fritt

rhodanväte. Det bildades sålunda t. ex. med anilin fenylikarbodiimidothioglykolsyra:

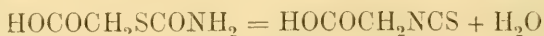


I en derpå följande uppsats »Bemerkung über die Carbaminsulfoessigsäure» (ibid. b. 17 s. 69) framhåller NENCKI identiteten emellan sin carbaminsulfoessigsäure och min karbaminthioglykolsyra, oaktadt ett par differenser förefunnos i uppgifterna beträffande hans och min syra; den ena om smältpunkten, den andra angående syrans sönderdelningsprodukter.

Jag hade angifvet smältpunkten till 132—134°, han till 142—143°. Båda uppgifterna äro i viss mening rigtiga, såsom jag genom försök öfvertygat mig om. Då syrans smältpunkt egentligen är den temperatur vid hvilken den sönderdelas, så beror den skenbara smältpunkten väsendtligen på hur hastigt syran upphettas. Sker upphettningen mycket långsamt, så framträder den af mig angifna smältpunkten, sker den deremot hastigare så blir den högre och i enlighet med NENCKIS uppgifter.

NENCKI säger vidare: »Ich habe gesehen, dass wenn grössere Portionen der Carbinthioglycolsäure vorsichtig bis zum Schmelzen erhitzt werden, sie sich unter heftiger Gasentwicklung zersetzt. Die entweichenden, zum Husten reizenden Dämpfe habe ich als Cyansäure erkannt. Hr CLAËSSON sagt nur, dass die Säure trocken erhitzt unter Gasentwicklung schmilzt. Offenbar ist die Bildung der Cyansäure von ihm dabei nicht berücksichtigt worden».

Häröfver står i min uppsats till akademien: »Vid syrans smältpunkt sker en häftig gasutveckling af cyansyra. Den smälta produkten stelnade icke vid afsvälning. Efter dess lösning i vatten och afdunstning erhöles kristaller af senapsoljeättiksyra, hvarefter moderluten gaf thioglykolsyrans reaktioner. Förloppet synes sålunda försiggå i enlighet med följande formler:



Jag har sålunda ej förbisett utvecklingen af cyansyra.

I den derefter till Ber. Ber. inlemnade öfversättningen har jag visserligen endast angifvit, att den smälter under gasutveckling och det af den grunden, att jag iakttagit, att största delen af den bortgående gasen icke är cyansyra utan kolsyra. Jag skall här anföra de tal jag erhållit vid en förnyad undersökning af dessa förhållanden.

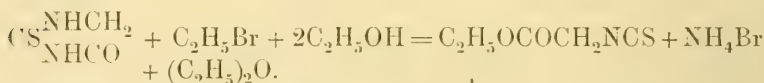
9,1 gr. karbaminthioglykolsyra upphettades i svafvelsyrebad precis till sin smältpunkt och hölls vid densamma eller högst 5-10° deröfver, så länge någon gasutveckling var märklig. Den utvecklade gasen inleddes i ammoniak. Derefter afdestades på vattenbad till torrhet, hvarvid erhöles tydliga spår af urinämne. Vid smältningen förlorade syran 1,46 gr. i vikt. Den smälta massan löstes. Efter en tids stående utkristalliserade 1,01 gr. senapsoljeättiksyra och efter ytterligare en tid ännu något till af samma förening.

Det framgår sålunda häraf, att karbaminsyran långt ifrån uteslutande sönderdelas i thioglykolsyra och cyansyra, utan reaktionsförloppet är antagligen följande. Karbaminthioglykolsyran öfvergår i vatten och sin anhydrid som är senapsoljeättiksyra, hvilken jag på grund häraf hädanefter vill kalla karbaminthioglykolyd. Det bildade vattnet sönderdelar vid den höga temperaturen en annan del karbaminthioglykolsyra i thioglykolsyra, kolsyra och ammoniak. En del af syran sönderfaller dock obestriddigen i thioglykolsyra och cyansyra.

Karbaminthioglykolyds framställning af sulfhydantoin skedde först af VOLHARD, som ansåg dess konstitution vara öfverensstämmande med det namn han gaf denna förening, nemligen senapsoljeättiksyra. Med stöd af den något närmare undersökning, jag underkastade denna förening, fann jag ej heller skäl vara att öfvergifva denna VOLHARDS åsigt. Framställningen af deriverade sulfhydantoiner och thioglykolydkarbaminer har emellertid ledt till en annan uppfattning af dessa kroppar.

Det är här först att anmärka, att CLAUS och NEUHÖFFER (B. B. X 825) undersökt sulfhydantoin's förhållande till klor, brometyl och ammoniak, för att få reda på, huruvida analoga additionsprodukter erhållas som med svafvelurinämne. Försöken visade att, hvad haloiderna och brometyl beträffar, så ej vore förhållandet. Med klor erhöles svafvelsyra, saltsyra, ättiksyra (då karbaminthioglykolyd enligt mina försök med brom ger bromättiksyra, så är väl reaktionsprodukten här otvifvelaktigt klorättiksyra i stället för ättiksyra) och urinämne.

Vid brometyls inverkan på sulfhydantoin i alkoholisk lösning vid 130–140° utgjorde reaktionsprodukterna enligt CLAUS och NEUHÖFFER bromammonium, merkaptan, etyleter, karbaminthioglykolyt samt en produkt som ansågs såsom denna sednare föreningens eter. De uppställde på grund häraf följande reaktionsformel:



Det var uppgiften om senapsöljeättiksyrans eter som närmast föranledde mig att upprepa NEUHÖFFERS försök. Enligt LIEBERMANNSS formel bör nemligen någon eter i egentlig mening af denna förening icke existera.

Jag opererade på det noggrannaste så som NEUHÖFFER föreskrifvet (Jfr utförligare hans doktorsdissertation) och använde till försöket 20 gr. ren sulfhydantoin. Det hade efter upphettningen afsatt sig betydliga mängder bromammonium och rören öppnade sig under temligen starkt tryck af bortgående kolsyra. Produkten innehöll betydliga mängder eter (en stor del af den tillsatta alkoholen var öfvergången deri), men denna stammade ingalunda från en sådan reaktion som C. och N. antaga. Det är nemligen allmänt bekant, att brometyl i likhet med många andra kroppar har egenskapen att vid högre temperatur öfverföra alkohol i eter, hvilken reaktion tydligen sker enligt formeln: $\text{C}_2\text{H}_5\text{Br} + \text{C}_2\text{H}_5\text{OH} = (\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{O} + \text{HBr}$. Bromvätet verkar å nyo på alkohol och processen fortgår sålunda, tills det uppkomna vattnet hindrar reaktionens vidare fortgång.

NEUHÖFFER erhöll äfven merkaptan. Denna hans uppgift är lika felaktig som hans förklaring af eterens uppkomst. Hans merkaptan gifver såsom han sjelf säger »mit Qwecksilberchloridlösung Fällung von Qwecksilbermerkaptid, welches durch sein charakteristische Krystallform als solches erkannt wurde». Som bekant ger emellertid merkaptan med kvicksilfverchlorid icke kvicksilfvermerkaptid utan en förening med sammansättningen



$\text{Hg—S—C}_2\text{H}_5$; en förening som i sitt utseende alls icke påminner om kvicksilfvermerkaptid, utan är en i alkohol och vatten nästan fullkomligt olöslig, finkristallinisk fällning. Hvad NEUHÖFFER antagligen på grund af den obehagliga lukten och den uppkomna fällningen med kvicksilfverchlorid ansåg såsom

merkaptan är emellertid thioglykolsyreeter, som sedan etern blifvit afdestillerad kunde utfällas med vatten. Ur den retort-återstod som NEUHÖFFER erhöLL, sedan etern blifvit frände-stillerad, afsatte sig enligt NEUHÖFFER karbaminthioglykolyL, en uppgift som jag kan bekräfta.

Den sirupslika vätska, som återstod, sedan karbaminthio-glykolyL utkristalliserat, torkade NEUHÖFFER öfver svafvelsyra, hvarefter dess kol- och vätehalt bestämdes. Den ansågs såsom i hufvudsak bestående af senapsoljeättiksyrans etyleter, ehuru den funna kolhalten differerade på flera procent från den för denna eter beräknade. Jag fann att den nämnda retortåter-stoden, sedan thioglykolsyreeteren blifvit utfälld med vatten och de sista spåren deraf blifvit aflägsnade genom extraktion med eter, gaf thioglykolsyran reaktioner. Sedan densamma blifvit utfälld med silfversalt fanns endast spår af organiska ämnen kvar.

Reaktionen i sin helhet är häraf klar. Det vid brometyls omsättning med alkohol uppkommande bromvätet förenar sig med sulfhydantoin, hvilken produkt med det bildade vattnet omsätter sig till bromammonium och karbaminthioglykolyL, liksom klorvätesyra sulfhydantoin gör. KarbaminthioglykolyL åter sönderdelas delvis vid den höga temperaturen under in-verkan af vattnet i thioglykolsyra, kolsyra och ammoniak. Thioglykolsyran delvis bindes af ammoniak, delvis eterificeras. KarbaminthioglykolyL sjelf upphettad med vatten till omkring 150° sönderdelas i kolsyra, ammoniak och thioglykolsyra och detta mera ju högre temperaturen är, såsom särskilda försök hafva visat.

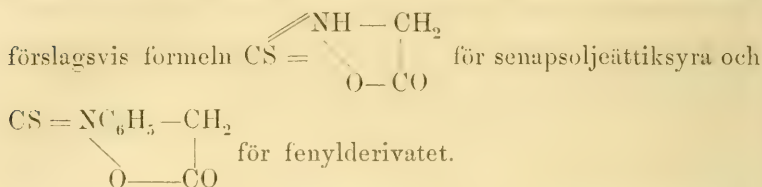
MALY (B. B. X 1849) framkastar den förmodan, att sulfhy-dantoin borde anses ha formeln $\text{CS} \begin{array}{l} \text{--- N} = \text{CH}_2\text{CO} \\ \text{--- NH}_2 \end{array}$ i stället för

den förut antagna $\text{CS} \begin{array}{l} \text{NHCO} \\ \text{NHCH}_2 \end{array}$.

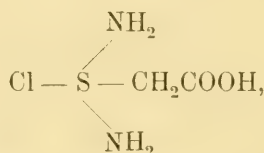
PAUL J. MEYER (B. B. X 1965) erhöLL af kloracetanilid och svafvelurinämne dels sulfhydantoin, dels fenylsulfhydan-toin, hvilken sednare kropp äfven erhöLLs af fenylsvafvelurin-ämne och monoklorättiketer: reaktioner som omkullkastade MALYS formel.

A. LANGE (B. B. XII 595) framställde difenylsulfhydantoin af difenylsvafvelurinämne och monoklorättiksyra. Genom be-handling med syror öfvergick difenylsulfhydantoin i fenyLkar-baminthioglykolyL och anilin. Den hittills använda formeln för

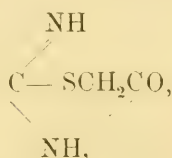
senapsoljeättiksyra är sålunda oanvändbar och han framställde



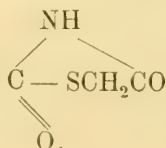
Slutligen har C. LIEBERMANN och A. LANGE (B. B. XII 1588) fullständigt utredt dessa förhållanden. De visade att difenylsulphydantoin med alkoholiskt kali ger difenylurinämne och thioglykolsyradt kali. Klorättiksyrans inverkan på svafvelurinämne är derföre primärt en addition af samma art som de af CLAUS framställda talrika additionsprodukter mellan svafvelurinämne och åtskilliga andra kroppar, äfvensom de af WALLACH framställda additionsprodukterna mellan thioamider och andra föreningar. Klorättiksyra och svafvelurinämne ge i första hand upphof till



som sedermera öfvergår i sulphydantoin:



hvilken med syror ger karbaminthioglykolyt:



Den sednare föreningen kan sålunda äfven sägas vara karbaminthioglykolsyrans anhydrid. Mina undersökningar öfver senapsoljeättiksyra öfverensstämma också fullständigt härmed. Jag visade dervid att karbaminthioglykolsyra genom behandling

äfvensom en gas utvecklas. Denna gas inledd i alkoholiskt kali bildade stora mängder cyankalium. Den utvecklade gasen består i hufvudsak af fri cyangas. Det erhållna färgämnet utfälldes med syror och renades genom lösning i alkohol, i hvilken en del löses, en del är olösligt. Det i alkohol lösliga löses i alkalier med praktfull violett färg, som af syror förvandlas till gul. Jag har ännu ej närmare undersökt detsamma utan blott öfvertygat mig om, att det har en sammansättning, som vida skiljer detsamma från NENCKIS rhodaninrödt. Genom särskilda försök har jag funnit, att samma färgämne erhålles genom inverkan af cyangas på rhodanättiksyradt salt. Sedan salunda en väg för dess rena syntes blifvit funnen, hoppas jag kunna erhålla det i en för närmare undersökning lämplig ren form. Den utvecklade cyangasen stammar från rhodanättiksyra, alldenstund jag i moderluten kunde påvisa dithioglykolsyra, en syra som af mig förut blifvit beskrifven. Då emellertid det rhodanättiksyrade saltet i ren form äfven vid kokning med vatten ej afger någon cyangas, så är det antagligt, att ifrågarörande reaktion till sitt ursprung grundar sig på inverkan af rhodanalkalit på det rhodanättiksyrade saltet. Särskildt anställda försök synas också gifva vid handen att så är fallet.

I min första uppsats om rhodanättiksyra omnämnas, att alkalier ytterst lätt förstöra densamma. Af dervid uppkomna reaktionsprodukter kunde påvisas thioglykolsyra, cyanväte, oxalsyra och ammoniak. Sedan jag sedermera blifvit närmare bekant med dithiodiglykolsyra, har det visat sig, att hufvudmängden af rhodanättiksyran vid denna reaktion öfvergår i nämnda syra och reaktionens egentliga förlopp blir alltså, att vid inverkan af alkalier på rhodanättiksyra afspaltas gruppen cyan och syran öfvergår i dithioglykolsyra.

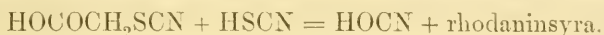
Det är förut anfördt, att NENCKI erhöll rhodaninsyra vid inverkan af klorättiksyra på rhodanammonium men karbaminthioglykolsyra vid samma syras inverkan på fri rhodanvätesyra. På grund häraf antar äfven NENCKI, för att förklara rhodaninsyrans bildning, att äfven vid klorättiksyras inverkan på rhodanammonium bildas primärt karbaminthioglykolsyra. Så är emellertid ej förhållandet. När klorättiksyra inverkar på rhodanväte, vare sig dessa föreningar äro fria eller bundna, bildas alltid primärt rhodanättiksyra, såsom man lätt experimentelt kan påvisa. Då denna syra emellertid i fri form ytterst lätt upptager vatten och öfvergår i karbaminthioglykolsyra, är

det tydligt, att denna syra alltid blir slutprodukten, så snart lösningen är sur. Blandar man sålunda i vattenlösning klorättiksyra och rhodanammonium till lika molekyler, så utkristalliserar vid afdunstning så väl vid vanlig temperatur som vid uppvärmning karbaminthioglykolsyra och ej rhodaninsyra: och är detta den bekvämaste framställningsmetoden för nämnda syra.

NENCKI antar att rhodaninsyra uppkommer af karbaminthioglykolsyra, som först sönderfaller i ammoniak, kolsyra och thioglykolsyra, hvilken sednare med en molekul rhodanväte under utträde af vatten ger rhodaninsyra. Enligt detta antagande är thioglykolsyran den egentliga modersubstansen till rhodaninsyran. Vore detta riktigt, skulle man kunna erhålla den sednare genom inverkan af rhodanväte på thioglykolsyra. Mina försök visa emellertid att så icke kan ske, vare sig komponenterna inverka på hvarandra vid närvaro af vatten, alkohol eller eter. Rhodaninsyra uppkommer deremot lätt vid inverkan af rhodanväte på rhodanättiksyra, såsom följande tvenne försök utvisa.

Blandas rent rhodanättiksyradt natron med rhodanammonium i vattenlösning och så mycket svafvelsyra tillsättes, att syrorna blifva frigjorda, samt lösningen derpå lindrigt uppvärms, inträder gasutveckling och rhodaninsyra utkristalliserar.

På följande sätt kan syntesen af rhodaninsyra af rhodanättiksyra och rhodanväte göras ännu åskådligare. Eterlösningarne af rhodanvätesyra och rhodanättiksyra blandas. För denna lösning vid vanlig temperatur afdunsta, så börjar vid en viss concentration rhodaninsyra att utkristallisera. Afdunstas deremot etern i värme, så börjar, när temperaturen har stigit till omkring 70°, en häftig reaktion under gasutveckling och rhodaninsyran utfaller med ens i nära beräknad mängd. Temperaturen stiger dervid till öfver 100°. Den utvecklade gasen utgör en blandning af kolsyra och cyansyra. Den sednare påvisades genom att leda gasen i ammoniak, då urinämne bildades. Rhodaninsyra uppkommer sålunda enligt formeln:



Den konstitutionsformel som närmast låge till hands för rhodaninsyran vore på grund häraf:



sålunda hydrothion och rhodankomplexerna placerade rakt omvändt mot hvad NENCKI antagit.

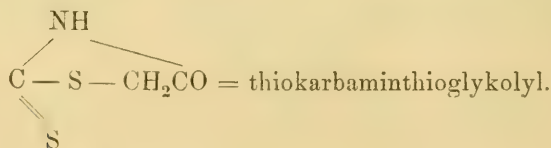
Ofvanstående syntes omöjliggör rent af NENCKIS formel. Det finnes emellertid skäl som göra äfven den nu anförda knappast antaglig.

Såsom NENCKI har visat afspaltas lätt gruppen rhodan vid rhodaninsyrans behandling med alkalier. Behandlas åter rhodanättiksyran med alkalier så afspaltas såsom ofvan är nämnt ej gruppen rhodan utan endast gruppen cyan, i det svaflet fortfarande blir bundet vid glykolyradikalen. Ett annat faktum, som motsäger antagandet att rhodaninsyran är ett sulfhydrat, är det af NENCKI framställda kopparsaltets sammansättning. Han erhöll nemligen ett kopparoxidsalt. Alla organiska sulfhydrater gifva emellertid med kopparoxidsalter redan vid vanlig temperatur och utan uppvärmning kopparoxidulsalter, under det en annan del af sulfhydratet oxideras till bisulfid. Så förhålla sig t. ex. merkaptanerna äfvensom thioglykolsyran.

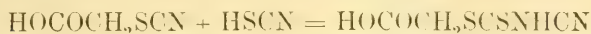
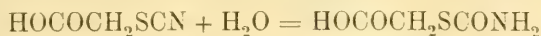
Mot NENCKIS antagande att rhodaninsyran vore thioglykolsyrans rhodanid strider äfven dess förhållande till vatten, som icke sönderdelar densamma. Erfarenheten åter har visat att rhodanider af negativa radikaler äro utan undantag högst obeständiga gent emot vatten. Så t. ex. sönderdelas ättiksyrans rhodanid af det minsta spår fugtighet.

NENCKI uppger, att om rhodaninsyra upphettas till 200° med saltsyra, den sönderfaller i kolsyra, svafvelväte, ammoniak och thioglykolsyra. Så har äfven jag funnit vara förhållandet. Stegras emellertid icke temperaturen så högt utan hålles vid 150° eller ännu bättre vid 130°, så erhålles utom nämnda produkter äfven betydliga mängder af karbaminthioglykoly. Denna sednare syra, vid högre temperatur upphettad med saltsyra, hydreras till thioglykolsyra, kolsyra och ammoniak. Det är sålunda tydligt att rhodaninsyra primärt af vattnet öfverföres i karbaminthioglykoly och svafvelväte och det vid jemförelsevis låg temperatur. På grund häraf synes sålunda rhodaninsyrans typiska konstitution vara densamma som karbaminthioglykoly och detta är just uttryckt i LIEBERMANNNS formel för rhodaninsyra.

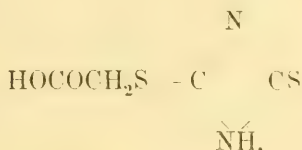
Allt talar sålunda därför att rhodaninsyra verkligen har formeln:



Ett ytterligare skäl för denna formel ligger i rhodaninsyrans ofvan anförda syntes. Såsom jag i en kommande uppsats skall visa, ha en hel mängd föreningar, innehållande gruppen SCN förmåga att addera till sig rhodanväte, hvilket i komplexen antingen ingår på samma sätt som vatten.

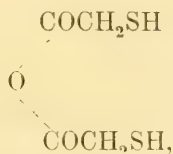


eller ock beror additionen på polymeri, så att i första hand bildas



som sönderfaller i cyansyra och $-\text{COCH}_2\text{S}-\text{CSNH}-$. Af skäl som jag sedermera skall komma till, anser jag att det sednaste antagandet är det rigtigare.

Med formeln $-\text{COCH}_2\text{SCSNH}-$ för rhodaninsyra blir dess förhållande till alkalier lätt förklarligt. Gruppen NHCS frånskiljes som rhodanväte och den återstående komplexen, som är thioglykolsyrans fullständiga anhydrid $\text{COCH}_2\text{S}-$ hydreras till

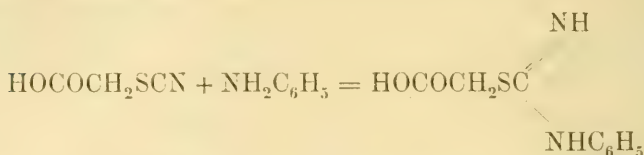


just den kropp som NEXCKI antar förutom rhodanväte bildas vid reaktionen. Karbaminthioglykolyd undergår en liknande reaktion vid inverkan af alkalier såsom jag förut visat (l. c.), det bildas thioglykolsyra, kolsyra och ammoniak.

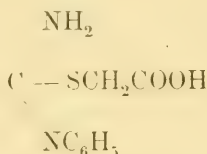
Alla rhodaninsyrans reaktioner, dess sönderdelningsprodukter såväl som dess rena syntes, tala sålunda för LIEBERMANN'S formel.

Det är förut anfördt, att till rhodanättiksyra kan addera sig vatten och rhodanväte. Det finnes äfven åtskilliga kroppar, som till denna syra förhålla sig på samma sätt, bland andra äfven aminbaser. Sättes sålunda till en eterlösning af rhodan-

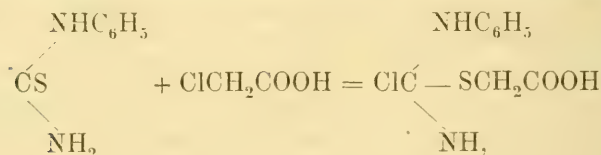
ättiksyra anilin. så utkristalliserar omedelbart och i ren form JÄGERS fenylkarbodiimidothioglykolsyra,



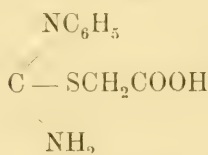
LIEBERMANN antar att denna egentligen bör heta fenylthiohydantoinisyra och ha formeln:



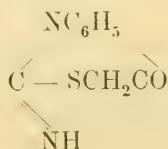
och uppstå genom klorättikas inverkan på fenylthiokarbamid:



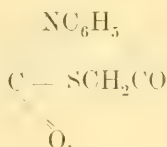
från hvilken sednare HCl afspaltas, då



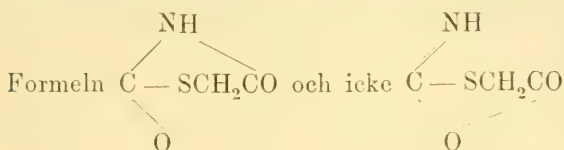
skulle bildas. PAUL J. MEYER (B. B. XIV, 1659) visar emellertid, att fenylsvafvelurinämne med monoklorättiksyra ger en med JÄGERS produkt isomer fenylsulfohydantoinisyra (ortho), från hvilken vatten kunde afspaltas och ortho-fenylsulfohydantoin erhållas



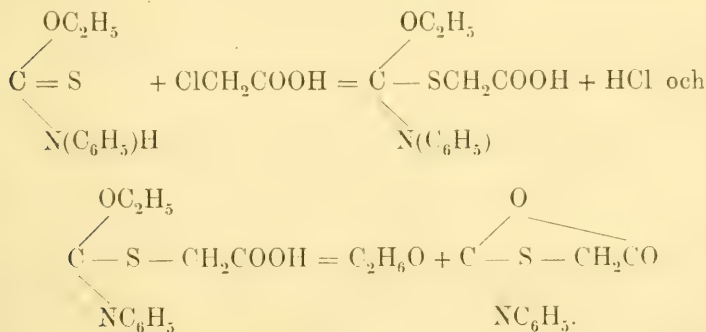
identisk med den förut af honom af kloracetanilid och svafvel-
urinämne framställda fenylsulfhydantoin hvilken sednare kunde
öfverföras i fenylkarbaminthioglykolyt:



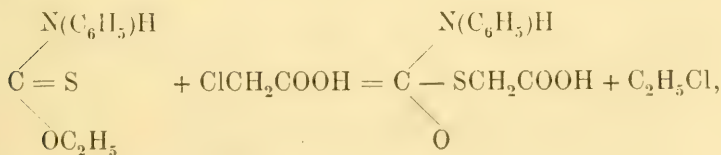
MEYERS undersökning är sålunda ytterligare ett bevis för
riktigheten af mitt ofvan anförda antagande.



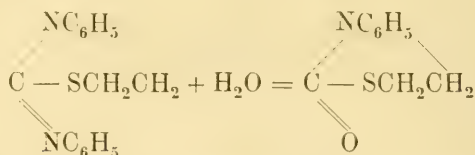
är sålunda den riktiga för thiokarbaminglykolyt eller senaps-
oljeglykolid som LIEBERMANN oegentligt kallar den för. Den
senare formeln antar LIEBERMANN (B. B. XIII 276) på grund
af karbaminthioglykolytens erhållande af fenylsulfuretan och
klorättiksyra:



Som MEYER emellertid anmärker kan reaktionen äfven ske enligt
formeln

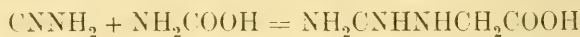


hvilket ytterligare bekräftades genom de af WILL (B. B. XV 338) framställda fenylimidofenylthiokarbaminetylens öfverförande i fenylkarbaminthioetylen:

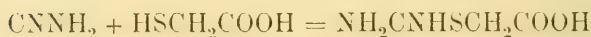


+ $\text{C}_6\text{H}_5\text{NH}_2$. (Jfr P. J. MEYER B. B. XV 516)

Slutligen må här erinras om, att ANDREASCH (B. B. XIII 1421) angifvet en annan väg att erhålla ifrågavarande kroppar, nemligen genom syntes af thioglykolsyra och cyanamider. Man har



Glykocyamin



Sulphydantoin-syra.



A NEW ISOPOD

FROM

THE SWEDISH ARCTIC EXPEDITION OF 1883

DESCRIBED BY

CARL BOVALLIUS.

WITH TWO PLATES.

COMMUNICATED TO THE R. SWEDISH ACADEMY OF SCIENCES

1884, OCTOBER 8.

STOCKHOLM, 1885.

KONGL. BOKTRYCKERIET.

P. A. NORSTEDT & SÖNER.

Posterior part
of the body

- | | | | |
|---|---|--|------------------------------|
| | | without a flattened rostrum. The first joints of the first pair of antennæ distinct from above. | |
| | are large. The second pair of antennæ long, with a multi-articulate flagellum. <i>Front</i> | Body convex. | 1. Aega. LEACH. |
| shorter than the pereion. The segments of the pereion sub-equal. The eyes. | | with a flattened rostrum, concealing the first joints of the first pair of antennæ. Body more flattened. | 2. Rocinela. LEACH. |
| | are small. The second pair of antennæ short, with a few jointed flagellum. | | 3. Alitropus. MILNE EDWARDS. |
| equalling the pereion in length. The fifth segment of the pereion longer and deeper than the preceding. | | | 4. Aegiochus n. g. |

Aegiochus n. g.

Derivatio: Αἰγίοχος, a son of Chronos.

Corpus latum ovatum, valde convexum.

Frons simplex, acumine procumbente, articulum primum antennarum primi paris totum discernente.

Oculi grandes, ocellis magnis.

Antennæ primi et secundi paris longæ, flagello multiarticulato.

Segmenta pereii inæqualia; quintum maximum, latissimum, cingulum fere formans.

Epimera inæqualia, non continua.

Pedes prensorii robusti, unguis magnis valde curvatis.

Pedes gressorii spinulosi, inæquales.

Cauda longitudine thoracem æquans.

Urus lingulatus.

The *body* is broad ovate, very convex.

The *front* is simple; the middle part of it totally separates the basal joints of the upper antennæ.

The *eyes* are large, with large ocelli.

Both pairs of *antennæ* are long with a multi-articulate flagellum.

The segments of the *pereion* are unequal; the fifth is longest and broadest, somewhat like a girth.

The *epimerals* are unequal; they do not form a continuous row.

The three first pairs of *pereiopoda* are robust, with strong curved claws. The last four pairs are unequal in length, richly provided with spines.

The *pleon* and *urus*, taken together, as long as the pereion.

The *urus* is tongue-shaped.

Aegiochus is a very well defined genus, easily recognized from all the other *Aegidæ* by the length and depth of the fifth segment of the pereion, the broken row of the epimerals, and finally by the length of the pleon and the urus, together equalling the length of the pereion. From *Aega* it is more especially distinguished by the broader body and the non-bisulcated cephalon; from *Rocinela* by the want of a flattened rostrum and the convexity of the body; from *Aliotropus* it is distinguished by the large eyes and the multi-articulate flagellum of the second pair of antennæ.

Aegiochus Nordenskiöldii n. sp.

Plate I and II.

Diagn. sp. *Corpus* colore albido splendens, non maculatum vel tuberculatum.

Caput oculis permagnis, non contiguis.

Antennæ primi paris acumen epimeri segmenti secundi haud æquant, flagello XI-articulato.

Antennæ secundi paris longiores, acumen epimeri segmenti tertii thoracis attingentes, flagello XV-articulato.

Epimera triangulata.

Pedes sexti paris longissimi.

Urus grandis, acuminatus, marginibus serratis.

Pedes anales non emarginati.

The *body* has a splendid white colour, without spots or tubercles, and is perfectly smooth as if it were polished.

The *eyes* are very large, distant from each other; they do not reach over the anterior margin of the first pereional segment.

The *first pair of antennæ* do not quite extend to the posterior extremity of the epimerals of the second segment. The flagellum consists of eleven joints.

The *second pair of antennæ* are longer; they reach to the posterior extremity of the epimerals of the third segment. The flagellum is 15-articulated.

The *epimerals* are triangulate.

The *sixth pair of pereiopoda* are the longest.

The *urus* is large, ending in a point, with serrated margins.

The *uropoda* are not emarginate.

Adult male.

The *body* is broadly ovate, convex; the broad, thick and deep fifth segment of the pereion gives the animal a very characteristic habitus; the fifth segment is much the longest and broadest of all; the seventh is the shortest. The animal is twice as long as broad.

The *head* is short and very broad, more than thrice as broad as long [7:2]; it is half as broad as the fourth pereional segment, and only little longer than the first [8.7]. The front is rounded, its procumbing part totally separates the

basal joints of the first pair of antennæ. The surface of the head is smooth, white as ivory.

The *eyes* are very large, oblong-ovate, separated from each other only by a very narrow strip of the front. The ocelli are large, arranged in eight rows. The pigment is very black.

The *first pair of antennæ* [Pl. I. fig. 2] are long, reaching to two thirds of the second pereionial segment, or to the eighth joint of the flagellum of the inferior antennæ. The last joint of the peduncle is shorter than the two preceding together, and carries a few hairs. The flagellum consists of eleven joints; the first is only a little shorter than the last joint of the peduncle [17:18], and equal to the three following joints of the flagellum together. The flagellum tapers towards its extremity; the last seven joints carry long hairs.

The *second pair of antennæ* [Pl. I. fig. 2.] are longer than the first pair, reaching fully to the hinder point of the epimeral of the third segment. The peduncle reaches to the third joint of the flagellum of the first pair. The fourth joint of the peduncle is the longest, nearly as long as the three preceding together; the fifth is a little shorter and carries some hairs and »auditory» bristles. The flagellum is fifteen-jointed; the first joint is the longest, as long as the two following together; it carries some hairs and one »auditory» bristle. The last joint is the shortest. The last ten joints carry each some few very short hairs.

The *mandibles* [Pl. I. fig. 3.] are highly developed, bent spirally, provided with a chisel-shaped molar process. They carry each a slender three-jointed palp. The second joint of the palp is the longest, the first and third are equal in length, the third carrying a comb-shaped armature of bristles, which are finely serrated at the upper margins [Pl. I. fig. 4 and 5].

The *first pair of maxillæ* [Pl. I. fig. 6] are long, straight, slender, with three large hooked spines at the tip and some small tooth-shaped at the base of the former. It makes a good boring instrument.

The *second pair of maxillæ* are laminar, surrounding the first pair as a tube. At the free margin of the tube are some small hooked spines.

The *maxillipeds* [Pl. I. fig. 7 and 8] consist each of a three-jointed peduncle and a four-jointed palp. The basal joint of the peduncle is very long and broad, linear; the second joint is short, scarcely the fourth of the first; the third is small, narrow, laminar. From the articulation between the second and third joints the thick and robust palp projects. The second joint of the palp is the longest, without spines or bristles; the third joint is short but stout and armed with short, strongly curved hooks. The last joint is armed with four long, ciliated bristles [Pl. I. fig. 9].

The *pereion*. The first segment is a little shorter than the head; the second is equal in length with the first, but broader; the third is longer [11:7], increasing in breadth; the fourth is but a little shorter than the third [10:11], and still broader. The fifth segment is *twice* as long as the preceding and much broader [17:14], it is very thick and tumid, and seen from above seems to form a girdle around the body; the sides of the segment descend very deep, interrupting the row of the epimerals, so that the epimerals of the three last segments form a row much deeper down than those of the preceding segments [Pl. II. fig. 22]. The sixth segment is only a little more than the third of the length of the preceding. [7:20], and narrower [31:34], but its sides reach as far down. The seventh segment is the shortest, it is only half as long as the preceding; its breadth is equal to that of the fourth.

The *epimerals* [Pl. II. fig. 22] of the second and third segments are equal in size, occupying the whole length of the segments, triangular, pointed backwards. The epimeral of the fourth segment is a little larger and less acutely pointed. The epimerals of the fifth and sixth segments are much larger, subequal in size, triangular; the epimeral of the fifth segment does not occupy more than two thirds of the length of the segment. The epimeral of the sixth segment, a little deeper than the preceding, occupies a part of the fifth segment and the whole length of the sixth. That of the seventh segment is smaller, but nearly as deep as the preceding; it is longer than the segment itself.

The *first pair of pereiopoda* [= gnathopoda, Spence Bate] [Pl. I. fig. 10]. The *coxa* or epimeral is not distinctly separated from the segment, the anterior corner is obtusely angula-

ted, the hinder sharply pointed. The *femur* is long, broad, three times longer than broad; a little broader at the upper margin than below; without hairs or bristles. At the lower hinder corner is a short excavation for the reception of a part of the *genu*. The *genu* is long, about half the length of the *femur*, with a short bristle at the hinder outer corner. The *tibia* is shorter than the preceding joint, with two short bristles at the inner margin, and one more slender at the outer corner. The *carpus* is very short, scarcely half the length of the preceding, with two very short tooth-like spines. The *metacarpus* is long and stout, three times longer than the *carpus*, with a tooth-like spine at the lower, inner corner. At its lower end it projects into a peculiar, flattened, semi-circular process, expressly adapted for the articulation with the *dactylus*. At the base of the *dactylus* is an excavated, rounded prominence, gliding against the metacarpal process. In this way a strong and perfect articulation is obtained. The *dactylus* is longer than the *metacarpus*, strongly hooked, and very powerful. On its inner concave side is a large prismatic excavation for the reception of the lower inner angle of the *metacarpus*. The last half of the *dactylus* is perforated to the tip, probably the ductus of a secretory gland, which is to be seen in the basal part of the *dactylus* and the nearest part of the *metacarpus*.

The *second pair of pereiopoda* [Pl. I. fig. 11]. The *femur* is a little broader and more rounded than in the first pair, but of the same length. The excavation for the reception of the *genu* is larger. The *genu* and the *tibia* are like those of the first pair. The *carpus* is half the length of the *tibia*, it carries a strong curved bristle at the inner lower corner. The *metacarpus* and its process shows exactly the same structure as in the first pair. The *dactylus* is not quite so strongly curved, but very powerful, with the same sort of excavation on its inner side, pretty like the hollowed claw of a cat. [Pl. I. fig. 12].

The *third pair* [Pl. I. fig. 13]. They are a little longer than the preceding ones, but very similar. The *femur* is longer and narrower, linear. The excavation also is a little narrower. The *carpus* is longer than half the *tibia*. The *dactylus* is less curved and a little more slender.

The *fourth pair* [Pl. II. fig. 14] are scarcely a sixth longer than the third pair. The *femur* is long, narrow and linear, with a few simple and ciliated hairs at the outer margin. There is no excavation at the lower outer corner, but the corner itself is flattened into a narrow lamina. The *genu* is only a third of the length of the femur, and armed with a row of strong bristles round the lower margin. The *tibia* is a little longer than the genu, nearly linear; it carries bristles along the inner side and round the lower margin. The *carpus* is shorter than the tibia, of the same form, and armed in the same way, but the bristles along the inner side are much smaller. The *metacarpus* is narrower, very little longer than the preceding joint, and provided with only two bristles at the lower margin and none at the side. The end of the joint forms a process for the articulation of the dactylus, as in the preceding pairs, but not so strong and well developed. The *dactylus* is indistinctly pedunculated. The excavation at the inner side is not very distinct. The dactylus is shorter than the metacarpus and feebly curved; the indistinct peduncle is more than two times longer than the claw itself.

The *fifth pair* [Pl. II. fig. 15] are nearly a third longer than the fourth pair. The *femur* is long and broad, the inner margin is curved and smooth, with the exception of two small bristles at the lower corner; the outer margin is straight, flattened into a lamina carrying some long simple hairs, and ending at the lower corner in a sharp rounded edge. When the leg is folded up, the genu, tibia and carpus are placed along this lamina. The *genu* is about a fourth of the length of the femur, with two bristles at the inner, and two at the outer lower corner. The bristles are stout, each carrying a hair [Pl. II. fig. 16]. The *tibia* is longer than the genu and carries some bristles at the lower corners. The *carpus* is a little shorter than the preceding joint, with two short bristles at the inner side, and some longer ones round the lower margin. The *metacarpus* is shorter than the carpus but longer than the dactylus. It carries three bristles along the inner side and one at the corner. At the lower outer corner there are three strong bristles and a long ciliated hair [Pl. II. fig. 17]. The lower end is produced into a process of articulation like that in the preceding pair, but stronger. The

dactylus is feebly curved and distinctly pedunculated, the peduncular part being a third longer than the claw. At the end of the peduncle are some few short hairs. At the inner side is an excavation as in the three first pairs of pereopoda.

The *sixth pair* of legs [Pl. II. fig. 18] are the longest of all, about a sixth longer than the fifth pair. The *femur* is three times longer than broad; at the inner margin it is curved and armed as in the preceding pair; the outer margin is feebly curved, flattened into a lamina much narrower than the lamina of the fifth pair, armed with 8—9 ciliated hairs. The *genu* is longer than a third of the femur, with two bristles on the inner side, 6—8 at the lower inner corner, and 5 at the outer. The *tibia* is longer than the genu, armed with three bristles along the inner margin, 4 at the lower inner corner, and 6—8 at the outer. The *carpus* and the *metacarpus*, as in preceding pair. The *dactylus* [Pl. II. fig. 19] is shorter than the metacarpus, feebly curved and distinctly pedunculated. The peduncular part is more than two times longer than the claw, with a distinct excavation.

The *seventh pair* [Pl. II. fig. 20] are shorter than the sixth pair, but a little longer than the fifth. The *femur* is feebly curved at the inner and outer margins. The outer margin wants the lamina of the other pairs of walking feet, but is provided with three ciliated and two simple hairs. The *genu* is a little shorter than half the femur, stout, and carries some short bristles at the inner side and at the lower corners. The *tibia* and the *carpus*, as in the sixth pair. The *metacarpus* is longer than the carpus, with two pairs of short bristles on the inner side, three longer ones at the lower inner corner, and some short ones at the outer. The process of articulation is well developed. The *dactylus* is about half the length of the metacarpus, pedunculated, broad at the base, feebly curved, with a distinct excavation. The peduncular part is two times longer than the claw.

The *pleon* is narrower than the base of the pereion, and composed of five joints or annuli. The surface is smooth, of the same clear white colour as the pereion. At the hinder margins of the segments two small angular prominences are to be seen. There are no traces of articulated epimerals, but the flanks of the segments extend backwards, ending in sharp points. The flanks are bent inward on the under side of the

pleon, forming a broad embrasure on both sides of the hollow, which contains the pleopoda. The first segment of the pleon is shorter than the following; the middle of it is totally concealed under the last pereional segment; its lateral parts extend backwards, and are sharply pointed. The second, third and fourth segments are equal in length, but decreasing in breadth. The lower parts of the sides are prolonged downwards, but less acutely pointed than in the first segment. The fifth segment is considerably longer than the fourth, the posterior margin is straight.

The *first pair of pleopoda* [Pl. II. fig. 23]. The peduncle is robust, hairy on its inner margin. The outer lamina is a little longer than the inner, and fringed with longer ciliated hairs.

The *second pair* [Pl. II. fig. 24]. The peduncle is shorter than the preceding one, armed at the inner margin with some thick peculiar (secretory?) bristles, not pointed; on the outer margin it carries a row of short hairs. The laminae are longer than those of the first pair and more regularly ovate, fringed with long ciliated hairs. The inner lamina carries a long styliform process, articulating with its upper inner corner. The process is tapering slightly towards the end, which is undulated. At the lateral margins it carries very short bristles, fixed on small prominences of the margins. [Pl. II. fig. 25.]

The *third, fourth and fifth* pairs of pleopoda are subequal, with broader and more rounded laminae. The inner lamina of each foot shows traces of being transversally divided. [Pl. II. fig. 26 and 27.]

The *urus* [Pl. I. fig. 1] is a little broader at the base than long; at the anterior corner on each side is an insertion for the articulation of the uropoda. The lateral margins are feebly curved, and the segment ends in a sharp point. The posterior parts of the lateral margins are serrated, the teeth again serrated, with fine ciliated hairs and short strong spines on and between the teeth. [Pl. II. fig. 30]. On the upper side the urus is provided with very small tubercles, and between these there are smaller granulae, all of the same white colour as the rest of the body.

The *uropoda* [Pl. II. fig. 29]. The peduncle is short, broad at the hinder margin, the inner corner projecting in a triangular process. This process does not reach to the half

of the inner lamina; it is not very sharp-pointed, and carries some long hairs round the tip. The outer lamina is broadly lanceolate, the hinder margins serrated and provided with ciliated hairs. The inner lamina reaches beyond the tip of the outer one and is broader, with the outer margin feebly, the inner one strongly curved. The hinder parts of the margins are serrated and ciliated as in the outer lamina.

Length. 10 m. m.

Colour. Splendid white as china; the eyes black.

Habitat. The only known specimen, a male, was captured at a depth of 120 fathoms, Lat. $59^{\circ} 33' N.$, Long. $43^{\circ} 25' W.$, south of Cape Farewell, Greenland.

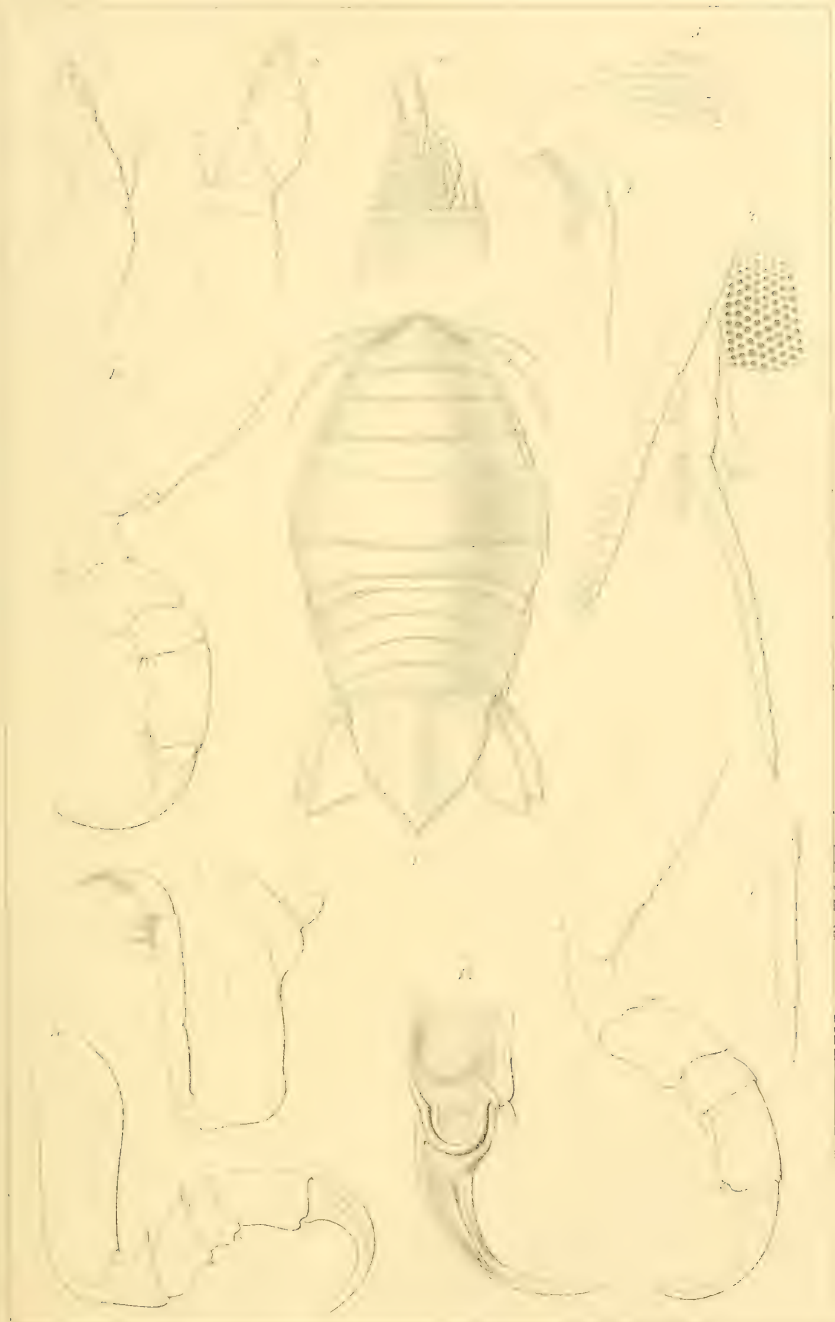
Explanation of the plates:

Plate I.

- Fig. 1. The animal seen from above.
» 2. The antennæ.
» 3. The left mandible.
» 4. The palp of the same.
» 5. The tip of the last joint of the palp.
» 6. The left one of the first pair of maxillæ.
» 7. } The maxillipeds.
» 8. }
» 9. The tip of the left one of the maxillipeds.
» 10. The left one of the first pair of pereopoda.
» 11. The left one of the second pair of pereopoda.
» 12. The dactylus of the preceding.
» 13. The left one of the third pair of pereopoda.

Plate II.

- » 14. The right one of the fourth pair of pereopoda.
» 15. The right one of the fifth pair of pereopoda.
» 16. Spines from the same.
» 17. Auditory bristle from the same.
» 18. The right one of the sixth pair of pereopoda.
» 19. The dactylus of the same.
» 20. The right one of the seventh pair of pereopoda.
» 21. The animal seen from below.
» 22. The animal seen from the side.
» 23. One of the first pair of pleopoda.
» 24. One of the second pair of pleopode.
» 25. The end of the styliform process of the same.
» 26. One of the third pair of pleopoda.
» 27. One of the fourth pair of pleopoda.
» 28. A ciliated hair from the same.
» 29. The right one of the uropoda.
» 30. A piece of the posterior margin of the urus.
-



A. M. Westergren del.

Lith. W. Schläpfer, Stockholm.

Aegiochus Nordenskiöldi.



M. Westergrén del.

1885

1

halm.

A NEW ISOPOD

FROM

THE COAST OF SWEDEN

DESCRIBED BY

CARL BOVALLIUS.

WITH TWO PLATES.

COMMUNICATED TO THE ROY. SWEDISH ACADEMY OF SCIENCE
1884, NOVEMBER 12.

STOCKHOLM, 1885.
KONGL. BOKTRYCKERIET.
P. A. NORSTEDT & SÖNER.

When some time ago I communicated to Professor W. Lilljeborg my last carcinological novelty, *Aegiochus Nordenskiöldii*, he told me that something like it existed in the collections of the zoological museum of the University of Upsala. And, indeed, by revising the undetermined Crustacea of the museum, I found the specimen described below. It had been presented to the museum by Colonel F. Bohm, of Upsala, who caught it on the gills of a whiting at Marstrand, on the west coast of Sweden, in the summer 1880.

A close inspection of the animal shows it to be a member of the family Aegidæ, and nearly allied to the genus *Rocinela*. It differs from all known species of that genus by the total want of eyes, the very multiarticulate flagellum of the second pair of antennæ, the less complicated form of the mandibles, the inequality of the epimerals, and the uncommonly long walking legs.

Seen from above its general habitus resembles the drawing of *Harponyx pranizoides*, given by G. O. Sars in his: «Oversigt av Norges Crustaceer med förelöbige Bemærkninger om de nye eller mindre bekjendte Arter»¹⁾, and but for the facts mentioned by Sars about the epimerals and the number of the legs I should feel very much inclined to place it in the genus *Harponyx*. After his description it is impossible to do so, as *Harponyx*, if not a young form²⁾, is widely separated from all the other Aegidæ by the want of the seventh pair of legs, the number of the epimerals, and perhaps also

¹⁾ Christiania Videnskabselskabs Forhandlinger 1882 N:o 18, pag. 6, pl. 2, fig. 1.

²⁾ *Aegacylla*, Dana, is perhaps the nearest relative to *Harponyx*, and both well developed larvæ of some large *Rocinela*.

by the form of the mouth organ. The general habitus however, the want of eyes, and the length of the walking legs point to the new form I am going to describe.

Such being the case it would perhaps be most rational to establish a new genus for the animal in question; but, as in many of its essential characters it agrees with *Rocinela*, I prefer to unite it with that genus, until we shall have got further notices about *Harponyx*.

***Rocinela Lilljeborgii*. n. sp.**

- Diagn. *Corpus* leniter convexum, pereion dilatatum, pleon angustum.
Frons prosiliens, rostrum deplanatum formans, dimidium articuli basilaris antennarum primi paris obtegens.
Oculi desunt.
Antennæ primi paris breves, scapo triarticulato, flagello sex-articulato, segmentum primum pereii vix attingentes.
Antennæ secundi paris longæ, flagello XXI-articulato, dimidium segmenti tertii superantes.
Segmentum primum pereii sequentibus longius.
Epimera segmenti secundi, tertii, sexti atque septimi magna, epimera segmenti quarti et quinti parva.
Pedes prensorii fortissimi, breviusculi.
Pedes gressorii longissimi, setis spinisque instructi.
Pleon angustum, lineare, pedibus magnis ciliatis, segmentum ultimum præcedentibus longius.
Urus quam pleon longior, lingulatus, marginibus, setibus instructis, non serratis.
Uropoda laminis longis lanceolatis, setosis, non serratis.

The body is not very convex, somewhat depressed. The pereion is broader than the pleon, ovate; the pleon is narrow and linear. The head wants any traces whatever of eyes; its surface is exactly as smooth and of the same colour as the first segment of the pereion. The front margin projects into a short flattened rostrum, concealing the basal part of the first joint of the upper antennæ. The upper antennæ are short, with three-jointed peduncle and six-jointed flagellum, reaching backwards to the hinder margin of the head. The second pair of antennæ are much longer, reaching to the middle of the third segment of the pereion; the flagellum is uncommonly multiarticulate, the articles being twenty-one. The first segment of the pereion is the longest, the two last ones are longer than the preceding ones. The epimerals of the

second and third segments are large, subequal, those of the fourth and fifth segments are smaller, not so deep, thus breaking the even row of the epimerals. The last two epimerals are larger and deeper, pointed backwards. The three first pairs of pereopoda are very robust, with strongly curved claws. The following pairs increase in length even to the sixth, the seventh pair is only a little shorter than the sixth. They are provided with hairs and strong spines. The pleon is much narrower than the pereion, linear, with large well developed pleopoda. The last segment of the pleon is a little longer than the preceding, which are subequal. The urus is longer than the pleon, being of the same length as the pleon and the last segment of the pereion together. It forms a long sharp tongue, with smooth margins, provided with long plumose hairs. The uropoda are long, the outer lamina is shorter than the inner; both are lanceolate with even hairy margins.

The head is nearly triangular, of about the same length as the first segment; the surface is very smooth, not granular, of the same colour as the surface of the pereion, without such bands of dark colour, as exist on the head of *Harponyx*¹⁾. No trace of eyes is to be seen. The rostrum is small, concealing only a small part of the basal joint of the upper antennæ. Its point is not sharp, but feebly rounded.

The first pair of antennæ. [Pl. I. fig. 3.] The peduncle is three-jointed, the first joint being the longest. The flagellum consists of six joints, the first one a little shorter than the second. There are no hairs or bristles on the flagellum nor on the peduncle. The basal joints of the peduncles are separated from each other, [which is a difference between the present species and *Harponyx*].

The second pair of antennæ [Pl. I. fig. 3] have five-jointed peduncles, the last joint being the longest, the second the shortest. The fourth and fifth joints carry long hairs on the back side, the three first ones are smooth. The flagellum contains twenty one joints, whereas no other known *Rocinela* possesses more than 16 joints in the flagellum. The joints are nearly subequal in length, the last one being the shortest. They

¹⁾ l. c. pag. 60.

carry bundles of long hairs in the hinder inner corners, and single small ones in the outer corners. The tip of the flagellum reaches very nearly to the fourth segment of the pereion.

The mouth is transformed into a short sucking tube, with the mandibles and maxillæ acting as rasping organs, as is the case in all Aegidæ. In the present species the mouth is a little simpler than in *Aega*, *Rocinela*, *Alitropus*, and *Aegiochus*, the mandibles being simpler, and the palp of the maxillipeds only one-jointed.

The mandibles (Pl. I fig. 4) are not spirally bent and end in a simple point without teeth. They carry each a three-jointed palp; the first joint is the broadest and longest, without hairs; the second is a little shorter, linear, with a comb of short fine bristles at the outer corner. The last joint is the shortest, and narrower than the preceding one. It carries some few short stiff hairs at the hinder margin and some longer ones at the tip.

The first pair of maxillæ (Pl. I fig. 5) are very nearly of the same form as in *Aega* and the other *Rocinela*, but with only two teeth at the tip.

The second pair of maxillæ (Pl. I fig. 6) form a tube, with three strong hooks at the tip. The tube is a little more closed than in *Aega psora* and *Rocinela danmoniensis*.

The maxillipeds (Pl. I fig. 7) are strong and robust, and consist of a two-jointed peduncle and a two-jointed palp, thus offering a more simple structure than in the two above-mentioned species. The last joint of the palp carries only some small straight teeth, but no hooks as in other species.

The pereion is slightly convex; seen from above it is broadly ovate, sharply distinct from the much narrower pleon. The first segment is the longest; when the body is bent, the other seem subequal in length. The second and third segments are the broadest; the seventh is the narrowest, but much broader than the following first pleonal segment. The epimeral of the first segment is not distinct; all the other six segments carry distinct epimerals of unequal size. The surface of the segments is smooth and hard, as if polished. On the under side (Pl. II fig. 12) of each segment

there is a deep excavation for the reception of the femur of the corresponding leg.

The first pair of pereiopoda (Pl. I. fig. 8). The epimeral of the first segment is not distinct, but the border of this segment goes down as deep as the epimeral of the second (Pl. I. fig. 11). The *femur* is broad, thick, and convex, a little narrower at the upper end. At the outer margin it carries two very long hairs, at the inner lower corner a short stout spine. The *genu* is long, more than two thirds of the femur, smooth. The *tibia* is not half the length of the preceding joint, and carries at the outer lower corner a bundle of long linear bristles, bent at the tip and serrated (Pl. I. fig. 9). The *carpus* is short, of about the same length as the preceding joint, without hairs or bristles. The *metacarpus* is long and stout, longer than the two preceding joints together. At its lower end it is extended into a semicircular process for the articulation with the dactylus. This process has the same structure as that described in Aegiochus;¹⁾ and is a peculiar apparatus existing in all the Aegidae I have examined. The dactylus is strong and powerful, bent as a hook.

The second pair of pereiopoda. The epimeral is distinct from the segment, large, straight as to its anterior, upper, and posterior margins, feebly curved as to the under margin. The *femur* is longer than in the preceding pair, broad, linear, smooth. The *genu* is about half the length of the femur, smooth. The *tibia* is nearly half the length of the genu and carries some straight bristles at the outer margin. The *carpus* is a little shorter than the preceding joint, smooth. The *metacarpus* is much longer than the two preceding joints together, and of exactly the same structure as in the first pair. The *dactylus* is less strongly curved than the dactylus of the first pair.

The third pair of pereiopoda (Pl. I. fig. 10) resemble very nearly the second pair but are a little longer and more slender.

The fourth pair of pereiopoda (Pl. II. fig. 13) are the first and shortest pair of walking legs. The epimeral is small and does not occupy more than the anterior half of the

¹⁾ Bihang till Kongl. Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Band 10. N:o 9 pag. 8.

under border of the segment, it is not more than half as deep as the epimeral of the preceding segment (Pl. I. fig. 11). The *femur* is short and ovate. The *genu* is as long as the femur and funnel-shaped, with some strong short spines around the lower margin. The *tibia* is shorter and more linear. The *carpus* is as long as the tibia, with some short spines at the inner margin. The *metacarpus*, of the same length, is narrower and more linear. The *ductylus* is strong, longer than the metacarpus.

The *fifth pair of pereopoda* (Pl. II. fig. 14). The epimeral is of the same form as in the preceding segment, not deeper, but a little longer. The *femur* is broad, with an excavation at the outer lower corner for the reception of the uppermost part of the genu. The *genu* is long, nearly as long as the femur, with strong spines at the lower margin. The *tibia* is shorter, scarcely more than half the length of the preceding joint, but broader, with strong tooth-like spines around the lower margin (Pl. II. fig. 15). The *carpus* is a little longer than the tibia, with a long strong bristle at the lower inner corner. The *metacarpus* is as long as the preceding joint, but narrower; the angulated under margin projects into a process of articulation; at its inner corner is a thick obtuse spine containing a glandle with a ductus opening at the tip of the spine (Pl. II. fig. 16).

The *sixth pair of pereopoda* (Pl. II. fig. 17) are the longest of all and, when extended backwards, reach nearly to the end of the urus. The epimeral is distinct, much larger and deeper than the preceding one, but does not occupy the whole under border of the segment; it is slightly pointed at the posterior corner. The femur is broad and stout, with a little plumose hair at its outer margin, and some short bristles at its lower, inner corner. The *genu* is longer than the femur, with some peculiar bristles and spines at its lower margin. The spines are stout, obtuse, with a small hair fixed near the tip; the interior of the spines is filled with a glandular mass. The bristles are sharp-pointed, plumose at the tips. (Pl. II. fig. 18). The *tibia* is shorter than the genu, with short spines at the lower margin, concavated at the inner margin. The *carpus* is longer and narrower than the tibia, concavated at the inner margin, and armed at the lower inner corner with a long strong spine, and around the

lower margin with a row of shorter ones. The *metacarpus* is of about the same length as the carpus, with some few very short bristles at the inner margin. The *dactylus* is shorter than the metacarpus.

The seventh pair of *pereiopoda* (Pl. II. fig. 19). The epimeral is of the same shape as the preceding one, but placed a little deeper down; the posterior corner is sharper than in the epimeral of the sixth segment. The *femur* is broader at the upper end; at the lower outer corner is a large excavation for the reception of a part of the genu. The margins of the excavation are bordered with short stiff hairs. The *genu* is hardly longer than the femur; broader at the lower end, with thick obtuse spines around the lower margin. The *tibia* is a little longer than half of the genu; the inner margin is concavated, with two short spines; the lower margin carries some strong spines, especially at the outer corner. The *carpus* is longer than the tibia, concavated at the inner margin, carrying some spines there and at the lower corners. The *metacarpus* is only a little shorter than the carpus and of the same structure as in the preceding pair. The *dactylus* is shorter than the metacarpus.

The *pleon* is of nearly the same length as the three last segments of the pereion, linear, and narrower than the last segment of the pereion. The first segment of the pleon is only partly concealed by the preceding pereional segment. The four first segments are subequal in length, reaching pretty far down; the hinder corners are sharply angulated. The last segment is longer and a little broader than the preceding ones; its hinder corners are more sharp-pointed. The surface of the pleon is smooth, without granulation.

The first pair of *pleopoda* (Pl. II. fig. 20). The peduncle is long and stout, the outer lamina is larger and carries longer hairs than the inner. At its upper end it shows traces of partition.

The second pair of *pleopoda* (Pl. II. fig. 21) are a little larger than the first. The inner lamina carries a styliiform process, articulated against its inner corner. No line of partition on the outer lamina.

The third pair of *pleopoda* (Pl. II. fig. 22) resemble the first, but the outer lamina is larger. The hairs which border its margins are plumose (Pl. II. fig. 23).

The fourth pair are quite like the preceding one.

The fifth pair (Pl. II. fig. 24) are a little larger, but of the same form.

The urus (Pl. I. fig. 1.) has the form of a long tongue or a sharp spade; it is longer than broad; its upper side is feebly convex, smooth, without granulations or tubercles. The margins are perfectly even, not serrated, but fringed with a row of long plumose hairs (Pl. I. fig. 2). The urus is longer than the pleon. It equals in length the pleon and the last segment of the pereion together.

The uropoda (Pl. II. fig. 25). The peduncle is long, broader at the hinder margin; the inner, hinder corner is sharply angulated, but does not project into a long process as in the other *Rocinelæ*. The laminae are long, lanceolate, fully reaching to the end of the urus. The outer lamina is shorter than the inner; both have even margins, fringed with long plumose hairs.

Length. 22 m. m.

Colour. Yellowish.

Habitat. Only one specimen, a small one, is known; this was loosened with a knife from the outer side of the head of a whiting, where it had fixed itself most tenaciously over the opening of the gill cavity. It was caught in the summer 1880 at Marstrand, on the West coast of Sweden.

Explanation of the plates:

Plate I.

- Fig. 1. The animal seen from above.
2. A plumose hair from the margin of urus.
3. The first and second pair of antennæ.
4. The mandible.
5. The first maxilla.
6. The second maxilla.
7. The maxilliped.
8. The first pair of pereopoda.
9. A bristle from the tibia of the same leg.
10. The third pair of pereopoda.
11. The animal seen from the side.

Plate II.

12. The animal from below.
13. The fourth pair of pereopoda.
14. The fifth » » »
15. Spines and bristles from the tibia of the fifth pair.
16. Spine from the metacarpus of the same pair.
17. The sixth pair of pereopoda.
18. Spine and bristle from the genu of the sixth pair.
19. The seventh pair of pereopoda.
20. The first pair of pleopoda.
21. The second pair of pleopoda.
22. The third » » »
23. Hair from the same.
24. The fifth pair of pleopoda.
25. The uropoda.
-





NEW OR IMPERFECTLY KNOWN

ISOPODA,

DESCRIBED BY

CARL BOVALLIUS.

PART I.

WITH 5 PLATES.

COMMUNICATED TO THE ROY. SWEDISH ACADEMY OF SCIENCE 1885.

JANUARY 14.

STOCKHOLM, 1885.
KONGL. BOKTRYCKERIET.
P. A. NORSTEDT & SÖNER.

It is the very rich carcinological collections in the Zoological State Museum at Stockholm, most liberally placed at my disposal by Professor Sven Lovén, that have afforded the principal material for the present and following notes on new or imperfectly known Isopods. Valuable contributions have been received from Professor Tycho Tullberg, Director of the Zoological Museum of the University of Upsala, and furnished from my own collections made during many years of travels and voyages at home and abroad.

Abbreviations.

- Z. M.* = The Zoological State Museum of Sweden at Stockholm.
U. M. = The Zoological Museum of the University of Upsala.
C. B. = The author's collections.
-

1. *Aega Schioedteana*, n. sp.

Deriv. The name in honour of the celebrated Zoologist J. C. Schioedte, late Professor of the Copenhagen University.

Diagn. *Corpus* elongatum, ovatum, ter fere longius quam latius.

Caput plus duplo latius quam longius; acumen frontis declive, tertiam partem articulorum basaliū antennarum primi paris discernens.

Oculi permagni, fere contingentes.

Antennæ primi paris marginem posteriorem capitis non attingentes, flagello septem-articulato.

Antennæ secundi paris marginem posteriorem segmenti primi pereii vix attingentes, flagello XIII-articulato instructæ.

Segmentum primum *pereii* longissimum, cetera longitudine decrescentia, segmentum septimum obtectum.

Epimera subæqualia introrsum versa, ita ut animal subter appareat quasi marginatum.

Metacarpi *pedum pereii* parium trium priorum lamina cultriformi præditi.

Pedes septimi paris longissimi, spinulosi. Urus grandis, triangularis, acuminatus, longitudine latitudinem fere æquante.

Ramus interior *pedum uri* latere exteriori profunde inciso.

The *body* is elongate-ovate, nearly thrice as long as broad (35:13).

The *head* is more than twice as long as broad (28:11); the middle of the front separates only a third of the basal joints of the upper antennæ.

The *eyes* are very large; the space between them is very narrow.

The *first pair of antennæ* are shorter than the head, provided with a seven-jointed palp.

The *second pair of antennæ* reach nearly to the hinder margin of the first pereional segment. The flagellum consists of 13 articuli.

The first segment of the *pereion* is the longest; the following decrease in length; the seventh is concealed by the sixth.

The *epimerals* are subequal in length; they are bent inwards, forming a kind of frame on the under-side of the body.

The metacarpi of the three first pairs of *pereiopoda* are provided with a chisel-formed process. The seventh pair is the longest, spinigerous.

The *urus* is large, triangular, pointed, nearly as long as broad (17:18).

The inner ramus of the *uropoda* is deeply incised on its outer margin.

In habitus our animal comes very near *Aega Deshayesiana*, but it is easily distinguished by the sixth pereional segment being concealed, by the shorter *urus*, and by the chisel-formed processes on the metacarpi of the three first pair of legs. From *Aega Webbii* it differs also by the form of the *urus*, and from *Aega dentata* by the shorter antennæ, by the armature of the three first pairs of *pereiopoda*, and by the form of and the *urus* of the *uropoda*.

Adult male.

Pl. I. fig. 1—10.

The front margin of the *head* is rounded, the hind margin is straight.

The tip of the front separates only the uppermost third of the basal joints of the upper antennæ from each other. The head is a little broader than half of the fourth pereional segment (7:13) and more than thrice as broad as long. Its upper surface is smooth. The *eyes* are very large, oblong. The anterior margins are angulated. There is only a narrow strip of the front between them. The ocelli are arranged in nine rows, with twenty-two in the middle one.

The *first pair of antennæ* (Pl. I fig. 4) do not reach to the hinder margin of the head. The basal joint of the peduncle is the longest and broadest, the third one the shortest. The flagellum consists of seven short articuli carrying very short hairs; the last article is very slender.

The *second pair of antennæ* (Pl. I fig. 4) reach very nearly to the hinder margin of the first pereional segment; the two first joints of the peduncle are very short, the third is a little

longer, the fourth the longest, longer than all the preceding together. The fifth joint is a little shorter. The flagellum consists of 13 joints; the first is the longest, the last one very small; they all carry minute hairs.

The first segment of the *pereion* is a little longer than the second (11:10); the following decrease in length down to the seventh, which is almost totally hidden by the sixth. The fourth and fifth segments are the broadest, the first is the narrowest (13:10). The second and third segments have each a short triangular spot on the backside; the fourth and fifth segments have each a long, elongate-ovate spot. The lateral corners of the seventh segment are visible behind the sixth segment. The sixth segment is only half as long as the first.

The *epimerals* (Pl. I fig. 3) are all bent inwards nearly rectangulary to the sides of the segments, thereby forming as it were a frame on the under-side of the body. The epimerals of the second and third segments are equal in length, rounded at the corners. That of the fourth segment is a little longer and feebly pointed at the hinder corner. All the four first epimerals occupy the whole of the sides of the segments. The following two epimerals do not occupy more than three quarters of the length of each segment; they are directed a little more downwards and sharp-pointed. The last epimeral is shorter, sharp-pointed, and does not reach to the posterior corner of the first pleonal segment; it occupies the whole of the length of the segment.

The first pair of *pereiopoda* (gnathopoda Sp. Bate) (Pl. I fig. 5). The femur is robust, carrying five richly ciliated bristles, but no spines. The genu is long, longer than the tibia and the carpus together, and longer than the metacarpus. The tibia is armed with 1—8 short stout spines. The metacarpus is longer than the two preceding joints, and from its inner margin extends a sharp chisel-formed process of the same structure, but not so broad, as in *Aega magnifica*, Dana. The dactylus is strong, not carinated. The second and third pairs resemble the first, but the femora carry only 3—4 ciliated bristles, and the dactyli are more robust. From the fourth to the seventh pair the legs increase in length. The femora carry long ciliated bristles, the following joints except the dactyli are richly beset with longer or shorter spines. All the joints are broad. (Pl. I fig. 7).

The *pleon* is only a little narrower at the base than the fourth segment (23:26), and much broader than long; the first segment is almost totally covered by the sixth and seventh pereionial segments, its visible part being scarcely longer than a fifth of the fifth pleonal segment. The second, third, and fourth segments are nearly equal in length and breadth. The fifth is longer by a third and a little narrower. The pleon equals the fourth, fifth, and sixth pereionial segments in length.

The second pair of *pleopoda* (Pl. I fig. 8) carry a styliform process, very long, fringed with short fine hairs.

The *urus* is triangular with nearly straight sides, smooth on its upper side; its margin fringed with very short, plumose hairs. At the pointed end of the *urus* there are some few short spines among the hairs (Pl. I, fig. 10). The *urus* is nearly as long as broad (17:18), longer than the pleon (17:15). The pleon and the *urus* together are shorter than the pereion with the head, but equal in length to the pereion.

The *uropoda* (Pl. I. fig. 9) do not reach to the end of the *urus*. The rami are longer than the peduncle. The inner ramus is not shorter than the outer, finely spotted with dark red, deeply incised at its exterior margin. The margins of both rami are serrated, provided with minute spines, and fringed with long simple hairs.

Colour. Yellowish-white with smaller and larger spots of dark red.

Length. 18,5 mm.

Hab. The Adriatic. (C. B.)

The only specimen I have seen I found in a Collection of Crustaceans from the naturalist-merchant Carl Wessel in Hamburg. It is an adult male.

2. *Aega magnifica*. Dana.

Syn. 1853 *Pterelas magnificus*, Dana. United States Expl. Exp. Crustacea vol. II, pag. 769, pl. 51. fig. 4 a—f.

? 1879. *Aega magnifica*, Schioedte et Meinert. Symb. ad monogr. Cymothoarum. I, pag. 363, tab. VIII, fig. 14—19.

The specimen here described differs in many points from the description given by Schioedte and Meinert, and approaches more nearly to the type of Dana's description; but as it is

not fully identical with this type, it would perhaps be convenient to put it down as a variety of *Aega magnifica* Dana. In any case it seems fit to give here a short account of its characteristic points.

Virgo.

Pl. II. fig. 11—17.

The form of the *body* is elongate-ovate, nearly thrice as long as broad (71 : 26). According to Dana's specimen the animal is quite thrice as long as broad (28 : 9), according to the specimens of Schioedte and Meinert it is only a little more than twice as long as broad (74 : 33).

The *head* is as long as the first segment of the pereion. The middle part of the front separates half of the basal joints of the upper antennæ.

The *eyes* are large, distant by a third of the breadth of the head. They are nearly rectangular, the hinder margin being feebly rounded, with the ocelli arranged in seven rows, 15 in each.

The third joint of the peduncle of the *first pair of antennæ* is the longest. The flagellum, ten-jointed, reaches beyond the anterior margin of the first segment.

The flagellum of the *second pair of antennæ* is 19-jointed; it reaches beyond half of the second pereional segment. (Pl. II fig. 13).

The fifth and sixth segments of the *pereion* are the longest, equal, much longer than the first (4 : 3) (in Dana's specimen the first sixth and seventh segments are equal, the fifth much shorter). The fifth, sixth, and seventh segments being deeper than the preceding, the row of *epimerals* is not even (Pl. II. fig. 12). On each of the epimerals of the second to fifth segments there is an oblique line. The two last epimerals have two such lines. The last epimeral does not reach half-way of the first pleonal segment. The femora of the three first pairs of *pereiopoda* (Pl. II. fig. 14) are smooth, without bristles or spines; the tibiæ are provided with five to six very short, obtuse, stout spines. The metacarpi throw out each a broad hatchet-like process, the edge of the process equalling the metacarpus in length.

The *pleon* equals in length the head and the first pereional segment. It is quite free, the first segment not at all covered

by the last pereionial segment; it equals the fifth in length. The second segment is half the length of the first. The third and fourth a little longer, equal.

The *urus* is shorter than the pleon (23:24) and broader than long (28:23), subacute, feebly crenulated, fringed with long plumose hairs.

The *uropoda* (Pl. II. fig. 16) equal the *urus* in length; the process of the peduncle is very long, obtusely pointed. The outer ramus is elongate-ovate, fringed with long plumose hairs. The inner ramus is longer and broader, the posterior margin rounded, crenulated, with short sharp spines; the whole ramus is fringed with long plumose hairs (Pl. II. fig. 17); the exterior margin is slightly incised.

The *colour* is red with oblong white spots; there is no larger darker spot on the dorsal side of the fifth segment as stated in the description of Schioedte and Meinert. The lower parts of the sides of the first, second, third, and fourth segments are bordered with dark violet; on the fifth segment there is no trace of such a dark colour, but on the sixth and seventh pereionial segments, and on all the pleonal segments it reappears; at each corner of the anterior margin of the *urus* there is also to be seen a dark violet spot. The three first epimerals have the same colour, the three last ones are only partly spotted with violet.

Length. 26 m. m.

Hab. Magelhaen's Sound. (Z. M.)

From the circumnavigation of H. Swed. M. Frigate *Eugenie*.

3. *Rocinela maculata*. Schioedte et Meinert.

Syn. 1879. *Rocinela maculata*. Schioedte et Meinert. Symb. ad mongr. Cymothoarum. I. pag. 393, tab. XII. fig. 10—12.

Among the crustaceans in a collection which I bought 1877 of the naturalist-merchant Wessel in Hamburg there are also two *Rocinela*, a male and a female, that are identical, I think, with Schioedte and Meinert's new species *Rocinela maculata*. As only the male is hitherto known and described, it seems very fit to give here a short description of an ovige-

rous female, and this the more because there are some differences between it and the already described male.

Ovigerous female.

Pl. II. fig. 18—23.

The *body* is ovate, more than twice as long as broad (56:25), the characteristic dark spots on the sides of the fourth pereional segment and at the base of the urus are very distinct.

The *head* is more than twice as broad as long, longer than the first pereional segment.

The *eyes* are not very small, with eight rows of ocelli, 11 in the median row.

The *first pair of antennæ* reach to half of the first pereional segment; the flagellum is five-jointed, the last joint furnished with a bundle of very short hairs. (Pl. II. fig. 20).

The *second pair of antennæ* reach to a third of the third pereional segment. The flagellum is fifteen-jointed.

The fifth segment of the *pereion* is the longest, the first and second the shortest, the seventh segment is a little shorter than the fifth (10:13).

The three last *epimerals* are longer than the preceding, sharp-pointed, not occupying the whole length of the segments (Pl. II. fig. 19). The last epimeral quite reaches to two thirds of the second pleonal segment.

The tibiæ of the three first pairs of *pereiopoda* carry three very short, stout, obtuse spines each, the metacarpi three sharp ones (Pl. II. fig. 21).

The *pleon* is shorter than the two preceding segments together (9:11). The first segment is totally covered by the last segment of the pereion. The fifth is the longest. The dark spots extend from the urus over the corners of the two last pleonal segments.

The *urus* is longer than the pleon (10:9), broader by a third than long, rounded, not subacuminate; the margins are crenulated, provided with stout, sharp spines and long, plumose hairs (Pl. II. fig. 23).

The *uropoda* (P. II. fig. 22) are but a little shorter than the urus, the process from the peduncle very sharp and long.

The inner ramus is longer and broader than the outer; both are fringed with plumose hairs all around, and the exterior margins are crenulated and provided with stout spines.

Colour. Brown, the spots dark red.

Length 30 m. m. (The male 31 m. m.).

Hab. Greenland. (Z. M. C. B.).

The locality is very interesting, as the only hitherto known specimen is a native of north-eastern Asia, being taken by Koch at Wladiwostock.

4. *Glossobius auritus*, n. sp.

Deriv. The name given on account of the flattened ear-shaped extensions from the anterior corners of the first segment of the pereion.

Diagn. *Caput* magnum, non immersum, longitudine latitudinem fere æquans.

Oculi manifesti, triangulati.

Antennæ primi paris crassæ, marginem anticum segmenti primi pereii non superantes, antennis secundi paris non breviores.

Segmentum primum *pereii* non excavatum, sed in angulos auriculiformes productum, latius dimidio segmenti quarti. Segmentum septimum multo angustius quam segmentum quintum. Femora paris sexti pedum pereii longiora quam latiora.

Pleon immersum, segmentum primum latius dimidio segmenti quinti.

Urus latior quam longior, lateribus rectis, margine postico leviter excavato.

Uropoda longa, paullo breviora quam *urus*.

The *body* is convex, more than twice as long as broad.

The *head* is large, not immersed in the following segment, nearly as long as broad (7 : 8).

The *eyes* are distinct, triangular.

The *antennæ* of the first pair are robust and thick, not reaching beyond the hinder margin of the head. The second pair of the *antennæ* are not longer than the first.

The first segment of the *pereion* is not excavated for the reception of the head, and the anterior lateral corners do not form processes, but only flat ear-shaped extensions; the first segment is broader than half of the fourth segment. The seventh segment is much narrower than the fifth. The femur of the sixth pair is longer than broad.

The *pleon* is immersed, though not deeply; the first segment is broader than half of the fifth.

The *urus* is only a third broader than long; the sides are straight, the hinder margin but slightly excavated.

The *uropoda* are not much shorter than the *urus*.

The general habitus of the animal is more similar to the drawing of *Ceratothoa crassa*, given by Dana 1853 in his splendid work »Crustacea» from »The United States exploring expedition», than to the description and the figures of *Glossobius laticauda* in Schiöcde and Meinert's new excellent treatise »Symbolæ ad monographiam Cymothoarum», and, for my part, I suppose, that the last-named authors are wrong in making Dana's *Ceratothoa crassa* synonymous to Milne-Edwards' *Cymothoa laticauda*.¹⁾ But the animal here described is proved to be distinct from both of them, *Glossobius laticauda*, H. Milne-Edwards, as well as *Glossobius crassus*, Dana, not only by the habitus of the ovigerous female, but also by many details. The males of most of these animals are so similar to one another, that it is very difficult to indicate quite good characteristics for the different species; but the male of the new *Glossobius* shows some differences from the hitherto known two species of males, *G. linearis* and *G. laticauda*. The male of *G. crassus* is not known.

Ovigerous female.

Pl. III. fig. 24—28.

The form of the *body* is nearly elliptical, the anterior part being convex and somewhat compressed, the posterior more flattened. The fifth segment of the pereion is the broadest, the first is the narrowest.

¹⁾ *Glossobius, crassus* Dana, as its name ought to be now-a-days, differs from *Glossobius laticauda*, Milne-Edwards, by a broader and stouter head, a more ovate form of the body, and a different form of the *urus*, the *urus* being more quadrangular with the hinder margin only feebly excavated. The first segment of the pereion is also longer and narrower in comparison with the fourth than in *G. laticauda*. The third pereional segment is the broadest of all, not the sixth as in *G. laticauda*. The seventh segment is very narrow, narrower than the first, with the corners covered by the sixth. The femora of the sixth and seventh pairs of perieopoda are quite as broad as long.

The *head* is triangular, the front rounded at the tip with straight, not excavated sides. The head is only a little broader than long (8 : 7), the surface is smooth.

The *eyes* are small but very distinct, triangular, situated uncommonly near the middle line of the head (Pl. III. fig. 26).

The *first pair of antennæ* are very stout and thick, without any distinction between peduncle and flagellum, seven-jointed, the third joint being very broad and swollen, the fourth to the seventh tapering towards the end, but very robust. The whole antenna is somewhat compressed from the sides. When extended backwards, they do not reach over the anterior margin of the first segment of the pereion (Pl. III. fig. 26).

The *second pair of antennæ* are a little more slender than the first, of the same length, nine-jointed; the fourth and fifth joints are the longest, equal; the three last ones are the smallest, slender, tapering towards the end. Both pairs of antennæ want hairs or bristles.

The *mandibles* are small, curved, with a short robust three-jointed palp.

The *maxillæ* are provided with broad, thin, laminar extensions.

The *maxillipeds* consist each of a strong thick peduncle provided with a broad convex lamina, fringed with short hairs at the anterior margin. These laminae protect the mouth as a large lid. On the tip of the peduncle is a short three-jointed palp. (Pl. III. fig. 27).

The *pereion*. The first segment is quadrangular, a little broader than long (15 : 13), somewhat compressed, convex. The anterior margin is rounded, the posterior a little protruding in the middle. The sides are nearly straight with the anterior corners extended, flattened, ear-shaped. The posterior corners are rounded. The second, third, and fourth segments are equal in length, increasing in breadth. The hinder corners of the second and third are truncated, those of the fourth nearly angulated. The fourth segment is not twice as broad as the first (22: 13). The fifth segment is the broadest, twice as broad as the first (26: 13), a little shorter than the preceding, and as long as the sixth and seventh together; its upper side is more flattened, the posterior corners are truncated and emarginated. The sixth segment is but a little narrower than the preceding, with the posterior corners

rounded. The seventh segment is not half the length of the sixth (3: 8) and much narrower; it is a little broader than the first (17: 13).

The *epimerals* (Pl. III. fig. 25) of the second and third segments are large, ear-shaped, each occupying more than half the length of the segment. The epimeral of the fourth segment is smaller, narrower behind, scarcely occupying half the segment. The epimerals of the fifth and sixth segments are long and broad; they occupy two thirds of the length of the segment each. The last epimeral is high, perpendicular, concealing the whole side of the segment.

The first pair of *pereiopoda* (Pl. III. fig. 28) are the smallest; the tibia is very broad with a short process against which the dactylus impinges. The second, third, fifth, and sixth pairs are very stout and strong; the dactylus of the third pair is a little smaller than in the others (Pl. III. fig. 29). The femora of the fifth, sixth, and seventh pairs are very broad, but not as broad as long.

The *incubatory pouch* consists of four feebly striated laminae on each side.

The *pleon* is immersed in the last segment of the pereion, but not so deeply as in *G. laticauda*. The lateral parts of the first segment are partly covered by the seventh segment of the pereion. Its visible part is broader than half of the fifth segment. The second to fifth segments are equal in breadth; the fifth is the longest. The pleon is shorter than the urus (7: 9), but fully as broad. The pleon and urus together are only a third of the length of the pereion with the head, and a fourth of the length of the whole animal. (In *G. laticauda* pleon and urus together are about a third of the whole length, in *G. crassus* exactly the third.)

The *pleopoda* are largely developed, reaching over half the under-side of the urus.

The *urus* is broader by a third than long; its anterior margin is broader than the posterior (3: 2), deeply emarginated in the middle, with two lateral and one median angular extensions. The lateral margins are straight, the hinder corners feebly rounded. The posterior margin shows a very slight emargination.

The *uropoda* (Pl. III fig. 30) quite reach to the hinder margin of the urus. They are robust with lanceolate subequal rami. The rami are longer than the peduncle.

The *colour* is yellowish-white, with small dark-green spots (the Atlantic specimen), or red-brown with dark spots (the Indian specimen).

Length. 25—30 m. m.

Adult male.

Pl. III. fig. 31.

The *body* convex, the anterior part broader, tapering backwards, more than twice as long as broad (37 : 14).

The *head* triangular, broader than half of the fourth pereional segment (16 : 15), broader than long (8 : 5), deeply immersed.

The first pair of *antennae* longer than the second, reaching beyond the anterior margin of the first segment.

The first segment of the *pereion* is the longest, being as long as the fifth and the sixth together; the anterior corners are produced into short processes on each side of the head. The second, third, and fourth segments are equal in length and breadth. The fifth, sixth, and seventh are decreasing in length and breadth. The seventh segment is narrower by a third than the fourth.

The *pleon* is deeper immersed than in the female. The visible part of the first segment is narrower than half of the fifth. The first segment is the shortest, the following are of the same breadth but increase in length. The pleon and urus together occupy about a fourth of the length of the whole animal (10 : 39) (In *G. laticauda* about a third (25 : 74).

The *urus* is broader than long (5 : 3); the anterior margin is straight, the lateral and posterior margins broadly rounded.

The *uropoda* reach as far as the hinder margin of the urus.

Colour: Yellowish-white, without spots.

Length. 11 m. m.

The larva of the first stage.

Pl. III. fig. 32, 33.

Resembles very much the larva of *G. laticauda*; the differences are only slight.

The head is very large, broader than long (8: 4); it equals the three first pereional segments in length.

The fourth segment of the pereion is twice the length of the seventh, but not twice as broad (17: 12; in *G. laticauda*, 19: 10).

The pleon equals the four first pereional segments in length.

The urus is a little broader than long (9: 7); it equals in length the four first segments of the pleon.

Colour. White, densely spotted with dark blue.

Length. 3 m. m.

Hab. The Atlantic, The Indian Sea.

A large specimen of an ovigerous female and a male were taken by Captain George von Schéele of the Swedish vessel »Monarch» from the mouth of an *Exocoetus*, Lat. 15° 30' N. Long. 45° 0' W. in the Atlantic (U. M.). Another specimen, an ovigerous female, was found by me in a collection of Crustaceans, bought of the late naturalist merchant Carl Wessel at Hamburg. It was labelled »Indian Seas» (C. B.).

5. *Emetha adriatica*, n. sp.

Diagn. *Corpus* ovato-ellipticum, ante non compressum, plus duplo longius quam latius.

Caput magnum valde immersum, latius quam longius.

Oculi parvi, rotundati.

Antennæ crassæ, subæquales, secundi paris sex-articulatæ, marginem anteriorem segmenti primi pereii attingentes.

Segmentum primum *pereii* processus laterales, dimidium capitis æquant, ferens. Segmenta quinque anteriora longitudine crescentia. Segmentum sextum quater fere longius segmento septimo.

Femora parium trium ultimorum *pedum pereii* multo latiora quam longiora.

Pleon uro paulo brevius.

Urus semicircularis, duplo latior quam longior.

Pedes uri uro breviores, ramus interior exteriore brevior.

Ovigerous female.

Pl. IV. fig. 34—40.

The *body* is ovate-elliptical, more than twice longer than broad, the anterior part not compressed.

The *head* is deeply immersed, broader than long (6 : 5).

The *eyes* small, rounded.

The *antennæ* are thick, nearly equal in length; the second pair six-jointed; both pairs reach to the anterior margin of the first pereional segment.

The first segment of the *pereion* is excavated, with the anterior corners projecting into broad processes reaching to half the length of the head. The five first segments increasing in length. The sixth segment is nearly four times longer than the seventh (15 : 4). The femora of the three last pairs of pereiopoda are much broader than long (12 : 7).

The *pleon* is shorter than the *urus* (6 : 7).

The *urus* is semicircular, twice as broad as long.

The *uropoda* are shorter than the *urus* (5 : 7); the inner ramus is shorter than the outer.

Emetha adriatica differs from *Emetha Audouinii*, H. Milne-Edwards, by the six-jointed antennæ, the broader and not compressed anterior part of the body, the very short seventh segment, the short uropoda and the longer *urus*.

The *head* is broadly triangular with rounded margin; the hinder part of its upper side is highly convex, forming a large tubercle, the anterior and lateral parts are flat, concealed by the basal joints of the antennæ. It is broader than long (7 : 5), equalling a third of the breadth of the fourth pereional segment.

The *eyes* are small and rounded, partly concealed by the processes from the first pereional segments; the ocelli are very minute.

The *first pair of antennæ* (Pl. IV fig. 37) reach exactly to the anterior margin of the first pereional segment; they are seven-jointed; the first or basal joint is the longest, as long as the four following together; the second and third joint are large, swollen; the four last ones are small, tapering towards the tip.

The *second pair of antennæ* (Pl. IV fig. 36) are very little longer than the first, six-jointed; the first joint is the longest, longer than the first joint of the first pair, as long as all the

following five joints together. They are like those of the first pair, scarcely more slender.

The five first segments of the *pereion* increase in length; the fifth is twice as long as the first, and the broadest of all; the first segment is as long as the head, the processes are very broad, embracing the posterior half of the head, the ends bent angularly downwards. The sixth segment equals three quarters of the fifth in length, but is narrower; it is nearly four times as long as the seventh, and much broader (23: 14).

The *epimerals* (Pl. IV fig. 35) of the second pereional segment are small, ear-shaped, occupying only half of the rounded end of the segment. The epimeral of the third segment is large, ear-shaped, more than twice longer than the preceding; it occupies about half the segment. That of the fourth segment is as large as the preceding, deep at the anterior end, narrower behind, occupying about half the segment. The epimeral of the fifth segment is of the same form as the preceding, but smaller, occupying no more than a third of the end of the segment. That of the sixth segment is of the same size as the preceding, rhomboidal, occupying two thirds of the segment. The last epimeral is oblong, with rounded ends; it occupies the whole length of the seventh segment.

The femora of the four first pairs of *pereiopoda* are longer than broad (Pl. IV fig. 38). The tibiæ, carpi, and metacarpi are very short; the dactyli long, strongly curved. In the three last pairs the femora are much broader than long (23: 16), the tibiæ and carpi are short, the metacarpi longer, the dactyli shorter but stout. The femora have no distinct carina (Pl. IV fig. 39).

The *pleon* is immersed in the last segment of the pereion, but the lateral parts of the first pleonal segment are not quite concealed. The first segment is as long as the second, broader than half the fifth (11: 14). The fifth segment is the longest, twice as long as the first. The four last segments are equal in breadth, as broad as the urus. The pleon is shorter than the sixth pereional segment.

The *urus* is semicircular, symmetrical, a little more than twice broader than long (15: 7), smooth. The pleon and urus together are a little longer than a fourth of the pereion and the head together.

The *uropoda* (Pl. IV fig. 40,) do not reach to the hinder margin of the *urus*; the rami are nearly falciform, the inner one shorter and narrower than the outer.

Colour. Light brown with minute dark spots.

Length. 15 m. m.

Hab. The *Adria*. (C. B.).

Only one specimen.

6. *Ceratothoa deplanata*, n. sp.

Deriv. The name from the flattened dorsal side of the animal.

Diagn. *Corpus* elongatum, dorso deplanato, ter longius quam latius.

Caput latum, triangulare, leviter immersum, duplo fere latius quam longius, fronte rotundata.

Oculi parvi rhomboidales.

Antennæ primi paris iis secundi paris fere æquales, crassæ, septem-articulatæ, marginem anteriorem segmenti primi pereii superantes.

Processus segmenti primi pereii dimidio capitis breviores. Segmentum quartum aliis longius.

Epimera media maxima, epimera secundi et septimi paris latera segmenti expleantia.

Femora *pedum pereii* parium trium ultimorum latissima.

Pleon immersum, angulis posticis segmenti primi liberis. Segmentum primum angustius dimidio segmenti quinti. *Pleon* uro latius.

Urus quam *pleon* longior, late rotundatus, multo latior quam longior.

Pedes uri marginem posteriorem uri superantes.

The *body* is elongate, the dorsalside depressed and flattened.

The *head* is broad, triangular, immersed, nearly twice as broad as long (11: 6); the tip of the front is rounded.

The *eyes* are small, rhomboidal.

The first pair of *antennæ* are nearly as long as the second, thick, seven-jointed; they reach quite to the anterior margin of the first pereional segment.

The processes of the first segment of the *pereion* are shorter than half the head. The fourth segment is the longest.

The *epimerals* of the fourth and fifth segments are the longest; only the epimerals of the second and seventh segments occupy the whole length of the sides of the segments.

The femora of the three last pairs of *pereiopoda* are very large.

The *pleon* is immersed in the last segment of the *pereion*, but the lateral parts of the first segment are free, not hidden. The first segment is narrower than half of the fifth segment. The *pleon* is broader than the *urus* (10 : 9).

The *urus* is longer than the *pleon* (5 : 4), broadly rounded, much broader than long (9 : 5).

The *uropoda* reach a little beyond the hinder margin of the *urus*.

The animal comes nearest to *Ceratothoa parallela*, Otto, but is to be distinguished by the broadly rounded front, the rhomboidal eyes, the form of the hinder corners of the *pereional* segments, the free, narrow, first *pleonal* segment, and the form of the *urus*.

Ovigerous female.

Pl. IV. fig. 41—46.

The form of the *body* is elongate, the anterior and posterior ends are only a little narrower than the middle, the anterior part is not very convex; from the fourth segment of the *pereion* to the end of the *urus* the body is quite flattened. The surface is smooth without spots.

The *head* is broad, triangular, with broadly rounded front, the sides rounded, not emarginate. The upper side is smooth, convex.

The *eyes* are mediocre, rhomboidal, surrounded by dark diffuse spots.

The *first pair of antennæ* (Pl. IV fig. 43) are nearly as long as the second, thick, not compressed, seven-jointed; they reach quite to the anterior margin of the first *pereional* segment. The first joint is the longest; it is as long as the two following together. The three last ones are small, tapering.

The *second pair of antennæ* are but a little more slender than the first pair, eight-jointed; the first joint the longest; the four last ones small, tapering; the last very minute (Pl. IV fig. 43).

The *pereion* is smooth, the sides feebly rounded. The processes of the first segment are very broad, short, bent downwards; the first segment is shorter than the fifth, but as long as the second. The sixth and seventh segments together are shorter than the second segment. The hinder corners of

the two first segments are nearly rectangular, those of the third and fourth truncated, those of the three last ones rounded.

The *epimerals* (Pl. IV fig. 42,) of the second and third segments are broader at the posterior end, bent downwards at the anterior. That of the second segment occupies the whole side of the segment; those of the third and fourth segments scarcely more than two thirds of it, those of the fifth and sixth segments fully three fourths of it, and the last one the whole of the segment. The epimerals of the fourth, fifth, and sixth segments are broader at the anterior margin, narrower behind. The last one is oblong with rounded ends.

The first pair of *pereiopoda* (Pl. IV fig. 44) have the tibia broadly extended, the dactylus short. The two following pairs are subequal, with the femora much longer than broad. The following four pairs have much broader femora and strongly developed carinæ. In the seventh pair (Pl. IV fig. 45) the femur is as broad as long, the hinder margin is straight.

The *pleon* is as broad at the base as long. The first segment longer than the second, but narrower than half of the fifth (2 : 5). The three last pleonal segments are broader than the urus (10 : 9) and a little narrower than the fifth (or fourth) segment of the pereion (10 : 11). The whole pleon equals the fifth pereional segment in length.

The *urus* is broad, nearly semicircular, not quite twice as broad as long (9 : 5); the upper side is perfectly plain and smooth.

The pleon and urus together are about a third of the length of the pereion with the head (18 : 51).

The *uropoda* (Pl. IV fig. 46) reach a little beyond the posterior margin of the urus. The peduncles are long and stout, nearly as long as the inner ramus (14 : 17). The inner ramus reaches a little beyond the outer. It is oblong-lanceolate. The exterior one is falciform.

Colour. Bright yellow.

Length. 18 m. m.

Hab. The coast of Hayti, West-Indies. (C. B).

From the harbour of Jacmal; captured April 1883.

7. *Cymothoa elegans*, n. sp.

Diagn. *Corpus* valde convexum, subparallelum, plus quam duplo longius quam latius.

Caput profunde immersum, deplanatum, ter fere latius quam longius.

Oculi minutissimi.

Antennæ sub capite celatæ, antennæ primi paris iis secundi paris longitudine superantes, octo-articulatæ.

Processus segmenti primi *perei* longissimi, caput fere longitudine æquantes. Segmentum quintum aliis latius. Anguli postici segmentorum quattuor priorum truncati, sequentium rotundati.

Epimera latera segmentorum non explentia. Epimera segmenti secundi tertique recta, non auriculiformia.

Pedes perei septimi paris longissimi, femoribus latissimis.

Pleon curtum, angustum, segmento primo non oblecto.

Urus quam pleon longior ac latior, fere rectangularis, angulis posticis rotundatis, plus quam duplo latior quam longior.

Pedes uri breves, ramus interior exteriore brevior.

The *body* is very convex with nearly parallel sides, more than twice longer than broad.

The *head* is deeply immersed, flattened, about thrice broader than long (20 : 7).

The *eyes* are very small.

The *antennæ* are concealed beneath the head; the first pair is longer than the second, eight-jointed.

The processes of the first segment of the *perei* are very long, nearly as long as the head. The fifth segment is the broadest. The hinder corners of the four first segments are truncated, those of the three last segments rounded.

None of the *epimerals* occupies the whole side of the corresponding segment. The epimerals of the second segment are straight, not auriculiform.

The *pereiopoda* of the seventh pair are the longest, with very broad femora.

The *pleon* is short and narrow. The first segment is not hidden.

The *urus* is longer and broader than the pleon, transversally oblong, with the hinder corners rounded; more than twice broader than long.

The *uropoda* are short, the inner ramus shorter than the outer.

Cymothoa elegans is most nearly allied to *C. recta*, DANA, *C. cremita*, BRUENNICH, and *C. limbata*, SCHIOEDTE and MEINERT, but it is well distinguished from all these, as will be seen from the following description.

Ovigerous female.

Plate V. fig. 47—56.

The *body* is elongate, almost linear, with feebly rounded margins, very convex with transversally convex segments. The surface is hard, smooth, as if it were polished.

The *head* is flattened, transversally concavated on the upper side, with a broad margin on the under-side anteriorly. The front margin is slightly emarginated, the lateral and posterior margins straight (Pl. V fig. 49).

The *eyes* are very small, almost imperceptible, situated at the base of the lateral margins.

The *first pair of antennæ* (Pl. V fig. 50) are thick, short, with a distinct three-jointed peduncle; the third joint is the longest; the flagellum is more slender, five-jointed; the last joint carries a short, tooth-shaped, subterminal spine and four minute hairs.

The *second pair of antennæ* (Pl. V fig. 51) are seven-jointed, a little shorter than the preceding; the two first joints are short and thick, the following five more slender, the last one fringed with very minute hairs.

The *maxillipeds* (Pl. V fig. 52) are robust, the peduncle laminar, the last joint fringed with minute hairs at the anterior corners; the palp is two-jointed; the first joint large, laminar; the second small, cylindrical, with a feebly curved spine at the tip.

The first segment of the *pereion* is long, twice as long as the head, and longer than the sixth and seventh segments together (7: 6); it is but little narrower than the fifth (5: 6); the very long anterior processes are broad, obliquely truncated, and a little emarginated. The second to fourth segments successively increase in length; the hinder corners are truncated, but not emarginated. The fifth to seventh segments decrease in length; the hinder corners are rounded; the fifth segment is the broadest of all, the seventh the narrowest. The sixth segment is twice as long as the seventh. The

hinder margins of all the segments are bisinuated. The upper side of each segment is transversally convex at the hinder margin. The *incubatory pouch* (Pl. V fig. 48) consists of four large, deeply engraved laminae, and one smaller one anteriorly on each side.

The *epimerals* (Pl. V. fig. 48) are subequal in length. Those of the second and third segments are oblong, straight, the first mentioned is rounded at both ends, the latter pointed at the anterior and emarginated at the posterior end. The epimerals of the following segments are concavated at the inferior margins. None of the epimerals occupy the whole length of the lower side of the corresponding segment; that of the second segment occupies three fourths, that of the fourth segment only half of the segment.

The first three pairs of *pereiopoda* have very long femora and short dactyli (Pl. V fig. 53). The fourth pair are the smallest of all the legs (Pl. V fig. 54). The fourth to seventh pairs have broad femora and long strong dactyli. The seventh pair (Pl. V fig. 55) are the longest and strongest of all, with the femora almost as broad as long (20 : 21).

The *pleon* is only feebly immersed, the lateral corners of the first segment are not covered but free; the pleon is broader at the base than long (3 : 5). The first segment is broader than half of the fifth segment (2 : 3). The first four segments are equal in length, the fifth a little longer (5 : 3). The corners of the segments are narrowly rounded, free from one another. The pleon is a little longer than the first pereionial segment. (15 : 14).

The *urus* is broader than the last pereionial segment, slightly emarginated at the anterior margin, the posterior margin being straight with rounded corners. The urus is longer than the pleon (17 : 15) and much broader than the last pleonal segment (4 : 3), more than twice as broad as long (39 : 17). Its upper side is smooth without impressions. The pleon and urus together are a little longer than a third of the pereion with the head (16 : 45).

The *uropoda* (Pl. V fig. 56) do not by far reach to the posterior margin of the urus. The rami are ovate lanceolate, the inner one shorter than the outer. The peduncle is stout, longer than the inner ramus.

Colour. Yellow.

The male.

Pl. V. fig. 57, 58.

The *body* is more linear than in the female, the pereional segments being subequal in breadth, the third a little broader than the others (37 : 15). The body is not much more than twice as long as broad.

The *head* is a little longer than in the female the front margin rounded, not emarginated. The head is not twice as broad as long (13 : 8).

The processes from the first segment of the *pereion* are a little shorter and narrower than in the female, the first segment is the longest; the fifth, sixth and seventh the shortest, equal in length and breadth.

The first *pleonal* segment is quite free, narrower than the fifth (15 : 19). The second pair of pleopoda carry a long styli-form process at the inner lamina.

The *urus* is not fully twice as broad as long (21 : 11), slightly rounded at the posterior margin, but scarcely emarginated at the anterior. The pleon and urus together are only a little shorter than half of the pereion with the head (11 : 25).

The *uropoda* reach almost to the posterior margin of the urus.

Colour. Yellow.

Length. The ovigerous female 23 m. m.

The young female 19 m. m.

The male 12,5 m. m.

Hab. The seas of Java (U. M.).

The three known specimens were captured by Captain Carl Gädde of the Swedish vessel »Albert Ehrensward», in the year 1884, and presented to the University museum of Upsala.

8. *Cymothoa caraibica*, n. sp.

- Diagn. *Corpus* convexum, subparallelum, ter fere longius, quam latius.
Caput immersum, leviter convexum, paullo latius quam longius, fronte rotundata in medio procumbente.
Oculi manifesti, triangulares.
Antennæ sub capite non celatæ. *Antennæ* primi paris iis secundi paris longiores, marginem anteriorem segmenti primi pereii vix attingentes.
 Processus segmenti primi *pereii* mediocres, caput dimidio pæne longitudinis æquantes. Segmentum quintum et sextum aliis latiora. Segmentum primum aliis longius.
Epimera segmenti secundi et tertii latera segmentorum expleantia.
Pedes pereii parium quattuor ultimorum valde carinati, carinis angulate productis. *Pedes* septimi paris longissimi, femoribus longis.
Pleon breve, latum, segmento primo fere toto oblecto.
Urus pleon longitudine æquans, late rotundatus, duplo latior quam longior.
Pedes uri mediocres, ramus interior exteriore longior.

The *body* is convex, almost linear, nearly thrice longer than broad (41 : 15).

The *head* is immersed, feebly convex, a little broader than long (4 : 3); the front is rounded bent downwards in the middle.

The *eyes* are distinct, triangular.

The *antennæ* are not concealed beneath the head. The first pair of *antennæ* are longer than the second, scarcely reaching to the anterior margin of the first pereional segment.

The processes of the first pair of the *pereiopod* are scarcely as long as half of the head. The fifth and sixth segments are the broadest. The first segment is the longest.

The *epimerals* of the second and third segments occupy the whole length of the segments.

The four last pairs of *pereiopoda* are strongly carinated, the carinæ produced into strong angles. The seventh pair are a little longer than the preceding; its femora are much longer than broad.

The *pleon* is short and broad; the first segment is almost totally concealed.

The *urus* is as long as the pleon, broadly rounded, twice as broad as long.

The *uropoda* are tolerably long, the inner ramus is longer than the outer.

It is very difficult to tell anything about the affinities, of the species without knowing the ovigerous female. It seems to be most allied to *Cymothoa recta*, DANA; but the animal is provided with sufficiently good characteristics to justify the establishing of a new species for it.

The male.

Pl. V. fig. 58–61.

The *head* is large and long, only a little shorter than broad, the front margin forms no border on the under-side, but is only bent downwards in the middle; the anterior margin is rounded, the upper side slightly convex.

The *eyes* are of medium size, placed a little behind the middle of the head, near the lateral margins.

The *first pair of antennæ* are thick and robust, eight-jointed, without distinction between the peduncle and the flagellum, the last joints without hairs or spines.

The *second pair of antennæ* are considerably more slender, a little shorter, eight-jointed.

The processes of the first segment of the *pereion* are shorter and narrower than in *Cymothoa elegans*, rounded at the ends. The anterior margin of the first segment is slightly emarginate; it is longer than the fourth segment (5:4), and only a little narrower than the fifth (5:6). From the fifth to the seventh, the segments decrease in length, but scarcely in breadth. The seventh segment is longer than half the sixth. The three first segments together are as long as the four last ones together.

The *epimerals* of the second and third segments are fixed along the whole length of the segments, the following ones only along half or two thirds of the length of the corresponding segments; all the epimerals are equal in length to their corresponding segments.

The first three pairs of *pereiopoda* have long strong dactyli, as long as the dactyli of the following pairs. The last

four pairs have strongly developed carinae on the femora (Pl. V fig. 59). The femur of the seventh pair is longer than broad (24 : 17) (Pl. V fig. 60).

The *pleon* is broad, much broader at the base than long (5 : 3). The first segment is almost totally hidden, the pleon being a little more immersed than in *Cymothoa elegans*. The last is broadest and longest, the three preceding being equal in length. The second pair of pleopoda carry very long styli-form processes (Pl. V fig. 61).

The *urus* is as long as the pleon, and only a little broader than the last pleonal segment (12 : 11); it is smooth on its upper side, broadly rounded at its lateral and hinder margins, exactly twice as broad as long. The pleon and urus together are equal in length to half of the pereion without the head.

The *uropoda* do not reach to the hinder margin of the urus. The peduncle is shorter than the inner ramus. The inner ramus is longer than the outer.

Colour. Yellowish-white with smaller and larger brown-red spots on the anterior part of each segment; the posterior part is almost white.

Length. The female virgo 17 m. m.

The males 12, 15, 16 m. m.

Hab. The south coast of Hayti, (Z. M. C. B.).

I got four specimens, a female virgo and three males, in the harbour of Jacmal, Hayti, in the month of April, 1883.

Explanation of the plates:

Plate I.

Aega Schioedteana, n. sp.

- Fig. 1. The animal seen from above ($\frac{4}{1}$).
 » 2. » » » » below ($\frac{4}{1}$).
 » 3. » » » » the side ($\frac{4}{1}$).
 » 4. The antennæ and the head from the under-side ($\frac{12}{1}$).
 » 5. The left one of the first pair of pereopoda ($\frac{16}{1}$).
 » 6. The left one of the second pair of pereopoda ($\frac{16}{1}$).
 » 7. The left one of the seventh pair of pereopoda ($\frac{12}{1}$).
 » 8. The right one of the second pair of pleopoda ($\frac{9}{1}$).
 » 9. The left one of the uropoda ($\frac{10}{1}$).
 » 10. The end of the urus ($\frac{24}{1}$).

Plate II.

Aega magnifica. DANA.

- » 11. The animal seen from above ($\frac{27}{10}$).
 » 12. The animal seen from the side ($\frac{27}{10}$).
 » 13. The antennæ from the under-side ($\frac{6}{1}$).
 » 14. The left one of the second pair of pereopoda ($\frac{7}{1}$).
 » 15. The left one of the seventh pair of pereopoda ($\frac{6}{1}$).
 » 16. The left one of the uropoda ($\frac{7}{1}$).
 » 17. A hair from the inner ramus of the same ($\frac{37}{1}$).

Rocinela maculata. SCHIOEDTE et MEINERT.

- » 18. The animal seen from above ($\frac{2}{1}$).
 » 19. » » » » the side ($\frac{2}{1}$).
 » 20. The antennæ from the under-side ($\frac{5}{1}$).
 » 21. The left one of the second pair of pereopoda ($\frac{5}{1}$).
 » 22. The left one of the uropoda ($\frac{4}{1}$).
 » 23. A piece of the margin of the urus ($\frac{60}{1}$).

Plate III.

Glossobius auritus, n. sp. Ovigerous female.

- Fig. 24. The animal seen from above ($\frac{2}{1}$).
 » 25. » » » » the side ($\frac{2}{1}$).
 » 26. The head with the antennæ of the same ($\frac{8}{1}$).
 27. The left maxilliped ($\frac{18}{1}$).
 28. The left one of the first pair of pereopoda ($\frac{8}{1}$).
 » 29. The left one of the third pair of pereopoda ($\frac{8}{1}$).
 » 30. The left one of the uropoda ($\frac{10}{1}$).

Glossobius auritus, n. sp. The male.

- » 31. The animal seen from above ($\frac{4}{1}$).
 » 32. A young one of the first stage ($\frac{14}{1}$).
 33. The left one of the second pair of pereopoda of the same ($\frac{56}{1}$).

Plate IV.

Emetha adriatica, n. sp.

- » 34. The animal seen from above ($\frac{4}{1}$).
 » 35. » » » » the side ($\frac{4}{1}$).
 » 36. The head with the antennæ from the side ($\frac{10}{1}$).
 » 37. The left one of the first pair of antennæ ($\frac{10}{1}$).
 » 38. The left one of the third pair of pereopoda ($\frac{13}{1}$).
 » 39. The right one of the seventh pair of pereopoda ($\frac{13}{1}$).
 » 40. The left one of the uropoda ($\frac{23}{1}$).

Ceratothoa deplanata, n. sp.

41. The animal seen from above ($\frac{4}{1}$).
 » 42. » » » » the side ($\frac{4}{1}$).
 43. The head with the antennæ seen from the side ($\frac{10}{1}$).
 » 44. The left one of the first pair of pereopoda ($\frac{12}{1}$).
 » 45. The left one of the seventh pair of pereopoda ($\frac{12}{1}$).
 » 46. The right one of the uropoda ($\frac{16}{1}$).

Plate V.

Cymothoa elegans, n. sp. Ovigerous female.

- » 47. The animal seen from above ($\frac{27}{10}$).
 » 48. » » » » the side ($\frac{27}{10}$).
 » 49. The head from the under-side ($\frac{9}{1}$).
 » 50. One of the upper antennæ ($\frac{18}{1}$).
 » 51. » » » lower » ($\frac{18}{1}$).
 » 52. The left maxilliped ($\frac{20}{1}$).
 » 53. The left one of the first pair of pereopoda ($\frac{9}{1}$).

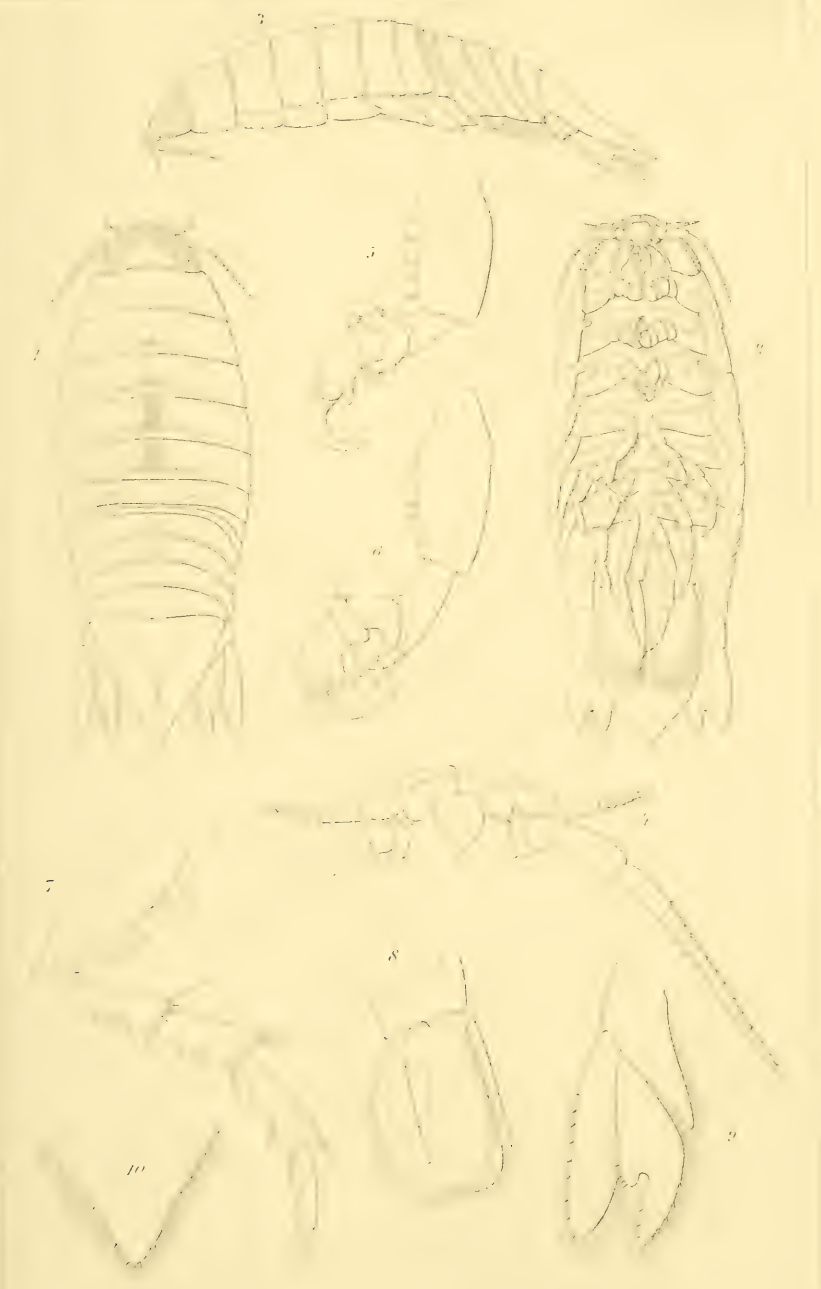
- Fig. 54. The left one of the fourth pair of pereopoda ($\frac{9}{1}$).
: 55. The left one of the seventh pair of pereopoda ($\frac{9}{1}$).
, 56. The left one of the uropoda ($\frac{14}{1}$).

Cymothoa elegans, n. sp. The male.

- , 57. The animal seen from above ($\frac{3}{1}$).

Cymothoa caraibica, n. sp. The male.

- , 58. The animal seen from above ($\frac{5}{2}$).
: 59. The right one of the fourth pair of pereopoda ($\frac{12}{1}$).
60. The right one of the seventh pair of pereopoda ($\frac{12}{1}$).
, 61. One of the second pair of pleopoda ($\frac{12}{1}$).
-

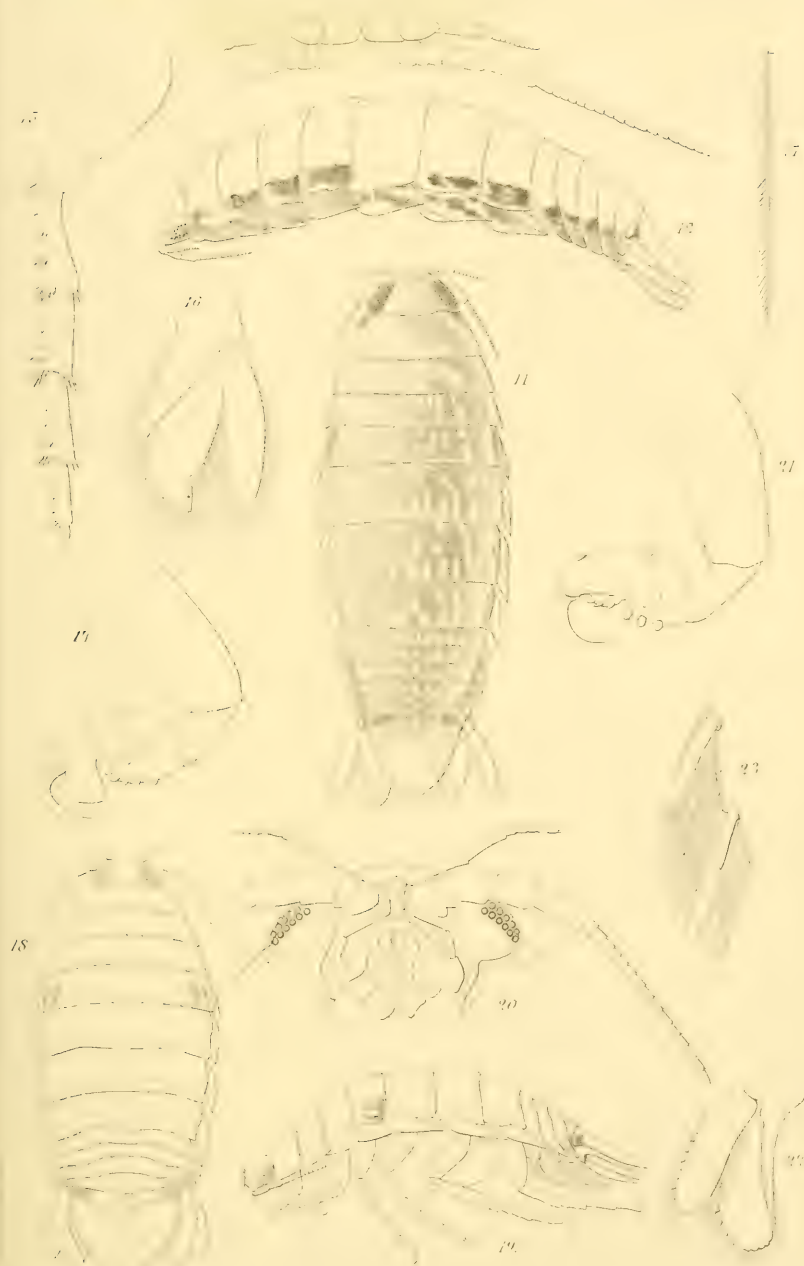


A.M. Westergren del.

Lit. W. Schlachter, Stockholm.

Fig. 1-10 *Aega Schioedteana* n. sp.

13.



A. M. Westergren del.

Lith. W. Schlachter, Stockholm.

Fig. 11-17 *Aegarmagnifica* Dana. Fig. 18-23 *Rocinela maculata* Sch. et M.

26

33

32

27

36

34

25

30

29

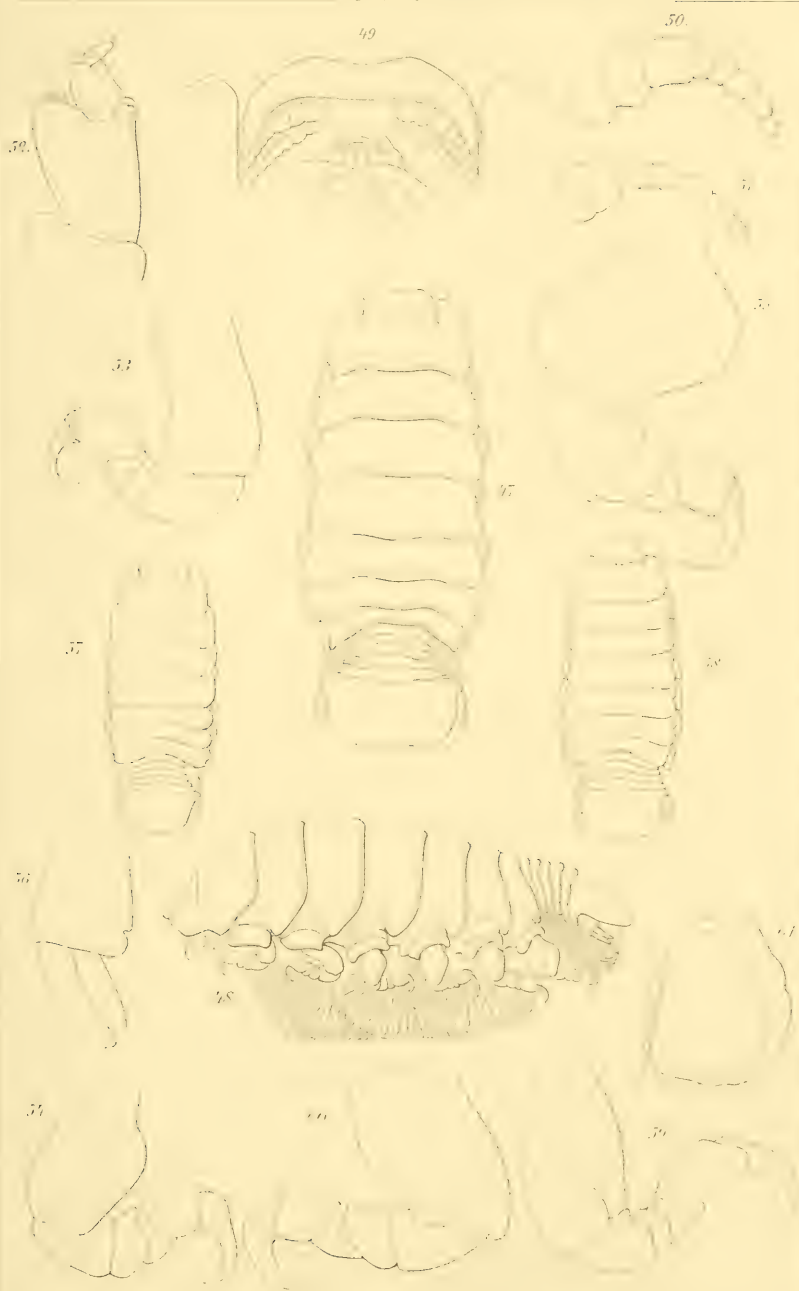
28



A.M. Westergren del.

Lith. W. Schlächter, Stockholm.

Fig. 34-40: *Emesha adriatica* n.sp. Fig. 41-46: *Coratofhoa deplanata* n.sp.



LINNÉS LÄRA OM I NATUREN BESTÄMDA OCH BESTÅENDE
ARTER HOS VEXTERNE

EFTER LINNÉS SKRIFTER FRAMSTÅLD,
OCH MED MOTSVARANDE ÅSIGTER HOS DARWIN JEMFÖRD

AF

J. G. AGARDH.

MEDDELADT DEN 11 MARS 1885.



STOCKHOLM 1885.
KONGL. BOKTRYCKERIET.
P. A. NORSTEDT & SÖNER.

I. Linnés åsigt om arternes tillkomst; hans hypothes om sättet, huru vid skapelsen tillgått.

Den gamla uppfattningen, att olika slag af vexter och djur i begynnelsen tillkommit, hvar för sig, genom en särskild skapelseakt, var väl hos Linné till en början en från barn-
domen inlärd trosartikel; men i den mån hans kännedom af naturen vidgade sig, synes denna uppfattning hafva öfvergått till den fastaste öfvertygelse. Detta framgår icke af något mera tillfälligt yttrande, utan han återkommer ofta, och snart sagdt i hvarje större arbete, till dermed sammanhängande frågor; och han yttrar sig derom med tillräcklig klarhet och fullständighet, så att något tvifvel om hans mening icke borde kunna äga rum.

Linné antog att alla de olika slag af organiska väsenden, som nu förekomma i naturen, nutidens arter, öfverensstämde med de i urtiden skapade förfäderne, hvilkas från ägg (frö) utvecklade afkomma de voro. Han fann bevisen därför i det länge nästan obestridda antagandet att hvarje lefvande väsen framkommer ur ett ägg (frö), och själf bildar en afkomma, som öfverensstämmer med den form som frambringat ägget; att således inga nya arter numera uppstå. Emedan individer-
nes antal med tiden synas ökas (efter nya generationer af ägg), så måste antalet individer under förutvarande generationer hafva varit mindre, och utvecklingsserien således, om man går allt jemt tillbaka, slutligen stadna vid en enda stamplanta hos de hermaphrodita vexterne, vid 2:ne (han- och hon-stånd) hos de dioika. Men da dessa första stamplantor icke kunnat uppkomma på samma sätt, måste deras uppkomst tillskrifvas en särskild skapelseakt och en skapare, som i sin allvishet och med sin allmägt gaf dem redan i begynnelsen den form och den structur, som de fortfarande skulle äga. Detta bekräftas af hvarje organiskt väsendes egendomliga structur, af de

för detsammas daning gällande särskilda lagar, och af egendomliga lifsyttningar af hvarje slag ¹⁾).

Arternes permanens både till form och lifsyttningar var således en hufvudsats, som uttalades redan i Linnés första arbeten, och det torde väl kunna antagas att han äfven i de senaste icke derifrån afvikit.

Visserligen har man, under en sednare tid, anmärkt att Linné slutligen skulle hafva öfvergifvit de åsichter, som han förut med så mycken säkerhet uttalat, och att han uti sednare arbeten skulle hafva framställt en lära, som mycket närmade sig descendens-theorien ²⁾. Omständligast torde friherre von Hohenbühel-Heutler (i *Mohl, Bot. Zeit. för den 9 sept. 1870*) yttrat sig för denna mening. Han anser sig kunna sammanfatta denna Linnés sednare åsigt, uttalad på nutidens språk, på följande sätt:

»Den första plantan var en högst enkel organism, ur hvilken andra vexter uppstodo, som sins emellan visade sådana olikheter, att de hvaradera buro karakteren af en särskild ordning (klass); ur dessa klassplantor uppstodo andre, sig emellan olika vexter, hvilka hvaradera hade karakteren af ett slägte; ur dessa släktrepresentanter uppkommo ater vexter, som hade hvaradera karakteren af en egen art. Dessa äro nutidens arter, som nu skilja sig i särskilda varieteter.»

Det dröjde emellertid icke länge (*Bot. Zeit. för 18 nov. 1870*) förrän Hugo von Mohl uppträdde mot denna H. von Heutlers uppfattning af Linnés åsichter. Mohl fäste uppmärksamhet derpå, att både de, som försvara åsigten om arternes permanens, och de som hylla descendens-theorien antaga en artens förmåga af förändringar, men i olika grad. De förra anse nemligen att afkomlingarne af samma art endast i mera oväsentliga egenskaper kunna afvika ifrån stamplantan, under bibehållande af samma bestämda typ för organisationen i allmänhet, så att äfven sednaste efterkommande kunna fullkomligt återgifva urformen. Descendens-theorien deremot antager inga gränser för variabiliteten; enligt den kan hela organisationen smaningom förändras, så att afkomlingarne af samma stamfader, steg för steg, kunna i olika riktningar blifva allt

¹⁾ Jfr LINN. *Syst. Nat. Edit. 11. (Holmiæ 1740) p. 67. Gener. plant. Ed. 11. p. II Lugdun. Bat. 1742.*

²⁾ Jfr Th. Fries tal vid Linné-festen i Upsala p. 22 och F. C. V. Areschoug »Charles Darwin» p. 25 och 26.

mera afvikande, utan öfverensstämmelse sins emellan och utan möjlighet att återgå till den ursprungliga typen. Tillfölje häraf kunna afkomlingarne af samma stamart icke blott omändra sig till former som stå jemte hvarandra, ungefär på samma organisationsgrad, utan de kunna jemväl höja sig till en högre organisationstyp. Och om detta är förhållandet, så måste man anses vara berättigad att äfven gå tillbaka, och antaga att alla nu lefvande fullkomligare organismer äro afkomlingar af allt lägre staeende, tills man äntligen stadnar vid den enkla protoplasma-klumpen, såsom urväsendet för alla nu lefvande organismer. Detta är, säger Mohl, den hufvudsats, kring hvilken hela läran vänder sig; och det gäller ingalunda blott att förklara formernes mangfaldigande, hvilket kan uppnås — och det på hvarje organisationsstadium — jemväl genom korsningar mellan olika former. Men på detta sätt uppkommer endast en blandning af redan existerande former, utan både fortskridande i utvecklingen till högre former, och tillbakagång till lägre. Äfven försvararne af arternes permanens kunde erkänna en sådan, genom korsning uppkommen form sasom särskild art, utan att derför antaga sasom riktig en enda sats af descendenstheorien. (*Mohl, l. c. p. 730—31*).

Det uttalande hos Linné, som skulle antyda ett närmande till descendenstheoriens åsigter, förekommer i 6:te upplagan af *Genera plantarum* (*Holmiæ 1764*) såsom inledande den uti ett bihang förekommande uppräknigen af Ordines Naturales; och emedan de blad, der den så kallade nya läran ¹⁾ framställles, hafva särskild paginering, antog H. v. Heufler, att ett omslag föregått i Linnés åsigter omedelbart före tryckningens afslutande, så att ännu i företalet den gamla läran finnes framställd. Mohl anmärker häremot att den särskilda pagineringen blott torde antyda att inledning och titelblad här, som vanligt, blifvit sist tryckte, och att i alla händelser den nya läran

¹⁾ Linnés ord äro:

1. *Creator T. O. in primordio vestiit Vegetabile medullare principiis constitutivis diversi corticalis*, unde tot difformia individua, quot ordines naturales, prognata.

2. *Classicas* has plantas (1) *Omnipotens miscuit inter se*, unde tot *Genera ordinum*, quot inde plantæ.

3. *Genericas* has (2) *miscuit natura*, unde tot *Species congeneres*, quot hodie existunt.

4. *Species* has (3) *miscuit casus*, unde totidem, quot *passim occurrunt varietates*.

finnes redan 2 år förut framställd i *Fundamentum Fructificationis*¹⁾).

Emedan Linné ansåg läran såsom en hypotes, tror Mohl att densamma i Genera plantarum blott intogs i ett bihang och icke uti inledningen, som vore fullkomligt lika med den till 5:te upplagan af Genera. Linné brukade nemligen, säger Mohl, utarbета dessa inledningar med den största sorgfällighet, och lade på dem stor vikt; han torde således der icke velat upptaga såsom en vetenskaplig sats hvad som ännu blott var en hypotetisk åsigt²⁾).

För mig vill det synas som emellan den *nya läran* och *den gamla* icke finnes en sådan motsättning, att den torde kunna antagas såsom bevis för ändrade åsigter. Då Linné i sina tidigare arbeten uttalade sig om arternes tillkomst, gällde det endast att hänvisa till en skapelseakt för att förklara deras första daning; och han grundade sin åsigt på de af erfarenheten fastställda antagandena, att *lika föder lika* och att *hvarje lefvande väsen leder sitt ursprung ifrån ett ägg* (frö). Men da de första stamplantorne icke på detta sätt kunnat tillkomma, måste en skapelseakt för dem förutsättas. Öfver sjelfva sättet *huru* vid denna skapelse tillgått, öfver sättet för dess utförande, kan ingen upplysning hämtas ifrån erfarenheten, och Linné framställde således sina tankar derom såsom en hypotes, den han sjelf säger sig icke vilja påtruga någon. Då han utgaf den 6:te Edit. af Genera ansåg han sannolikt sig der icke behöfva redogöra för hvad han två år förut tydligt uttalat. Man torde till och med af ett yttrande i *Fundam. fructificationis* kunna finna en förklaring, hvarföre hypotesen intogs uti inledningen till Ordines Naturales³⁾).

¹⁾ Här lyder § 14 sålunda:

«Suspicio est, quam diu fovi, neque jam pro veritate indubia venditare audeo, sed per modum Hypothescos propono: quod scilicet omnes Species ejusdem Generis ab initio unam constituerunt speciem, sed postea per generationes hybridæ propagatæ sint, adeo ut omnes congeneres ex una matre progenitæ sint, harum vero ex diverso patre diversæ Species factæ».

²⁾ Hvarken hr v. Heufler eller Mohl synes hafva lagt märke till att äfven i företalet till den ifrågavarande 6:te uppl. af Genera förekommer samma hypotes såsom slutord till § 8, och der nästan uttryckt i samma ord, som i den af Mohl citerade 12:te uppl. af Systema Naturæ.

³⁾ Linné säger nemligen: (*Fund. Fructificationis* p. 20) Sed eo hæc mea procedit conjectura, ut documenta, quibus eam confirmem, non inveniam: quapropter nec eam cuiquam obtrudo: sed poni tamen tamquam probabilis tantisper debet, *quia sine hoc conceptu clara Ordinum Naturalium idea viz umquam formari poterit.*

Det var tydligen från den första af de uti 6:te uppl. af *Genera* inryckte sätserne, som Hr v. Heufler dragit den slutsats, att Linné dermed velat hänvisa till en urplanta med enklare organisation och sålunda närmast sig descendens-theoriens antaganden, hvarifrån den Linneanska läran endast skulle skilja sig vid förklaringen af de från urplantan utbildade arternes uppkomstsätt. Emot denna uppfattning uttalar sig Mohl på det bestämdaste, i det han påminner om att Linné yttrat, och detta på flera ställen, att i begynnelsen en art blifvit skapad af hvarje ordning, och således likaväl af lagt stående typer som af högre organiserade ¹⁾).

Men Mohl erkänner, att de af Linné begagnade uttryck, hvarpå Hr v. Heufler grundat sin uppfattning, för nutida botanister väl må synas oklara, och derföre kunna gifva anledning till olika tydingar. Desto nödvändigare, säger Mohl, blir det att i andra Linnés skrifter söka utforska hvilken föreställning Linné gjorde sig om vextens organisation, och i hvilken mening *substantia medullaris* och *corticalis* kunna vara brukade. Under hänvisning till §§ 9—10 af *Generatio ambigena* säger Mohl, att enligt Linnés åsigt hvarje vext bestode af 2:ne delar, medullar-substansen, som företrädesvis är lifvets källa och från hvilken fröna jemväl utbildas, samt af cortical-substansen, derifrån organerne för näringen, äfvensom blomkalk och ståndare utgå ²⁾. Utan bådas samverkan kunde vexten hvarken lefva eller fortplantas. När således LINNÉ sade att skaparen i begynnelsen omgaf medullarsubstansen med olika corticalsubstanser, så ville han dermed närmare antyda huru typerne för de samtidigt skapade ordningarne fingo hvar sin organisation, och ingalunda att medullarsubstansen vore att betrakta såsom den enkla urplantan, från hvilken de olika arterne differentierades.

Herr v. Heufler hade jemväl fäst uppmärksamhet på de i någon mån olika uttryck, som Linné i de ofta nämnde sätserne i 6:te uppl. af *Genera* begagnat vid förklaringen af släktenas och af arternes uppkomst. Mohl har sökt förklara äfven anledningen härtill, under hänvisande till Linnés åsigt

¹⁾ Det heter (*Fund. fructificationis* i slutsatserne), Quod Creator in ipsa creatione fecerit ex quolibet ordine naturali unicam tantum speciem plantarum, a reliquis diversam habitu et fructificatione.

²⁾ Linnés uppfattning om de yttre delarnes ursprung hos vexten från olika delar af stammen finnes redan hos Cæsalpinus. Och jemväl hos Malpighi förekomma yttranden, som torde antyda en liknande uppfattning.

om *Generatio ambigena*. Jag skall dock icke här vidare ingå på denna förklaring, då släktenas och de högre gruppernes tydning icke nödvändigt tillhör de frågor, som i denna skrift närmast beröras. Hvad Linné om dem uttalar i olika arbeten är dessutom så öfverensstämmande i sak, att man näppeligen torde kunna förutsätta, att han om dem på olika tider haft olika meningar.

I detta sednare afseende är förhållandet något olika med arterne. Det uttalas således i alla tidigare arbeten att arterne uppkommit i begynnelsen (*in primordio*). Men i Petersburger prisskriften (1759) säger han sig sjelf hafva sett nya arter uppkomma genom korsning mellan förut existerande arter af samma eller olika släkten. 1762 (*Fundam. fructificat.*) säger han, att arterne uppkommit i *begynnelsen* och möjligen derjemte senare i *tiden* (*in tempore?*). 1764 *Gen Plant. Ed VI., ratio operis* angifves att arterne uppkommit både i begynnelsen och sednare i tiden.

Jemväl med afseende på uppkomstsättet äro uttrycken på olika tider något olika. 1742 uttalade han att skaparen i begynnelsen frambragt alla de arter, som nu finnas, och han vidhåller detta ännu 1752 (*i Philos. Botan.*). Det synes som en annan mening började få insteg först då han trodde sig hafva sett nya arter kunna uppstå genom korsning. Han säger således i Petersb. prisskriften, att de talrika arterne inom samma släkte torde hafva uppkommit genom korsningar från en och samma planta. Uti sednare arbeten blir det följaktligen icke skaparen sjelf som frambringat arterne, utan naturen som åstadkommit dem på sistnämnde sätt.

Det synes mig vara mycket sannolikt, att den skiftning i åsigt, som de olika uttrycken möjligen angifva, närmast torde härleda sig från observationer öfver några af honom antagna hybrida former. Redan 1751 skref Linné en disputation om *plantar hybridae*. Han säger här, att om han skulle besvara fragan, huruvida nya arter kunde uppkomma, eller möjligtvis dagligen uppkommo genom korsning, skulle efter theoretiska grunder hans svar blifva nekande. Men att ett dylikt uppkomst-sätt kan förekomma, synes erfarenheten bekräfta. Utom det att på Linnés tid man kände flera arter än som voro bekante för föregående tidens botanister, stödde Linné sig, som det synes, hufvudsakligen på det förhållandet, att man kände former, hvilka närmade sig 2:ne olika arter så mycket, att man

svåriligen kunde uppgifva till hvilkendera en sådan form borde som varietet hänföras; och att hos sådane former icke finnes någon karakter, som ej äfven återfinnes hos endera af de antagna stamföräldrarne. Dessa förhållanden hade föranlett Linné, att i dem misstänka hybrida former, emellan en moderplanta, hvilken hade samma fructificationsdelar, och en stamfader, som hade öfverensstämmande blad och yttre delar. Han uppräknar derefter 52 exempel på dylika, antagligen hybrida former. Bland dessa redogöres nogare för en *Veronica*, som framkom i Upsala botaniska trädgård i närheten af *Verbena officinalis* och *Veronica maritima*; och det torde väl vara möjligt, att det varit denna vext, som icke blott föranlett afhandlingen om *plantæ hybride* utan jemväl gifvit den närmaste anledningen till Linnés sednare observationer. Den blommade så väl 1750 som följande år utan att sätta frukt. Hos djuren, anmärker Linné, finnas äfven hybrider, men äro hos dem mycket sällsynta. Ehuru försedda med könsorganer, äro de vanligen stämplade genom oförmågan att sjelfve kunna frambringa någon afköda¹⁾. På det hela synes Linné vid denna tid icke ansett de hybrida formerne hafva någon särdeles betydelse för förklaringen af arternes tillkomst.

Annorlunda var förhållandet några år sednare, då han i prisskriften till Petersburger akademien (1759) uppgaf sig med egna ögon sett flera hybrida arter uppkomma. Om den redan beskrifna *Veronica spuria*²⁾ säger han nu, att den fortplantas genom sticklingar, hvilket torde antyda att den icke gifvit frö, sedan den 1750 först observerades. Om den andra *Delphinium hybridum* säger han, att den fortplantas genom frö. Den fjerde af de uppräknade, *Tragopogon hybridum* hade erhållits genom frö, som utbildats på *Tragopogon pratense*, hvars egna pollen borttagits, men pistillerne blifvit beströdda med pollen af *Tragopogon porrifolius*. Den deraf erhållna hybrida plantan, hvars blommor voro upptill purpurfärgade, men nedtill gula, hade gifvit mogna frö. Af dessa observationer ansåg sig Linné nu kunna draga följande slutsatser: Det kan icke betvivlas, att de anförda vexterne utgöra nya arter, framkomna genom hybridisering. De lära, att den hybrida växten

¹⁾ Neque hac occasione præterire possumus stupenda Dei præscripta: hæ enim species hybridæ, etiamsi genitalibus instructæ sint, familias tamen suas propagare vix, ac ne vix quidem possunt.

²⁾ Det bör kanske anmärkas att denna *Veron. spuria* är en helt annan vext än *V. spuria* L. *Sp. pl. Ed. II. p. 13.*

till inre delar och fructificationsorganer troget återbilda modern, men till blad och andra yttre delar fadern. För naturforskaren är således härmed lagd en ny grund, hvarpå kan byggas vidare; ty deraf synes följa att vexternes många till samma slägte hörande arter ursprungligaen utgjort en vext. från hvilken de uppkommit genom korsning. Derefter hänvisas till de många Capensiska Geranierne (*Pelargonium*) m. fl., hvilka lätt kunde föra botanisterne till antagandet, att arterne inom samma slägte voro de olika plantor, som uppkommit af den ursprungliga artens hybrida former, och att släktena antydde de arter, som härstamma ifrån samma moder med olika fäder. Men huruvida alla dessa arter äro framkomne efter skapelsen (*temporis filiae*), eller skaparen redan i begynnelsen begränsat detta bildningssätt till ett bestämdt antal arter. derom vågade han icke uttala sig. Han påpekar slutligen att härmed ett nytt fält vore öppadt för botanisternes verksamhet. nemligen att genom hybridisering frambringa nya arter.

Uti den nära samtidiga *Generatio ambigua* (Decemb. 1759) återkomma dessa åsigter, men kanske med mindre säkerhet uttalade. Det heter här, att ehuru hybrider ofta äro sterila. så är detta dock icke alltid fallet, utan gifvas många undantag. Om den *nya läran* talas såsom en möjlig framtids åsigt.

Med ännu tydligare tveksamhet uttalar sig Linné, 2 år sednare, i *Fundamentum Fructificationis*. Sedan han varnat för att antaga såsom skiljda arter de olika varieteter, hvilka efter frö visa sig mera eller mindre constanta, yttrar han den gissning att många varieteter uppkomma genom korsningar ifrån olika fäder, ehuru detta ännu icke kunnat genom tillräckligt bevisande exempel ådagaläggas. Med afseende på arterne säger han, att ehuru naturen satt bestämda gränser för deras frambringande genom korsning, förekomma dock. fastän mycket sällan, sådane hybrida bildningar (§ VIII). Det är visst att de flesta hybrider icke fortplantas genom frö, men deraf följer icke att alla hybrider äro sterila. Följer så det första uttalandet, huru Linné tänkte sig vid skapelsen hafva tillgått. med den uttryckliga förklaringen att detta vore en *hypothes*.

Uti den 12:te uppl. af *Systema Naturæ* (1767) uttalar slutl. Linné, att hybriderne, såsom varande sterila, icke borde såsom arter upptagas. I stället för att han förut gjort skilnad emellan korsningar som föregått *in primordio* och *in tempore*, så saknas

nu hvarje antydan härom, så vida icke de om nu existerande arter tillagde orden: *quotquot possibiles* skulle innebära att korsningar, som skett in primordio, skulle frambringat arter, men de som skett in tempore frambringat hybrider ¹⁾.

Att Linné äfven under den tid (1751—1767), då de hybrida växterne som mest utgjorde föremål för hans observationer och förklaringar, dock alltid betraktade deras art-rätt med tvekan, torde kunna slutas deraf, att hvarken i 2:dra Editionen af *Species plantarum* (1762) eller i 12 Ed. af *Systema Naturæ* (1767) ens de former, som han sjelf trott sig se uppstå genom korsningar, uppräknas såsom egna arter. Och det var för visso än mindre på dem, som han bygde sin uppfattning om arterne i naturen. Hade han ställt sin systematiska byggnad på den lösa grund, som hans återopade, i 6:te uppl. af *Genera* framställda, skapelsehypotes angifver, så borde han väl också hafva antagit att arterne i naturen voro af olika slag. De ursprungligen skapade individerne, som representerade nutidens ordningar, så väl som de genom korsningar mellan dem uppkomne formerne, motsvarande nutidens släkten, skulle ju, lika väl som nutidens arter, väl hafva haft hvardera sina bestämda, fran de andras skiljaktiga egenskaper. Hade de första generationerne betraktats såsom collectiv-arter, hvilka under det de utvecklade sig till nutidens arter, sjelfve upphörde att existera, så hade Linné tydligen råkat i motsägelse till det i mycket bestämda ordalag framställda antagandet af arternes permanens. Men vare sig han tvekar om arternes uppkomst förr eller sednare, om deras tillkomst genom skaparens direkta ingripande, eller genom korsningar i naturen, så antydes ingenstädes att den en gång danade arten skulle antagit annan form. Det förekommer mig således som skulle de återopade satserne i 6:te uppl. af *Genera* lemna det genom erfarenhet gifna — skapelsens resultat — så att säga oberördt; och att Linné med de nämnde satserne endast velat antyda ett sätt, hvarpå man kunde tänka sig skapelseakten genomförd. Han framställde sina förmodanden härom såsom en hypotes, hvarmed han visserligen icke afsåg att kunna rubba hvad han trodde vara genom erfarenhet fullt ådagalagdt.

¹⁾ Det heter: *Naturam dein genericas has plantas per generationes ambigenas (quæ structuram floris non mutant) inter se miscuisse et multiplicasse in Species existentes, quotquot possibiles, exclusis tamen e numero Specierum, ab ejus modi generatione productis plantis hybridis utpote sterilibus.* Tom II p. 9.

Endast 2:ne gånger under sin 47-åriga professorsverksamhet föreläste Linné öfver de naturliga familjerne. Vid båda dessa tillfällen förutskickades en inledning, innehållande åsigter om det naturliga systemets methodik. Uti den första, upptecknad 1764 af Fabricius, förekommer hypotesen om arternes tillkomst i närmaste öfverensstämmelse med den i Gener. Plant. Ed. VI meddelade. Uti inledningen till föreläsningarne 1771, upptecknade af Giseke, är denna aldeles utesluten. I stället förekommer ett yttrande, som måhända kunde tagas som bevis för, att Linné då sjelf betviflade hypotesens riktighet. Med ledning af Kœlreuters, då af Linné kända, första hybridiceringsförsök påpekas nemligen, att vid korsning äfven vextens yttre delar torde förändras — hvilket tydligen icke står väl tillsammans med hypotesens antagande (*Giseke Præl. in ord. nat. p. 9*).

Uti den af Fabricius meddelade inledningen förekommer, i sammanhang med hypotesen, några ord som ytterligare styrka att hypotesen afsåge att lemna en clav för affinitetsförhållandena hos vexterne, enligt det naturliga systemet.

II. Naturens arter uppfattade på olika sätt i botanisternes systemer.

En hvar har redan från barndomen lärt sig att skilja emellan barrträdet och löfträdet, emellan björken och boken, emellan blåsippan och hvitsippan; hvarje sådan art har redan på folkspråket sitt eget namn, och ingen sätter i fråga att de icke äro vexter af olika slag. Förhållandet är icke enahanda med olika slag af *förgätmigej*; dessa äro sinsemellan så lika, att det fordras en nogare jämförelse för att finna huru de skilja sig ifrån hvarandra. Linné antog att alla hos oss förekommande ekar tillhörde samma art; sednare observationer hafva visat, att emellan dem finnas olikheter, som antyda att de tillhöra 2:ne olika arter. Af boken förekomma hos oss 2:ne former, som skogboen brukar skilja såsom *bok* och *risbok*, men botanisten tvekar icke att anse dem såsom olika former af samma art. Jemte den vanliga *flüdern*, förekommer i vara trädgårdar en form, som ofta benämnes *persilje-hyll*; en hvar ser vid första ögonkastet, att den afviker från den vanliga genom smalare, mera delade blad. Men botanisterna

tväka icke att anse den sasom en tillfällig afart af den vanliga flådern. Om således de olikheter hos våra ekar, som undgingo Linnés vanda öga, med rätta anses antyda olika arter, men de olikheter, som en hvar kan se hos de olika formerne af hyllen, endast antyda varieteter af samma art, så torde redan dessa få exempel visa att det icke är den yttre formen som afgör huruvida yttre olikheter angifva en särskild art, eller blott en afart; att således de olikheter, som finnas hos olika vexter, måste äga olika betydelse. Och enahanda torde väl förhållandet vara med de likheter, som finnas emellan olika vexter, på hvilka vetenskapen grundar sin uppfattning om arter, släkten och högre grupper i systemet.

Naturen har icke sjelf gifvit oss någon definition på hvad som är *släkte* eller *art*, *afart* eller *race*, *koloni* eller *individ* hos vexterne; den har åtskiljt det ena *ståndet* från det andra, genom läge, genom ståndets ägande organer för sin utveckling, genom dess eget lifs begynnelse och slut. Kalla vi ståndet hos vexten ett *individ* (eller i vissa fall en *koloni*), så skall en noga jemförelse af individer äfven af samma art visa oss, att det ena individet är olik det andra, har sin individuala prägel, och att dessa olikheter stundom kunna vara större och tydligare, stundom så ringa att de icke anmärkas.

Men om man derjemte finner, att vissa olikheter hos individerne icke äro tillfälliga, utan hafva en särskild betydelse, t. ex. stånd med olika kön, och att de olika stånden äro oundgängliga för frambringandet af nya individer af samma slag; om detta frambringande af nya individer icke i någon mån tjänar för lifvets vidmakthållande hos det stånd som frambringar dem, utan snarare kan sägas förbruka dess lifskraft för ett utanför individets lif liggande ändamål, så torde väl vetenskapen böra i dessa naturens egna anordningar se ett bevis för att de olika individerne på visst sätt komplettera hvarandra, såsom tjänande för ett gemensamt mål — för bibehållandet af ett lif, som kan tänkas fortleva utöfver den tid och de gränser, som äro tillmätta individerne. Kalla vi nu detta lif, denna högre enhet för en *art*, så torde det väl ock kunna sägas att likasom standen (individerne eller kolonierne) finnas i naturen, så äro ock arterne genom anordningar i naturen bestämda och der tillstädesvarande: likasom individet har sina egendomligheter, sitt lif, sin begynnelse, sin begränsning och sitt slut, så har arten sina characterer, sitt lif med därför nö-

diga organer, sin uppkomst i tiden, sin utbredning till olika localer, och sitt slut. Om arten sålunda hos några vexter (de dioika) tydligt nog är angifven såsom i naturen befintlig, och lefvande sitt särskilda, från andra arter tydligt begränsade lif, så torde den väl icke heller gerna kunna förnekas hos andra vexter (de monoika och hermaphrodita), hvilka genom analogier af mångahanda slag sammanbindas med de förra.

Men dermed att arten erkännes såsom en af naturen själf bestämd sammanfattning af individer, är derföre visserligen icke angifvet, huru den i hvarje särskildt fall skall uppfattas, begränsas och karakteriseras. Och detta kan bero af olika omständigheter, deraf några här må anföras.

Det måste vara tydligt, att så länge man icke har någon allmän bestämning för begreppet *art*, man icke heller i det särskilda fallet kan afgöra om en förekommande form utgör egen art eller icke. Har man en sådan begreppsbestämning, men deri t. ex. finnes något som kan tydas på olika sätt, så blir den nödvändiga följden att tillämpningen blir olika, efter olika botanisters olika sätt att uppfatta den oklara begreppsbestämningen. Har man en klar definition på hvad som är art — i motsats till varietet, race o. s. v.; men vid tillämpningen vissa svårigheter möta, och botanisten icke gör sig mödan att öfvervinna dem, eller icke har öga för de likheter och olikheter som finnas, och till följe deraf begär misstag, icke följer deraf att begreppsbestämningen är felaktig, eller tillämpningen i det särskildta fallet omöjlig. Än mindre torde deraf kunna dragas de vida längre gående slutsatserne, att i naturen icke finnas några gränсор emellan naturens arter, eller att art, afart, race o. s. v. blott antyda olika gradationer i en successiv ombildning, som vextformerne antagas undergå under yttre förhållandens påtryckning. Det synes dock vara medelst en sådan logik, som man banat väg för flera af nutidens vigtigaste antaganden.

Linné kände till fullo de svårigheter, som i antydda afseenden förefinnas för den som vill sammanfatta vextlifvets mångfaldiga former under fasta vetenskapliga bestämningar. Hela hans behandling af hithörande frågor antyder både klarhet i uppfattning och en så riktig blick för hvad som kunde och borde göras, att något bättre sedermera näppeligen torde vara framställt. Men under den långa tid, då man nästan uteslutande sysselsatte sig med beskrifningar efter Herbarii-

exemplar, öfvergick man alltmera till ett slentrianmessigt arbete, under ett ständigt jägtande att finna nya arter. Man glömde under tiden icke blott Linnés uppfattning och föreskrifter, utan jemväl betydelsen af det språk, hvarpå de framställdes.

Hela Linnés behandling af artdiagnostiken, likasom de af honom lemnade föreskrifterne antyda tillräckligt att han stod på annan grund än många hans efterföljare. Emedan han fäste ringa eller nästan ingen vikt vid de individuella olikheterna, och antog att dessa åt samma art stundom kunde gifva olika utseenden, vagade han till och med uttala att alla varieteter torde vara genom konstens tillhjälp uppkomne; och han upptog i sina arbeten högst få varieteter äfven hos sådane arter, som i nyare arbeten antagas mycket varierande. Han insåg nog, att ju flera olika characterer som tilldelades arterne, desto lättare skulle de individuella olikheterna kunna göra artdiagnostiken osäker, och han föreskref derför att diagnoserne skulle begränsas till det minsta antal characterer, som voro nödiga för bestämningen; men dessa characterer skulle ock innefatta det *väsentliga*, det hvarigenom den ena arten skiljde sig från andra. För ett sådant utarbetande af artdiagnostiken fordrades icke blott en noggrann och i detalj gaende granskning af alla kända arter, utan jemväl att, vid upptäckten af en ny art, en ny jämförelse borde ske med de förut kände, och möjligen en omarbetning företagas med de förut gifna art-diagnoserne. Det var i enlighet med denna uppfattning som *Species plantarum* blef det sista af Linnés reformatoriska arbeten; och det var det gedigna arbete, hvilket derpå var nedlagdt, som framkallade Hallers omdöme om detsamma: *maximum opus et æternum*. Det var väl ock till följe af Linnés uppfattning af artbegreppet, som han redan i *Critica Botanica* kunde våga inleda capitlet derom med orden: *Partem adgredior Botanices, in hunc usque diem intactam*. Det vore icke svårt att genom exempel, hemtade från både tidigare och sednare författare, visa huru olika både art och artdiagnostik af dem uppfattats.

Linné ansåg artens yttre form vara uttrycket för ett eget lif, hvilket både under sin fortgående utveckling hos samma individ kunde i någon mån ikläda sig olika former, och som hos olika individer kunde efter olika yttre förhållanden förete vissa olikheter. Detta sålunda både efter ålder och indi-

vidualitet i sin yttre gestalt föränderliga lif antog han vara ärftligt, så väl till sina bestående characterer, som till möjligheten att framträda i tillfälliga förändringar af den yttre formen. I motsats härtill antog han varieteten (lokal form, race o. s. v.) såsom en af yttre omständigheter framkallad form, hvilken, likasom den uppkommit under vissa förhållanden, under andra återginge till den stamart som frambringat den. För mig vill det synas, som voro begreppen art och varietet på detta sätt fullt bestämda. Emedan Linné ansåg arten såsom i naturen fortlefvande, kunde han uttrycka sina bestämningar på följande sätt:

Species tot numeramus, quot diversæ formæ in principio sunt creatæ.

Varietates tot sunt, quot differentes plantæ ex ejusdem speciei semine sunt productæ.

Man har mot dessa bestämningar gjort den anmärkningen, att då ingen kunde veta, hvilka vexter som tillkommit i urtiden, så blefve i praxis definitionerna oanvändbara. Men Linné stödde sig på det af erfarenheten bevisade förhållandet, att »lika föder lika», och hänvisade till culturer på olika lokaler för att vid tillämpningen i hvarje tvifvelaktigt fall få afgjort om en form borde betraktas såsom variation eller egen art. Må man gerna medgifva, att sådane odlingsförsök äro förenade med svårigheter af flera slag, men icke bevisar tillvaron af sådane hvarken methodens omöjlighet eller otillräcklighet för vinnande af ett bestämdt resultat.

Hvad angår tillämpningens svårigheter, så stodo de fullt tydliga redan för Linné. Han sammanfattar dem i *Philos. Botanica* i § 283, men uppgifver äfven sättet att öfvervinna dem; han uppfordrar till allas gemensamma sträfvande och allvarliga arbete för ändamålets vinnande ¹⁾).

Likasom Linné antog att det ena släktet skiljde sig ifrån det andra genom någon viss structur-olikhet i fructificationsdelarne, så ansåg han att emellan arterne af samma släkte borde finnas någon bestämd olikhet: *character essentialis* (= *differentia specifica* eller *nomen specificum*, som denna före införandet af trivial-namnen af honom kallades). Af yttranden på många olika ställen framgår, att Linné ansåg uppsökandet af denna karakter vara af den största vikt för vetenskapen

¹⁾ »Ne varietas loco Speciei sumatur, ubique cavendum est. Hoc opus, hic labor est, adeoque summa industria inquirendum».

(*opus infiniti laboris*). Han föreskref, att hvarje uppställare af en ny art borde uppgifva denna karakter, hvarigenom den nya arten skiljde sig ifrån förut kända (§ 294). Det var Linnés stora förmåga, att uppsöka dessa characterer, som gjorde hans diagnoser till mäterstycken, hvilka af andra knapt blifvit öfverträffade. Men hans efterföljare glömde allt mera denna föreskrift, eller lemnade den åsido. Nästan i alla planchverk har man åtnöjt sig med att gifva en bild af växten, sådan som tecknaren såg den, icke alltid sådan den var i naturen; och man öfverlemnade sålunda åt den, som efter bilden skulle bestämma växten, att sjelf utfinna den character, hvarigenom arten skiljer sig ifrån andra. *Spiræa Sorbifolia* och *Spiræa Lindleyana* äro hvarandra mycket närstående arter. Uti den beskrifning af denna sednare, som åtföljer den i *Botanical Register* lemnade afbildningen, omtalas vissa habituella olikheter (flera småblad, yfvigare blomster), således olikheter som ofta äro följd af cultur, hvarigenom den nya arten skulle afvika från den förut kända; men det hvarken omtalas i beskrifningen eller det synes af planchen, att stiplerne äro olika hos de båda arterne. Efterser man i samlingar af Indiska växter, som torde anses företrädesvis värda att rådfrågas, så finner man mera hopdragna exemplar, sådane man torde vänta i vildt tillstånd, der benämnda *Spiræa Sorbifolia*, ehuru de enligt stiplernes form tydligen tillhöra *Spiræa Lindleyana*. Man har således här förblandat 2:ne arter, tydligen emedan man förbisett den *character essentialis*, som för dem kunnat uppgifvas. Om man nu, utan att märka det gjorda misstaget, drager vidare slutsatser om de båda arternes stora likhet och sannolika öfvergång till hvarandra, om deras geografiska utbredning o. s. v., så är tydligt att det först begångna förbiseendet föder af sig en hel serie af nya misstag. Båda arterne hafva under en följd af år varit odlade i Lunds botaniska trädgård. Den ena, en Siberisk art, kommer tidigt fram och faller tidigt sina blad, men synes icke hafva ringaste olägenhet af våra vintrars köld. Den andra från Himalaya kommer mycket sednare fram på våren, men har stått grön under milda vintrar 4—6 veckor längre än *Spiræa Sorbifolia*. För starkare köld är den deremot mycket mera känslig, så att större eller mindre del af de under året bildade grenarne ofta frysa bort under den kommande vintren. Huruvida dessa biologiska olikheter möjligen bero af structurförhållanden, känner jag icke.

I den mån det naturliga systemets method infördes äfven i den beskrifvande botaniken, ersattes de Linnéanska art-diagnoserne allt mera med förkortade beskrifningar. Det vore icke svårt att genom exempel visa, huru föga dessa beskrifningar i många fall motsvara de Linnéanska fordringarne på art-diagnostiken¹⁾. Det torde i allmänhet vara svårt, att efter dessa beskrifningar med någon säkerhet bestämma arterne inom många släkten. Under sednaste tid har man kommit derhän, att icke ens göra försök till framställandet af en art-diagnos. Uti ett större arbete öfver amazon-områdets och andernes Hepaticæ har dessa områdens berömde genomforskare, R. Spruce, lemnat utförliga beskrifningar för sannolikt mera än 300 arter, utan att med en enda diagnos söka antyda några characterer för dessa nya arter.

Såsom ett viktigt medel för artdiagnostikens fullkomnande föreskref Linné, att alla vextens delar skulle på det noggrannaste undersökas, och dervid äfven tagas till jmförelse det characteriserande för andra arter inom samma eller närstående släkten. Det är neml. så, att en character framstår mera hos en art, en annan mera hos andra; genom att jemföra flera framstå sålunda för ögat characterer, som annars lätt förbises. Då man först fann former af släktet *Plocamium* vid Nya Hollands kuster, antogos de vara varieteter af den vid Europas kuster vanliga *Plocamium coccineum*. Så länge man endast kände en art, kunde det för plocamii-arterne egendomliga förgreningssättet med mera lätthet förbises. Men då man fann detta förgreningssätt realiseradt i någon mån olika hos de australiska formerne, så kunde det icke gerna förbises att dessa sednare voro egna arter. Vid nogare granskning har man funnit, att de sålunda antydda arterne skilja sig jemväl genom andra characterer. Det måste vara tydligt, att i sådane fall den olika uppfattningen af hvad som är art eller varietet icke beror af något naturens vacklande i afseende på förekommande olikheter, utan uteslutande är att tillskrifva algologernes förmåga att kunna uppfatta det characteriserande för de olika formerne.

¹⁾ Linné säger (*Phil. bot.* § 258) *Character naturalis speciei est descriptio, character vero essentialis speciei est differentia.*

Mea nomina specifica (diagnoserne) e descriptione extraxere differentias; ex differentiis selectissimum investigarunt characterem essentialem, quo constant.

Jag skall tillåta mig anföra ett annat exempel, som går i så motto i annan riktning, att det visar huru förut uppställda arter måste reduceras till följe af fullständigare undersökning. Vid kusten af Adriatiska hafvet fann C. A. Agardh en af de många *Callithamnii*-former, som hafva »*pinnulæ alternæ sub-distichæ*,» hvilken han beskref såsom ny art under namn af *Callith. seminudum* — så kallad, emedan nedre delen af pinnæ saknar pinnulæ, under det på den öfre delen dessa framkomma alternerande vid hvarje led. Men samma art hade förut varit afbildad i Engl. Botany under namn af *Callith. Borreri*, utan att i beskrifningen med ett enda ord antydes den af C. Agardh antydda characteren för *C. seminudum*. Denne sednare hade å sin sida icke observerat, att hos *C. seminudum* från basen af de större grenarne ofta utskjuta grenar af egendomlig art (rotbildningar). Då således De Notaris fann denna egendomlighet hos några medelhafs-exemplar, antog han dessa bilda en egen art (*Call. calcaratum*). Men denna egendomlighet kan man se antydd redan på figuren af *Call. Borreri* i Engl. Botany, ehuru mindre noggrannat återgifven och icke omnämnd i beskrifningen. Så har samma art upptagits såsom 3:ne arter, icke på grund af någon artens variering i naturen, utan till följd af ofullständighet i undersökning och beskrifningar. Ingen af de 3 algologerne omnämner att *C. Borreri* har det ena slaget frukter (»*sphærosporerne*») afvikande från samma organ hos de flesta andra *Callithamnier*. Hade någon observerat detta förhållande, utan kännedom om att sådana sphærosporer alltid förekomma hos *C. Borreri* (jemte hos några andra arter), så kunde man lätteligen haft ett nytt slägte för samma vext, som föranledt uppställandet af 3:ne arter.

Med den skarpa blick Linné ägde, och med den rika erfarenhet han förvärfvat, ansåg han sig äfven kunna uppgifva hvilka olikheter i allmänhet antyda olika arter, och hvilka andra han ansåg hafva mindre betydelse (*phil. bot.* §§ 265—280). Det är dock af hela hans framställning tydligt, att han dermed endast åsyftat lemna en ledtråd vid tillämpningen. Här, som väl öfverallt, stälde sig Linné på erfarenhetens grund, och det var tydligen hans mening att den uppgifna reglen skulle i hvarje särskilt fall pröfvas. Han anför sjelf exempel på huru äfven de delar, som enl. hans omdöme lemnade characterer af största vikt, i vissa fall kunde vara olika hos arter af samma slägte (blommans form och delning hos *Gentiana*), huru pistil-

lerne än voro 3, än 5 hos olika arter af *Hypericum*; huru till och med hos samma art de olika könens blommor kunde vara olika (*»Caricæ mas monopetalus, foemina est pentapetala»*). Han uttalade till och med att hvad som i det ena släktet kunde utgöra en vigtig character kunde i ett annat hafva ringa betydelse; och det var i sammanhang härmed, som han uttalade såsom grundlag: *Scias characterem non constituere Genus, sed Genus characterem*.

Med dessa grundsatser skulle Linné för visso icke hafva dragit några vidtgående slutsatser af de förändringar, som kunna genom race-croisseringar uppstå i de tama dufvornes näbb och klor. Redan 1744 kände Linné exempel på fullt lika abnorma bildningar inom vextriket i *Pelorian*, som han gjorde till föremål för en särskild afhandling, hvilken inledes med följande ord: Inom fäderneslandet har nyligen upptäckts en ört af en så förunderlig daning, att man kunde hafva rätt att sätta i fråga, om naturen någonsin frambragt något liknande. Vexande bland andra stånd af den med symmetrisk blomkrona väl kända *Linaria vulgaris* (*Antirrhinum Linaria* L.), buro nagra stånd helt annorlunda bildade, regelbundet 5-flikiga blomkronor. Linné erkände att den icke enligt sina characterer kunde tillhöra samma släkte (*nisi in uno Genere duos diversos assignare velimus characteres, quod regulæ adversatur in Botanica fundamentali*), ehuru den i allt annat öfverensstämde med den vanliga *Lin. vulgaris*. Det synes tydligt nog, att Linné till en början med häpnad sett denna egendomliga vext, och att han motvilligt uppställde den såsom eget släkte; och han inlade genast i namnet en antydning om den monströsa bildning, som han antog här förefinnas¹⁾. Men härom vågade han till en början icke bestämdare uttala sig, enär den till Upsala trädgård inflyttade vexten dött bort, och möjlighet till observationer på sjelfva vextlocalen genom andra förhållanden tillintetgjorts. Af de jemförelser han gör med fyllda och proliferande blommor, med *»caules fasciati* o. s. v., torde dock synas huru han allt från början uppfattade den egendomliga bildningen. Redan följande året förekommer i 1:sta editionen af *Flora suecica* under *Antirrhinum foliis lanceolato-linearibus* anmärkningen: *Metamorphosin hujus plantæ stupendam descriptam legas in Diss. de Peloria*. Ut i 2:dra

¹⁾ Om namnet Peloria heter det: *»monstrum significat, quippe in quo versus videtur communis naturæ ordo»*.

uppl. af Flora suecica citeras afhandlingen utan anmärkning. Uti *Philos. Botan.* (1751) § 271 heter det *monstrōsi flores et plantæ a naturalibus originem omnes trahunt*; och här tillägges anmärkningen: *monstra animalium nullus pro distinctis speciebus umquam sumsit, ergo nec plantæ sumantur.*

Jemte de olikheter, som med afseende på uppfattningen af vexternes arter, kunna förekomma i systemerne, beroende af misstydingar och förbiscenden, härleda sig många andra, och kanske de flesta, ifrån olika uppfattning om hvad som med en art bör förstås. Jag skall tillåta mig några få exempel:

De former af släktet *Aconitum*, som förekomma i den tyska floran, antogos af Reichenbach tillhöra 34 olika arter, utan att bland dem räknas sådane, som endast voro kända såsom kulturformer. Men dessa samma former hänföras af Koch till blott 6 arter. Det torde vara tydligt att denna stora olikhet måste bero på en mycket olika uppfattning af hvad som är art eller afvikande form.

Utan antydan om någon varierande form upptog Linné *Draba verna* såsom en af den svenska floras allmännaste arter; och på samma sätt upptages den ännu af Areschoug i sednaste bearbetning af Skånes flora. Af Decandolle gjordes den till typ för ett eget slägte, *Erophila*, omfattande (i *Syst. Nat.*) 5 arter. Om den ena af dessa arter, *Er. americana*, som skulle afvika ifrån den europeiska genom längre frukt, säger Koch, efter jämförelse med amerikanska exemplar, att den är vanlig äfven i Europa. Som varietet upptager Koch en annan form med runda frukter, om hvilken han säger sig tvifla, huruvida den motsvarar en tredje, *Dr. præcox*, af de Decandolleska arterne. Reichenbach upptager *Draba præcox* och *Dr. verna* såsom skiljda arter, båda förekommande på snarlika lokaler inom den tyska floran. Uti en uppsats af år 1873 uttalar sig Alexis Jordan sålunda: Jag har redan för många år sedan anmält 53 arter af *Erophila*, alla uppställda på bekostnad af *Draba verna* L. Sedermera, i den mån mina samlingar ökats, är det icke endast 53, utan omkring 200 arter af *Erophila*, som jag hvarje år genom frösädd bibehåller, alla individer af samma form icke erbjudande annan olikhet än i storlek, beroende af deras tätare förekomst på en ringa rymd eller jordens fruktbarhet. Han omnämner, att dessa *Erophila* arter finnas öfverallt; och yttrar sig med något missmod om Linné, som genom sina bestämningar af arterne försvärat de

olika formernes särskiljande i nya arter. Syftet med den ifrågavarande uppsatsen angifves hafva varit att fästa uppmärksamhet derpå, att två eller flera, mer eller mindre olika, men mycket närstående former stundom påträffas på samma lokal, olikheterne i flera fall bestående af olika färgade eller olika tecknade blommor. Måhända kan man misstänka, att hela denna uppfattning hvilar på föreställningen att individuella olikheter icke förekomma hos vexterne, eller på förbiseende af att dessa individuella olikheter än kunna vara mera i ögon fallande, och då anmärkas, än så obetydliga att de lemnas utan afseende ¹⁾).

Till en sådan missuppfattning torde måhända anledningen kunna sökas uti sjelfva det arbetssätt, som den beskrivande botaniken efter den Linneanska tiden allt mera begagnat. Linné kände icke ¹₁₀ af de arter, som nu finnas beskrifne, och deraf största delen beskrifvits efter Herbarii-exemplar. Man har dervid väl vanligen gått tillväga på det sätt, att vissa föreliggande exemplar beskrifvits och blifvit stämplade som *typiska* för arten; när sedan nya exemplar tillfördes, som mera eller mindre voro afvikande, betraktades de väl vanligen antingen såsom endast varierande former, eller såsom mera bestämda varieteter. Det förekommer mig som skulle genom ett sådant tillvägagående småningom en uppfattning om arten kunna göra sig gällande, som mycket afvek från den Linneanska. I stället för att arten enligt Linné betraktades såsom en sammanfattning af lefvande organismer, hvilka, under inverkan af yttre förhållanden, utvecklades med en viss frihet, som gjorde de olika individerna i någon mån olika; så blef efter det nya uppfattningssättet arten en slags systematisk typ, kring hvilken herbariiexemplaren ordnades.

Jag har önskat med den föregående framställningen antyda både de onekligen stora svårigheter, som finnas för ett fastare grundläggande af de systematiska begreppen art, varietet o. s. v. hos vexterne, och huru Linné antog att dessa svårigheter kunde och borde öfvervinnas. Jag har tillika vågat anmärka huru hans efterföljare, glömmande eller med afsigt lemnande å sido de meddelade föreskrifterne, ingalunda

¹⁾ Linné yttrar: Varietates levissimas non curat Botanicus (*Philos. Bot. sub. nr 310*); och på ett annat ställe: Quot sunt individua, tot sunt in mundo varia artificia, nec duo inveniuntur perfecte similia; hinc in varietate sese jaetare Naturam dixere (*Linn. Introd. in Ord. Natur. cura Fabricii*).

närmat sig det för Linné hägrande målet; äfvensom att den oklarhet och olikhet i uppfattning, som i många särskildta fall blifvit slutligen rådande, till en betydlig del torde kunna härledas dels från observationernes ofullständighet, dels från det omethodiska o:h resultatförfelande arbetssätt, som ofta torde hafva användts. Är denna min uppfattning i någon man riktig, så är tydligt att de slutsatser, som descendenstheorien för sin uppfattning om racer, varieteter, arter o. s. v. — såsom varande obestämda gradationer af en öfverallt i naturen förekommande föränderlighet — velat grunda på olika botanisters olika tillämpning i särskildta fall, ingalunda kunna vara hållbara. Såväl Linné som kanske de flesta, hvilka sysselsatt sig med systematisk botanik, hafva efter sin erfarenhet visserligen kommit till den slutsatsen, att det finnes större eller mindre olikheter mellan olika varieteter, olika arter, olika släkten; de hafva funnit vissa characterer mera constanta än andra, men hvarken den ene eller andre betviflade väl någonsin, att äfven de i allmänhet mest constanta characterer, i särskildta fall kunde visa sig svikande. Men det var naturen, och icke theorierna, som i alla händelser borde gifva utslaget.

III. Arten uppfattad såsom uttryck för ett särskildt, för den egendomligt lif; ofta karakteriserad genom yttre och inre bildning, genom biologiska förhållanden, förekomst på vissa localer och deraf beroende utbredning m. m. —
(»Striden för tillvaron»).

Linné tänkte sig arten icke blott såsom iklädd en viss yttre form, hvarigenom den skiljdes ifrån andra arter, utan han antog jemväl att olika individer af samma art kunde förete individuela olikheter, hvilka han i de flesta fall ansåg hafva ringa vikt, men i andra fall antydande viktiga, af naturen fastställda olikheter (individer af olika kön). Den sålunda hos olika individ mer eller mindre skiftande formen ansåg han såsom det genom vissa karakterer bestämda uttrycket för ett särskildt inneboende lif, som sjelf reglerades af oföränderliga lagar. Hvarhelst alltså samma lif utvecklade sig, under den ena latituds-graden eller under den andra, under olika perioder i tiden, borde det framträda hos dess flera eller färre repre-

sentanter, mer eller mindre skiftande i individuella olikheter, men med bibehållande af den prägel, som för arten vore karakteriserande.

De oföränderliga lagar, som reglerade artens lif, bestämde att den ena arten skulle utvecklas till en ringa ört, den andra till ett väldigt — talrika enkla individer motsvarande — träd. Hos den ena arten skulle ståndets lif vara fulländadt under en enda sommar, eller på än kortare tid; hos andra först under flera; och hos åter andra skulle trädet fortleva i århundraden. Några skulle blomma en enda gång, och derefter dö bort; andra skulle framskjuta nya blomster år efter år. Hos den ena arten framkommer blomman under en årstid, hos den andra under en annan; hos den ena öppnas blomman tidigt på morgonen, hos den andra sednare på dagen, hos en tredje först mot aftonen. Många, som under dagen hafva bladen vidöppna, sluta dem tillsamman under natten, i det några böja bladen mot hvarandra uppåt, andra nedåt. *Trientalis* lutar nedåt under natten, men står upprät under dagen o. s. v.

Likasom lifvet hos hvarje art har sina egendomligheter, så fordrar hvarje art vissa yttre förhållanden, såsom nödvändiga villkor för utveckling och fortlevande. Den ena arten trivdes i hafvet, den andra i sötvattnen; vissa lefva på sandfältet, andra på klipporne; de flesta föredragande det fulla ljuset, andra de skuggrika skogarne. Under det flertalet växer fordra, för att kunna lefva, en mer eller mindre riklig tillgång på vatten, så gäfvdes det några, som hade en sådan organisation, att de upphängda i ett rum ändock i månader kunde fortsätta att vexa (*Stat. Plant. p. 10—11 § VIII*). Alla de olika slag af localer, som finnas på jorden, kunde således hvardera få sin vegetation, som lika mycket den der tridfdes, vanligen vantridfdes på andra, der omgifvande förhållanden voro olika. Tundror, hedar, stepper, cactus- och pampas-fält hafva sålunda hvardera sina växter. Tropikerne hafva sina arter, Lappland och Siberien sina. Många arter trivas endast på alperne, andra lefva på låglanden. Hela jorden skulle sålunda vara full af växter, och ingen local förblifva öde.¹⁾

Men Linné var alltför noga observerande naturforskare för att icke inse, att de olika localerne icke blott småningom uppkommit och fått hvar sin egendomlighet, under inflytande af

¹⁾ Jemför *Linn. Oecon. natur. § VIII*.

atmospheriska förhållanden på olika jordmän, utan äfven ständigt undergingo förändringar och sjelfve voro stadde i en fortgaende utveckling. Redan i sina första arbeten beskrifver han huru kärren uppkomma, huru tufvor af *Scirpus* och *Eriophorum* deri bildas, hvilka åter bereda fäste åt andra vexter, och huru kärret öfvergår till en behaglig äng (*Fl. Lapp. sub. N:o 20*). Under det kärret fylles af ett mera öppet vatten, och *Hottonia*, *Utricularier* m. fl. deri finna en passande bostad, så dominera icke gerna deri *Sphagnum*-arterne, med sina *Droseræ*, *Pinguiculae*, *Oxycoccus* o. s. v.; och många af dessa hafva vanligen försvunnit, när *Parnassia*, *Primula farinosa*, *Valeriana dioica* o. s. v. förekomma på samma plats. Föregående generationer af vexter måste försvinna, när de för deras välbefinnande nödiga yttre villkoren icke längre äro till; och nya generationer af arter göra sitt inträde och blifva dominerande i den mån de för dem passande villkoren inträda (*L. Philos. Bot. p. 265—266*). Och hvad som vi se salunda föregå hos oss, det förekommer äfven annorstädes med de modificationer, som betingas af mer eller mindre olika klimatiska och andra förhållanden. Ängarne på södra Europas alp-sluttningar hafva samma yttre character som ängarne i nordn. *Trollius* och *Arnica*, *Gentianer* och *Hieracier*, *Pedicularer* och *Orchideer* stå äfven der i brokig blandning instufvade i gräsmattan; vissa arter äro desamma, andra, sannolikt mer finkänsliga för i någon mån förändrade förhållanden, utbytas mot analoga former, som icke beteckna någon väsendtlig ändring i de ängen karakteriserande vextformerne.

Vissa vexter synas hafva den egenheten, att företrädesvis trifvas på localer (rika på särskildta ämnen), som påträffas i närheten af människans bostäder. Några af dem upptaga åkrar och trädgårdar, andra mera uteslutande sop- och gödsel-högar. Dessa sednare hafva ock blifvit kallade *plante ruderales*. De förra hafva sannolikt förekommit ursprungligen på skråningar med lösare jord; de andra på hafsstränder. Då de i närheten af människans bostäder funnit de yttre, för deras välbefinnande passande villkoren, hafva många följt människan under hennes flyttningar till olika länder. Likasom man i det nordliga Sveriges vidsträckta skogar, genom tillvaron af en sådan vext, kan spåra platsen för ett der fordom befintligt torp, som öfvergifvits, så finnas stundom i andra verldsdelar en sådan Europeisk vext, som följt utvandren, och sedermera der utbredt sig

längs efter vägar och stigar till der upptagne boningsplatser. Likasom *Capsella bursa pastoris* följer ofta Europeen till varmare verldsdelar, så hafva andra, söderns vexter nått ända till norden, och kunna såsom annueta, och i trots af våra vintrar, periodvis här fortleva. *Datura* och *Xanthium* arter hafva på detta sätt spridt sig till olika verldsdelar, så att botanisterne nästan tvekat om deras ursprungliga hemland. Men näppeligen torde botanisten häraf vara berättigad draga den slutsats, att sådane vexter skola en dag kunna inkräkta jorden. Hos oss har man sett dem komma och försvinna: och mycket olika torde väl icke förhållandet vara med de Europeiska vexter i varmare länder, som uppspira i den hvite mannens fotspar. Man ser icke *Capsella* utbreda sig på vara ängar, lika litet som den nedtränger i kärren.

Linné hade sig väl bekant, att olika vexter gifvo ett mycket olika antal frö. Såsom exempel på rikliga fröbildare nämner han att *Zea* på ett enda stånd kunde frambringa under sommarn ända till 2,000, *Inula* 3,000, *Helianthus* 4,000, *Papaver* 32,000 och *Nicotiana* ända till 40,000 frön (*Phil. Bot.* p. 86). De anförda exemplen äro alla örter; enär Linné ansåg träden likasom sammansatta af enklare individer, så att ett enda träd kunde motsvara ända till 10,000 örter, och han omnämmer detta i sammanhang med de nämnda exemplen på örternes frörikedom, så torde han väl sannolikt hafva velat antyda det man skulle komma till vida högre antal frö på ståndet, om man hemtade exempel ifrån träden. Jag har räknat fröna i några björkhängen, och funnit 250—300 frö i ett sådant hänge; och omkring 50 hängen på en mindre gren. Huru många sådane grenar förekomma på ett träd, beror naturligtvis af trädets storlek. Om man antager blott 100, så kommer man upp till ett antal frö, som öfverstiger millionen. Men huru stort ock antalet frö kan beräknas på ett stort träd, så blir dock detta försvinnande litet mot de antal fortplantnings-kroppar, som utvecklas hos vissa i vattnen lefvande lägre organismer, hvilka hvar för sig äro så små, att de för det obeväpnade ögat endast blifva synliga derigenom, att de snart uppträda i oräkneliga antal och samlade tillhopa i massor. Då man ville rena vattnen i Berlins Thiergarten från deri befintliga kisel-infusorier, och dag efter dag uppsamlades och lassvis bortfördes massor deraf, utan att de syntes synnerligen förminskas i vattnen, gjordes de till föremål för en särskild undersökning af Ehren-

berg. Han anmärker i sin redogörelse derför, att man skulle hafva svårt att nämna det tal, som angafve antalet af de små trädar, hvilka lågo samlade inom en ringa rymd. Då trädarne, som bestå af korta led, oupphörligt tillvexa i längd, bildande nya led, och hvarje led kan afsöndras och utvexa till en ny tråd, som åter tillvexer på samma sätt, och på kort tid, så vore lätt begripligt att de förökades i en utomordentlig proportion; hvilken han försöker förtydliga genom uttalandet, att de trädar, som, packade tillhopa, bilda en fast massa af en kubiktuns storlek, skulle, om de obehindradt fluge föröka sig, så som det visat sig att de hvar för sig kunde förökas, under en tid af 8 dagar hafva bildat en fast massa af hela jordens storlek! Och likväl skola dessa milliarder i vattnen vid Berlin, när de lefva och föröka sig efter den ordning och med de inskränkningsar, som naturen för dem utstakar, icke förma bilda en ringa fläck, som höjer sig nagon linea öfver vattenytan! Möjligheten att utveckla och föröka sig i en utomordentlig grad förefinnes; men utvecklingen begränsas genom sjelfva villkoren för deras tillvaro, sasom endast lefvande i vattnet — och genom det begränsade rum, som äfven vattnet intager. Så har väl äfven allt annat i naturen vissa gränсор, som enligt gifven ordning icke få öfverstigas.

Dessa gränсор, som tyckas finnas öfver allt och i alla riktningar, de borde ingalunda få underskattas. Om det är riktigt hvad Linné antog, och ännu torde af mången antagas, att trädet bör betraktas sasom en koloni af individer; om i regel hvarje dess knopp kan gifva upphof till nya grenar, som ater frambringa knoppar; så kunde man lätt frestas tro att hvarken för koloniens lefnadstid, eller för dess utbredning i rummet någon oöfverstiglig gräns borde finnas. Man känner också träd af flera tusen ars ålder, och stammar med de väldigaste dimensioner. Men säkerligen hafva dessa vextverldens resar — lika väl som träd med kortare lefnadstid och mindre dimensioner — sina gränсор i tid och rum, enligt hvad som för dem engång blifvit bestämdt. Af kända undersökningar torde nog framgå, att om vissa träd kunna uppnå samma höjd som en af de högsta pyramiderne, så hinna andra trädslag knapt höjden af Peterskyrkans kupol o. s. v. Granen och Furan i den svenska skogen uppnår icke på langt när ädelgranens höjd; och ett mer än hundraårigt träd af den vanliga Enen öfverstiger väl knapt höjden af den bildstod, som man nu reser at

Linné i skuggan af Humlegårdens lindar. Om de mest långlifvade träden uppnå en ålder af flera tusental år, så stadna de flestas långt derunder. Så har hvarje art sina dimensioner och gränсор för utvecklingen, och näppeligen torde kunna antagas, att den ena arten blir mindre till följe af yttre förhållandens inverkan. Så finnes nog för allt i naturen vissa och bestämda gränсор. Man kan på papperet beräkna de antal knoppar på trädet, som efter geometrisk progression skulle kunna bildas under loppet af vissa år; man kan beräkna den tid, som skulle åtgå för ett visst antal diatomacé-trådar att bilda genom sin massa en klump lika stor med jordens massa, men ingen torde med fog kunna ifrågasätta, att något träd skulle blifva ett nytt babelstorn, eller att diatomacerne kunde bilda någon särdeles märkbar utvext på jordens yta.

Skulle väl förhållandet vara annorlunda med de sinsemellan skiljda individernes förmåga att föröka sig i obegränsade antal, så att vissa arter skulle kunna utbreda sig öfver hela jorden, och att begränsningen i detta afseende endast berodde af andra vexters förmåga eller sträfvande att hejda dem? Eller finnes det icke i klimat, i jordmån och andra yttre förhållanden, vissa fordringar för möjligheten af utveckling och välbefinnande, som synas lika bestämdt tillhöriga hvarje art som en viss för densamma karakteristisk form? Finnes väl någonstädes *Veronica beccabunga* såsom ogräs på våra åkrar, eller *Veronica agrestis* grönskande i vattendragen; finnes väl *Veronica officinalis* på de upptagne trädgårdsrabatterne, eller *Veron. hederæfolia* på ängarne; finnes någonstädes *Veron. montana* på de öppna fälten, eller *Veronica spicata* i skogarnes skugga o. s. v. Och om dessa villkor för hvarje arts trefnad och tillvext synas lika oföränderliga som artens yttre form, så finnes ju redan i dessa yttre villkor bestämda gränсор satta för artens utbredning — beroende af en gång för alla gifna lagar; och inga lagrar, vunna af vexten sjelf i den ofta återopade striden för tillvaron, torde åt densamma bereda ett större utrymme än som för den varit afsedt under dess tillvaro på jorden. Det har antagits att, under en längesedan förgången period, träd med stora dimensioner, tillhörande de högre Cryptogamernes stora familj, nästan uteslutande utgjort den då befintliga vegetationen på jorden. Den öfver hafvet uppskjutande jordytan skulle då utgjorts af mindre öar, spridda i den stora oceanen; ett mildt klimat, sådant kanske som det nu finnes på Vest-

Indiens öar, och en med mera kolsyra blandad atmosfär skulle då hafva befördrat den kraftigare vextligheten hos datidens vexter. Men i dessa yttre förhållanden inträdde antagligen förändringar, och de vexter försvunno som voro skapade att lefva under då befintliga förhållanden.

Den tomt, på hvilken den nya botaniska trädgården i Lund anlades, hade förut varit en vanvardad åker, på hvilken ogräs och tistlar frodats i brokig blandning. Vid de djupgräfningar, som företogos, påträffades nere i alfven ett nät af trädar — de krypande rhizomerne till *Cirsium arvense*, *Polygonum* m. fl., hvilka korsade hvarandra i olika riktningar. Genom gräfningen förstördes väl dessa till största delen, men under de första åren uppskjöto dock talrika nya skott, hufvudsakligen af tisteln; men i den mån gräsmattan tätnade i kvarteren, och massan band sig samman på de macadamiserade gangarne, försvunno aldeles de obehagliga gästern. Det är väl ock mera sällan man ser *Chrysanthemum* och *Sinapis* på de fleråriga klöfverfälten. De upphöra, der de för deras trefnad passande yttre villkoren icke längre förefinnas.

Under jordarbetena i den nya trädgården påträffades på flera fots djup ett lager af sand, som delvis tillgodogjordes för gångar och jordblandningar. Åren derefter framkommo, på de uppkastade vallarne, talrika plantor af *Alyssum calycinum*. Det ligger nära till hands att antaga det fröna legat dolda i jorden från en tid, då platsen varit oodlad och jordmänen af annan beskaffenhet än nu. Till stöd härför torde väl kunna anföras den lilla vextens uppträdande i allmänhet inom Sverige. Uti Wahlenbergs Flora suecica (1824) finnes *Alyssum calycinum* icke nämnd, icke ens såsom en *planta adventitia*. Uti Fries Fl. scanica (1835) uppgafs den förekomma i östra Skåne, på de sandiga backarne vid Brösarp. I Liljas flora (1838) finnes icke heller annan local uppgifven. Ännu 1864, i 9:e upplagan af Hartmans Flora, är Brösarp det enda för Skåne uppgifna vextstället; men den angifves nu från flera localer i medlersta Sverige. Uti 2:dra uppl. af Areschougs sk. Flora uppgifves den förekomma på många olika ställen, snart sagdt inom hela Skåne; och i sista upplagan af Hartman omnämnas icke längre några särskilda localer för dess förekomst, men i stället säges den saknas i Dalsland. Areschoug uppgifver att det är i synnerhet på nyligen uppkastad jord, som den förekommer. Under den tid vexten spridt sig öfver

hela södra Sverige, har ett allmännare tillgodogörande af mergelgravar och anläggandet af våra jernvägar jemväl förekommit; och det torde väl således kunna ifrågasättas, om icke vextens framkomst snarare vore att tillskrifva frön, som från längre tider tillbaka legat i jorden och nu kommit till utveckling på de nybildade passande localerne, än någon vextens egen förmåga i den allmänna striden, som gjort den till eröfrare af nya boningsplatser på andra vexters bekostnad. På den sandblandade jord, der *Alyssum calycinum* bäst trives, stå vanligen vexterne glest och lemna oftast utrymme för ett vida större antal individer af sandfältens första pionierer. Mahända är vexternes gleshet beroende af den mindre tillgång till näringsämnen, som till en början der finnes. Men då näringsämnena ökas i den mån den lösare sanden öfvergår till mylla, borde sandens första inkräktare kunna utvecklas i allt större antal; om de i stället försvinna från dessa localer för att lemna plats åt andra vexter, så torde man väl kunna antaga, att det icke är de i striden för tillvaron kämpande sandvexterne som omedelbart förstöra hvarandra, utan det är de småningom, må vara genom vexternes egen verksamhet, förändrade locala förhållandena, som tvinga de första bebyggarna att draga sig tillbaka till andra för dem passande localer¹⁾.

De förhållanden, hvilka af Darwin anföras såsom bevis för en ständigt pågående strid för tillvaron, de voro jemväl kände af Linné. Jag har redan omnämnt hans beräkningar af de stora antal frö, som efter ett enda stånd och under en enda vextperiod kunna bildas. Uti en särskild afhandling (*De colonis plantarum*) redogör Linné för de medel och de olika sätt, hvarpå frön kunna öfverföras från en trakt till en annan; han lemnar en särskild förteckning på de vextarter, hvilka han antager hafva inflyttat ifrån andra länder till Sverige och som då förekommo i olika trakter af landet. Han anför jemväl hvilka exempel man på hans tid kände om dylika inflyttningar till andra Europeiska länder. Om förflyttningar till Ostindien, Amerika och Afrika af Europeiska vexter anför han inga exempel, men hänvisar till olika arbeten, hvari många sådane flyttningar omtalas. Såsom inledning till hela framställningen förutskickar Linné det allmänna uttalande, att vexterne äro för-

¹⁾ Redan Linné (*Oecon. nat. p. 23*) ger en beskrifning öfver myllans utbildning genom vexternes verksamhet, som jag förmodar vara i hufvudsak riktig.

delade öfver hela jorden efter olika klimat och localernes olika beskaffenhet, sålunda att hvarje slag bebor de platser på alperne, bergen, fälten, ängarne, åkrarne, kärren o. s. v., som äro de för hvardera mest passande, så att de der må kunna vaxa och blomstra. Han anför att frön och frukter af *Cassia fistula*, *Anacardium*, *Mimosa scandens*, *Cocos nucifera* m. fl. föras öfver oceanen till Norges kuster så friska, att de enligt gjorda försök, ännu äro grobara; men han uppräknar ingen af dessa växter bland de colonister, som sökt borgarerätt på Europeisk jord. Såsom stöd för att utländske colonister icke från längre tid tillbaka bebott Sverige anmärker han, att om de längre tid här varit bosatte, så skulle de helt visst hafva utbredd sig och blomstrat på andra ställen än der de nu finnas. Tulipa sylvestris anföres såsom förekommande i Lund och på andra ställen, der förut varit trädgårdar. För 50 år sedan var den i Lund ännu allmän på sådane localer. Med localernes småningom skeende förändring, har den alltmera försvunnit. Bland de till utlandet införde uppräknar Linné *Amaryllis sarniensis* och säger derom: Då engelsmännen först upptäckte denna särdeles utmärkta prydnadsvext, var den allmän på ön Guernseys södra sandiga kuster. Man kunde till en början icke förstå, huru denna vext kommit till denna ö. Man fann slutligen, vid nogare efterspaningar, att ett fartyg mot slutet af 1600-talet, kommande från Japan, här gjort skeppsbrott, och att dermed sannolikt öfverförda lökar af den på Japan allmänna vexten blifvit kringspridda på stranden och der funnit passande localer för utveckling. Den synes på Linnés tid der hafva varit allmän på för den lämpliga localer. Sedermera synes den vara så fullständigt försvunnen, att den i Babingtons Flora sarniensis icke ens såsom en planta adventitia omnämnes.

Uti en annan afhandling (*Oeconomia naturæ*) redogör Linné för de af Darwin anförda förhållanden, som visa hur den ena organismen ofta är beroende af den andra, och huru hela vextriket med hvarje nytt år utbreder sin fullhet och ymnighet för att tillfredsställa de otaliga djurens olika behof af föda. Han redogör särskilt för hvardera naturriket och i särskilda paragrafer, under rubrikerne *conservatio* och *destructio* anföras detaljer, som Darwin behandlar i kapitlet: *struggle for existence* under rubrikerne *high rate of increase* och *mutual checks to increase*. Men då Darwins syfte tydligen är att påvisa en allmän, i hela naturen förekommande *strid för till-*

varon, och i denna strid söker finna en anledning för ett småningom skeende urval, samt med tillhjälp af båda dessa antaganden tillhoppa kunna motivera en *fortgående utveckling* och *förändring* i den organiska naturen; så är Linnés syfte att visa en ändamålsenlighet i de i hvarandra ingripande naturföreteelserne, som vittnar om en ursprunglig plan för hela skapelsen, om en beräkning och ett noga afvägande af de i motsatta riktningar verkande krafterne, så att både de skapade arterne hvar för sig bevaras, och skapelsen i sin helhet vidmakthålles. När t. ex. Darwin anmärker att sångfoglarna, som lefva af insecter och frön — och således sjelfve äro tillintetgörare af organiskt lif — i sin ordning förstöras af roffäglar och måste antagligen minskas i antal, då under vissa tider de hos oss sakna tillgång till sin föda (*Darw. orig. of Species p. 62*), så påpekar Linné huru dessa förhållanden mildras, om icke fullt afhjelpas, genom särskilda hos dem nedlagda instincter. Han redogör således för flyttfoglarnas ombyte af boningsplatser, och söker visa hvarest de olika slagen under olika tider uppehålla sig. Han påminner om björnens ide, om mullvadens och igelkottens sätt att öfvervintra, huru tetraonerne hafva sina gångar under snön, huru insecterne ligga bevarade inom sina pupor, och att i sammanhang med dessa förhållanden lifvet under tiden fungerar på egendomligt sätt.

När Darwin anmärker (p. 68) att det är mindre en riklig tillgång på föda, som betingar en arts tilltagande i mängd, än den omständigheten, att den utgör byte för talrikare rofdjur, som vållar förminskningen, och såsom upplysande exempel anför att villebrådets mängd på de engelska jagtmarkerne beror nästan uteslutande af rofdjurens förödelser, så att om under en följd af år hvarken villebråd eller rofdjur sköts, så skulle sannolikt villebrådet blifva fåtaligare än hvad det är, då både villebrådet och rofdjuren jagas; så hänvisar i stället Linné dels på egendomliga instincter, som drifva flera djurslag att hvar på sitt sätt söka skydda sig mot sina angripare, dels visar han att äfven för de farligaste rofdjurs härjningar finnas inskränkande gränsor. Men framför allt stödjer han sig derpå att i naturen, likasom i samhället, tillgång och efterfrågan nödvändigt måste motsvara hvarandra. Hopas i öfvermått på något ställe rofdjuren, så skall den genom dem sjelfve förminskade födan föranleda äfven en minskning i rofdjurens antal;

tilltaga i öfvermått de djur af olika slag, som utgöra rofdjurens föda, så skola äfven angriparne tilltaga i antal ¹⁾.

Linné var så långt ifrån att i rofdjurens och andra djurs lefnadsvanor se ett bevis för hvad man kallat en i naturen pågående allmän strid för tillvaron, att han tvertom ansåg dessa djur såsom nödvändiga medel för upprätthållandet af en jemvigt i skapelsen. Uti 2:ne särskilda afhandlingar, och på olika tider, uttalar han sig i detta syfte. Han anmärker t. ex. att vissa flugor kunna på särskildta ställen föröka sig i sådan mängd, att de skulle skymma för solen, om icke de utgjorde en ständig föda för foglar och spindlar; att efter Nilens flöden antalet af qvarliggande grodor är så stort, att de snart skulle betäcka marken, om de icke förtärdes af storkar och falkar; att vissa trakter i Palestina stundom få öfvergifvas till följe af den ofantliga mängd der uppträdande råttor och näbbmöss, och att all vextkultur här skulle försvinna, om icke vissa gamar (*Perenopteri*) skyndade dit och gjorde slut på öfverflödet. Linné fäster äfven uppmärksamhet derpå, att många djur lefva på cadaveren efter de döda; dessa skulle förpesta-luften för de lefvande, om icke skaror af sådane rofdjur, med en förunderlig förmåga att uppspara dessa ruttnande ämnen, tillströmmade och oskadliggjorde dem. Likasom Linné i olika vexters behof af särskilda localer såg ett medel till förhindrande af någras alltför starka utbredning (*Polit. nat.* § 4), så ansåg han äfven, att hvarje djurslag hade sin mission att fylla i skapelsens helhet ²⁾. Och icke minst fäster han uppmärksamhet på djurens functioner för vexterne lif, huru några befordra deras utbredning öfver jorden, andra hindra deras alltför starka tilltagande ³⁾. Efter att hafva visat huru hvarje grupp biträder med sitt arbete i det helas tjänst, utbrister han: Så äro hundra och tusentals olika tjänstebefattningar

¹⁾ Si conditori placuit (säger Linné i *Oec. nat.* p. 43) ut quædam animalia quasi ad reliquorum horrendam lanienam creata sint, videtur eo potissimum tendisse providam ejus curam, ut non tantum suam habeant sustentationem, sed et eo ipso ad justam inter omnes species proportionem servandam inserviant, sicque impédiant ne plus justo, non nisi cum hominum et animalium detrimento atque perniciæ accrescant.

²⁾ Ut non satis sciam an mundus commodè pertistere posset si vel unica animalium species desideraretur (*Polit. nat.* p. 7).

³⁾ Uti en särskild afhandling (*Nectararia florum*) förklarade Linné det visserligen vara obekant, hvilket användande vexterne sjelfve hade för den i blommorne så ofta afsöndrade »nectar». Men att den tjänade för ett viktigt biändamål vore fullkomligen tydligt, när *Trochili* och *insecter.* under det de sökte sin föda i blommornes nectar, befordrade pollenkornens närmande till stigmat.

inrättade, på det att proportionen i naturen må bibehållas, och ingenting utbildas till något öfvermått. Allt skapadt skall underkasta sig den gifna ordningen, och intet får vara utan sin öfverherre (*Polit. nat. p. 11*). Om således Linné, på grund af sin uppfattning och sin erfarenhet om hvad som föregår i naturen, trodde sig kunna draga den slutsats, att dermed afsågs *ett hela skapelsens vidmagthållande, och bibehållandet af en afsedd jemvigt mellan naturens olika skapelser*; men samma förhållanden förde Darwin till antagandet af *en ständigt pågående strid för tillvaron till fördel för segraren*; så torde det ock vara tydligt nog, att slutsatsen är en hypothes, som hvardera antagit för att kunna förklara de i naturen observerade facta. Både Linnéaner och Darwinianer hafva sannolikt ansett hvarderas antagna förklaringsgrund såsom tillfredsställande. Det gäller då att bevisa, huruvida summan af kända facta tydligare tala för den ena hypotesen, än för den andra.

Vill man under en och samma benämning sammanföra alla de förhållanden, som utgöra den ena grundstenen för descens-theorien, så måste man väl vakta sig för att i benämningen se något mera än ett namn, som kan passa för vissa, men säkerligen icke för andra af de facta, som man under namnet sammanfattar. En strid i vanlig mening förutsätter väl ett activt uppträdande af båda, eller alla de stridande parterne, och i sådane fall kan man väl tala om en slutlig seger, vunnen strid efter strid, och i sådane fall hafva ett berättigande att förklara segren beroende af vissa segrarens företräden. Men en strid, som består i ett passivt beroende af yttre förhållanden, hvilka till och med kunna förhindra hvarje yttring af lif, kan icke gerna anföras som bevis för en seger, eller en strid, hvars utgång är beroende af den stridande sjelf. Uti en strid som utkämpas mellan 2:ne djur, och en strid deri en vext går under genom yttre förhållanden, är utan tvifvel redan en stor skilnad, om ock i detta fall båda kunna subsumeras under endera bemärkelsen af det dubbel-tydiga uttrycket: *»struggle for existence»*. Men om det är den nödvändiga följden af sjelfva vextens oförmåga att förflytta sig till olika ställen, att den icke sjelf kan föra sina frön till passande localer för deras utveckling och skaffa dem der den yttre omgifning, som är första villkoret för deras förmåga att gro, så borde icke den omständigheten, att ett oändligt större antal frö bildas än som komma till utveckling, med fog kunna åberopas såsom bevis

för en strid för tillvaron, i hvilken de lifskraftigare vinna seger öfver de svagare. Om frö af amerikanska vexter, som med golf-strömmen föras öfver till Norges kuster, med rätta sägas ofta vara grobara när de passande behandlas; men, uppkastade på den norska stranden, de icke gro, så kunna de väl icke sägas vara besegrade af de norska vexterne i en strid om tillvaron. De frö af varmare länders vexter, som vi uppdraga i drifbänk, de gro icke, när de utsås på fritt land. Frö af *Sonchus oleraceus*, hvilka nog föras med vinden lika väl till kärren och ängarne som till odlad mark, ser man icke utvecklas hvarken på den ena eller andra af de nämnde localerne. Såningsmannens frön, som falla på hälleberget och på vägen, de kunna icke gerna sägas duka under i en strid för tillvaron med lifskraftigare grannar.

Till ännu besynnerligare resultat kommer botanisten, om han af de ringa antal plantor af hvarje art, som utvecklas, i jemförelse med de stora antal, hvartill finnas anlag, antager skilnaden emellan båda vara en exponent af den strid för tillvaron, som föregått emellan de icke till utveckling komne och de sig utvecklande. Det är nemligen inom ett stort antal vextfamiljer vanligt, och ofta så genomgående att det antages såsom characteriserande gruppen, att ett större eller mindre antal ägg icke komma till utveckling. Hos *Linnaea* har ovariet 3:ne rum med talrika ovula i de 2:ne rummen, men endast 1 ovulum i det tredje; detta enda ovulum är större än de andra, och är det enda som utvecklas till frö. Hos våra ekar har hvarje ovarium 3:ne rum, med 2:ne ovula inom hvarje, men af dessa 6 ovula kommer regelbundet endast ett till utveckling. Björkens pistill har 2:ne rum, med 1 ovulum i hvarje, men den mogna frukten är enrummig med ett enda frö. Och hos vexter med ett stort antal ovula, anlagda inom samma pistill, kan man ofta i den mogna frukten (t. ex. hos *Paeonia*) se jemte de till utveckling komna fröna kanske lika många som icke kommit till utveckling. Det skulle sannolikt stämplas såsom ett hårdt tal, om man tillskref abortierandet, af några eller många af dessa ovula, en strid för tillvaron, som föregått i moderlifvet. Om man deremot i sådane ovarier med talrika ovula ser hvarje så stäldt, eller normalt krökande sig på ett sådant sätt, att befruktningsspunkten regelbundet vänder sig åt visst håll, så ligger det väl nära till hands, att i denna anordning se ett underlättande för den ifrån pollenkornet ned-

trängande rostellen att framkomma till befruktningpunkten. Likasom många födda frön falla på hälleberget, och därför icke komma till utveckling, så torde ock många anlagda ovula icke befruktas. Och det finnes måhända någon sannolikhet för att båda framkomma talrikare i syfte, att tillförsäkra flera eller färre af hvarje art de oundgängliga förutsättningarna för vidare utveckling.

Äfven Darwin själf synes hafva tvekat, huruvida vissa af honom antydda inskränkningar uti några arters öfverhandtagande utveckling kunde förklaras genom den antagna striden för tillvaron. Han säger (p. 67) »att det är mycket ovisst, hvad som egentligen hämmar hvarje arts tendens att tilltaga i antal. Må man jemföra en den lifskraftigaste art! lika mycket den är öfverlägsen i antal, lika mycket skall den vara öfverlägsen i tendens att ytterligare förökas. Vi veta icke i ett enda fall med någon visshet, hvad det är som hämmar den. Och detta må icke synas underligt, då vi äfven om människan, som är så mycket bättre känd än hvarje annat djur, i det afseendet veta så litet.» Oafsedt detta, uttalar likväl Darwin i mycket bestämda ordalag, att då flera individer bildas än som möjligen kunna nära sig, så måste i hvarje fall föregå en strid för tillvaron; och detta antagande, säger han, är endast en tillämpning af Malthus lära¹⁾, applicerad med mångfaldigad styrka på hela djur- och vextverlden.

Lika litet som man sätter i fråga att inrätta det civiliserade samhället efter teorier, som kunde hämtas ifrån anordningar i naturen, lika oriktigt torde det vara att tyda naturföreteelserne efter förhållanden, som förekomma inom det tillkonstlade samhället. Öfverflöd och brist kunna förekomma på det ena området som på det andra, och verkningarna deraf kunna i någon mån motsvara hvarandra, utan att hvarken orsaker eller följder verkligen behöfva vara lika. Om norra Amerikas inflyttande befolkning allt mera utbreder sitt område på bekostnad af ur-invånarnes jagtmarker, eller den efter rikedom sträfvande industri-idkaren söker i täflan med konkurrenter vinna öfverhand öfver dessa, så kunna sådana förhållanden för visso icke anses såsom bevis för något sträfvande hos den ena vextarten, att utbreda sig på bekostnad af andra;

¹⁾ Jag skall icke tillåta mig ingå närmare på en redogörelse för Malthus lära, om ock det kunde vara lämpligt att visa, huru missförstådd denna lära i allmänhet är, hvarhelst nästan den i nyare arbeten citeras.

och skulle någonstädes en strid för tillvaron — i den vidsträckta mening Darwin gifvit åt uttrycket — förekomma emellan passiva vexter, så är den väl oftast framkallad genom människans ingripande i naturens anordningar.

Jag kan icke erindra mig någon uppgift om, och känner icke något mera upplysande exempel på en strid för tillvaron mellan vexter, än det som våra nordiska skogar förete, då, oftast efter der införd trakthuggning, nya plantor i rikligaste mängd uppspira på den blottade arealen. Ofta framkomma de så tätt intill hvarandra, att efter få år de unga träden blifva hinderliga för hvarandras tillväxt, och samtliga blifva lidande under den utsvaltningsstrid, som man möjligen kunde säga att de föra med hvarandra. Småningom duka några under, lemnande något större utrymme åt de återstående; men i den mån dessa tillvexa mera, förnyas striden åter, till dess, stundom efter många års förlopp, de få återstående hafva den tillgång till ljus och luft, som för trädets normala tillväxt erfordras. Jag har sett genomsnitt af träd, hvilka vuxit på detta sätt, visa mera än 70 årsringar så smala, att alla tillhopa bildade en diameter på stammen af endast ett par tum; och först utanför dessa företeende bredare årsringar, som antyda att trädet fått rikligare tillgång till luft och ljus. Här har således tydligt nog pågått en strid för tillvaron; men huru har den framkallats, och hvilken betydelse har den väl?

På många och väl de flesta träd i skogarne dö de nedre grenarne småningom bort, i den mån ljus och luft frantagas dem af trädets egna öfre grenar, eller af andra träd i dess närhet; och på detta sätt uppstå de genom nakna, höga stammar ofta utmärkta furu-skogarne. Äfven på andra träd visar en jämförelse emellan grenarnes afstånd och antal på ett yngre och ett äldre träd, att många grenar under årens lopp försvunnit. Träd, som anlägga regelbundet motsittande grenar, med paren decusserade, visa sig tydligen på äldre exemplar hafva förlorat än endast den ena grenen, än hela par. Poplar och Pilar afkasta hvarje år några af de unga grenarne. *Dammara australis* får sin knastfria stam derigenom, att de nedre grenarne successivt lossna och affalla. Likasom i de anförda exemplen grenar dö bort eller afkastas, för hvilka den erforderliga tillgången till de för deras fortvexande nödiga vilkoren saknas, så gallras jemväl af sig sjelf, efter trakthuggning, den alltför tätt uppvoxande nya skogen. Man torde

således om denna med lika litet skäl böra tala om en strid för tillvaron i verkelig mening, som man med något fog väl kan påstå att den föres emellan olika grenar på ett och samma stånd, eller häri finna ett bevis för en seger, vunnen af den öfverlevande.

Och denna seger, den skulle ju vinnas genom något företräde, som segraren ägde framför de förlorande! Men företrädet består, i det nämnda exemplet, väl deruti att det segrande trädet uti den sig gallrande ungsbogen, under de första åren hunnit några tum högre än de andra, och derigenom fått någon större tillgång till ljus och luft än de småningom döende; och för de grenar, som fortleva på trädet, är deras sednare tillkomst väl det egentliga företrädet. Man har ju ock observationer som visa, att bladets struktur i någon man blir olika på i skuggan utvecklade blad, jemförde med dem som hafva rikligare tillgång på ljus; och det torde väl vara tänkbart, att förändringar i detta afseende slutligen föranleda den starkt beskuggade grenens bortdöende.

Genom uthuggandet af de svenska skogarne försvinna småningom både mast-träd och sågtimmer af fordom vanliga dimensioner; men svårligen torde man i sådane förhållanden kunna finna något som helst bevis för en ny arts eller varietets daning af de krymplingar, som slutligen qvarstå, der de fordone skogarne vuxit.

Om man i den åt sig sjelf lemnade naturen nästan öfverallt ser fullhet och rikedom; om det icke blott äro fröna, eller anlagen till frö, som utbildas i öfverflödiga tusental; utan äfven andra delar, blad och grenar, blommor och pollenkorn framkomma i oräkneliga antal, äfven der ett vida mindre kunnat vara tillräckligt för dermed afsedt ändamål; så torde väl de stora antalen af frö med fog icke kunna åberopas såsom fullgiltiga bevis för en öfverallt i naturen pågående strid för tillvaron. Har man att välja emellan Linnés uppfattning — enligt hvilken de ofta befintliga stora antalen kunna tydas såsom medel, att med större säkerhet motverka alla de yttre eventualiteter, som störande kunna ingripa i vexternes passiva värld och upphäfva en der afsedd jemvigt, samt derigenom vidmagthålla skapelsens bestånd — och Darwins lära om ett individernes (eller arternes) sträfvande, att på bekostnad af andra föröka sig, och som gör den derigenom framkallade striden till ett ändamål och ett medel för en fortskridande utveckling

af organismerne till nya former; så torde, så vidt man skall stödja sig på hvad vi i naturen verkligen kunna iakttaga, väl någon tvekan böra uppstå, huruvida den nu så allmänt omfattade Darwinska hypotesen hvilar på säkrare grund än den Linnéanska. Läger man med Darwin de beräknade möjligheterna af förökning till grund, och låter dessa möjligheter alltjemt föda af sig i geometrisk progression i snart sagdt onämnbare antal, och låter det som i de höga siffer-resultaten brister för den långsammare födaren afhjelpas genom några flera år uti den äfven obegränsade tillgången på tid; och med de sålunda vunna oändliga summorna af möjliga antal jemför resultatet — det som finnes lefvande — och låter den sålunda funna skillnaden utgöra både beviset för en strid, som föregått, och måttet för dess häftighet, så kan man visserligen få fram en doctrin, som följdriktigt deduceras af de antagne premisserne; men finnes någon tvekan om dessa sednares fullgiltighet, så måste för visso äfven resultatet synas minst sagdt osäkert.

IV. Artens förändringar i yttre form, framkallade af olika anledningar; förändringarnes olika betydelse; (Variabiliteten i naturen).

Inom flera vetenskaper är det vanligt, att vetenskapliga begrepp kunna bestämmas med den största noggrannhet; man kan i många fall uppgifva allmänna lagar, från hvilka man knappt känner något undantag. Förhållandet är väl mycket annorlunda, hvarhelst det gäller organismernes värld; hvarje lefvande väsen förändras icke blott under fortgången af dess utveckling efter vissa för dess inneboende lif bestämda lagar; utan organismen är äfven i mer eller mindre mån beroende af sin omgifning och tager derifrån intryck, som än hämmande, än fortskyndande, än förändrande kunna ingripa på lifvets normala utveckling. Och framförallt måste detta vara förhållandet hos vexterne, som äro bundne vid den torfva, der de en gång fått sin plats. Vexten kan icke med roten upptaga andra ämnen än de, som der förefinnas; saknas der beståndsdelar, som vexten för vissa delars utbildning behöfver, så kunna icke heller dessa delar hos den utbildas. Kan vexten, såsom man tror sig veta, i vissa fall använda andra ämnen än de som den normalt använder, så måste det vara sannolikt,

att de förändrade villkor, lifvet sålunda får underkasta sig, skola medföra större eller mindre förändringar äfven i yttre form. Man har observationer, som antyda att under vissa förhållanden roten upptager vatten, som innehåller ämnen, skadliga för vextens lif, i större qvantitet än vatten starkare mättadt med sådana ämnen, som innehålla närande beståndsdelar. Det är måhända antagligt att vexten, för att kunna förbruka det öfverflödiga, fått en större frihet i delarnes starkare eller svagare tillvext.

Om i allmänhet hvarje art fordrar vissa yttre förhållanden för att både komma till utveckling och fortleva, men dessa yttre villkor, vare sig i klimat eller i lokalens beskaffenhet, sjelfve äro underkastade förändringar, så torde kunna väntas, att vexten äfven tager intryck af dessa förändringar. Så måste väl individuella olikheter uppkomma hos olika individer af samma art, likasom olika arter äro danade för förekomst på olika lokaler.

Det är nogsamnt bekant, att i trädgårdar och på åkrar många vexter odlas under förhållanden, som mera eller mindre afvika från dem, hvarunder de förekomma i den fria naturen. Så uppdragas vexter i lågländen, som i naturen bebo alpernes högre regioner. Kaliforniens vexter trifvas väl i Skånes trädgårdar. Orchideer, som inom tropikernes skogar förekomma i trädsklyftor, blomstra öfverallt i Europas drifhus. Man ser att många af dessa odlade vexter afvika i vissa afseenden ifrån deras vilda stamfäder, men i allmänhet äro väl afvikelserne icke större, än att man lätt nog i den odlade formen igenkänner dess stamart i naturen. Erfarenheten visar dock att olika arter äro i mycket olika grad känsliga för de nya förhållanden, som erbjudas dem. Om således vexterne å ena sidan äga en större eller mindre förmåga, att accomodera sitt lif efter yttre omgifvande förhållanden, så har å andra sidan denna accomodationsförmåga vissa gränser, som icke öfverskridas. Och dessa gränser äro för olika arter dragne trängre eller vidare, sannolikt efter känsligheten af det lif, som är för arten egendomligt. Och vi spåra sannolikt denna känslighet i de många olika sätt, hvarpå olika arter utbredd sig öfver jorden.

Om det sålunda är antagligt, att arten under olika yttre förhållanden kan ikläda sig en i viss mån olika form, och det derjemte är kändt, att olika arter närma sig hvarandra i olika

gradationer, så torde det vara lätt förklarligt, att äfven den mening sökt göra sig gällande, att någon bestämd skillnad icke finnes emellan variationer och arter; och att distinctionen dem emellan snarare tillkommit af systematiska hänsyn, eller af ett behof att kunna sammanfatta gruppvis de växlande formerne, än grunda sig på förhållanden som voro i naturen fastställda. Framför alla andra har Darwin sökt bereda väg för en sådan åsigt. De olika slag af förändringar, som förefinnas emellan olika individer, olika varieteter, olika arter, olika grupper af arter, olika släkten, olika familjer o. s. v., de antagas af honom och hans efterföljare endast vara olika gradationer, olika trappsteg i den långa serie af förändringar, som en proteusartad natur, under yttre förhållandens påtryckning, genomgår eller redan genomgått. Bevisen för denna åsigt äro af flera slag. Ett af de hufvudsakligaste för de antagna arternes föränderlighet finner Darwin i den olika uppfattning, som olika författare gjort sig om många arter. Jag har redan förut sökt visa, att *arter i naturen* och *arter hos författarne* icke är detsamma. Jag har sökt antyda, huru i detta afseende olika antaganden ofta uppkommit till följe af otillräckliga eller felaktiga observationer och af ett förvändt arbetssätt, och säkerligen ofta skola af samma anledning åter uppkomma. För såvidt således den Darwinska bevisföringen hvilar på denna olika uppfattning af arterne i naturen, torde den vara föga bevisande. Mot hvad som i öfrigt anföres till stöd för den Darwinska åsigten, skall jag ännu tillåta mig några anmärkningar.

Darwin synes lägga synnerlig vikt vid vissa statistiska tabeller, som han låtit upprätta efter den princip, att de växter, som beskrifvas i ett lands flora, delas i 2:ne lika flockar; så att de hvilka tillhöra de större släktena hänföras till den ena, och de som tillhöra de mindre släktena utgöra den andra ¹⁾. Man skall af dessa tabeller finna, säger han, att ett större antal af de allmännaste och mest utbredda arterne ofta gifva upphof åt varieteter, som äro tillräckligen olika för att omtalas i botanisternes arbeten, och hvilka af Darwin antagas vara begynnande arter. Och ett sådant resultat, säger han vidare, skulle kunnat förutses; ty då varieteter, för att i

¹⁾ De Darwinska åsigterne hafva, som bekant, fått en ifrig förfäktare i en af nutidens mest framstående botanister, dr. J. D. Hooker, som i flera arbeten uttalar sig för desamma och för variabiliteten i naturen. Ut i *Introduct. Essai to the Flora of Tasmania* p. 7 i not, uttalar han särskilt sitt godkännande af de resultat, hvartill den Darwinska statistiken skolat leda.

någon mån blifva permanenta, nödvändigt hafva att strida med landets andra vexter, måste de förut dominerande arterne vara de som antagligen lättast skola lemna en afföda, hvilken, om ock i någon mån förändrad, dock skall ärfva de företräden, som gjorde förfäderne dominerande öfver andra landets vexter (p. 54). Vidare heter det, der stora träd vexa, vänta vi ock att finna unga plantor; der många arter af ett slägte hafva uppstått genom variering, hafva äfven förhållandena varit gynnsamma för variering; och vi må således kunna vänta att dessa förhållanden skola fortfara. Om vi deremot anse hvarje art hafva tillkommit genom en särskild skapelseakt, så finnes ingen synbar anledning, hvarför flera varieteter skulle förekomma inom den flock, som har många arter inom slägtet, än inom den som har få (*Darwin Orig. p. 55*).

Så vidt jag riktigt uppfattat grunderne för denna statistik, så förekommer det mig som skulle den hvila på en mycket osäker grund. Sjelfva de uppgifter, efter hvilka tabellerna skulle uppställas, torde väl bero af den begagnade författarens uppfattning om slägte, art och varietet. Samma grupp *Allium*, som i Kochs Synopsis utgör ett slägte med 30 arter och 6 varieteter, är delad i Reichenbach Fl. Excurs. i 3 släkten med 43 arter. Slägtet *Primula* har hos Koch 21 arter och 6 variet.; men hos Reichenb. 26 arter och 5 variet. allt inom den germaniska floran.

Om man för att finna gränsen emellan de stora släktena, hvilka enligt Darwin skulle vara de varierande, och de små, relativt icke varierande, söker medeltalet arter för släktena i den svenska floran, skulle (enligt Wahlenberg) 2, 8 utgöra medeltalet arter på hvarje slägte; men enligt Reichenbach skulle i den tyska floran komma i medeltal 5, 4 arter på hvarje slägte. Då nu få släkten förekomma i den svenska floran, hvilka icke finnas i den tyska, så torde mångt slägte, som i den svenska floran finge räknas till de stora, och enligt Darwin relativt varierande, i den tyska komma att räknas till de små och icke varierande.

Uti sina tidigare arbeten antog Linné de 3:ne Tournefortska släktena: *Allium*, *Cepa* och *Porrum*; så att i första editionen af *Flora Suecica* *Allium* och *Porrum* uppfördes hvardera med en art, och *Cepa* med 2 arter. Men i andra editionen af *Flora Suecica* sammanfördes de 3 Tournefortska släktena till ett enda med 6 arter. Enligt medeltalets beräkning

efter Wahlenberg skulle de 3 Tournefortska släktena räknas bland de små och icke varierande släktena; men det sammanslagna släktet *Allium* skulle uppföras bland de större och varierande. Ut i ingendera af de båda editionerne antyder Linné någon arternes tendens till variering; och i Wahlenbergs flora omtalas samma Linnéanska arter, utan en enda anmärkt varietet.

Om åter efter arternes dominerande (individernes mängd) man skulle sluta till variationernes talrikhet och släktenas storlek, så borde för visso den svenske botanisten med någon häpnad finna, att ehuru t. ex.

Pinus Sylvestris,	Calla palustris,
Pinus Abies,	Menyanthes trifoliata,
Juniperus communis,	Arbutus uva ursi,
Myrica gale,	Ledum palustre,
Betula alba,	Linnæa borealis.
Alnus incana,	

tillhöra den svenska florans allmännaste och mest dominerande arter, de väl dock torde böra räknas till våra minst varierande.

För att visa hvart man kan komma med en sådan statistik, skall jag tillåta mig ännu ett exempel. Ut i Wahlenb. Fl. Succ. upptogs släktet *Sphagnum* med 2 arter, som hvaradera hade en varietet utom en särskilt anmärkt variation. Ut i 9:de uppl. af Hartmans Fl. upptages *Sphagnum* med 13 arter och ingen varietet. Utan tvekan torde man kunna antaga flera *Sphagnum*-arter sasom dominerande i de talrika svenska kärren. Med Darwin borde man väl sluta till, att de af Wahlenberg anmärkta variationerne voro 1826 begynnande arter, och att varieringen sedan fortgått, så att år 1864 hade man icke mindre än 13 former, hos hvilka variationerne stadgats till fasta arter. Men sväriligen torde någon botanist hålla före, att de nya arterne tillkommit under de mellanliggande 38 åren. Hvar och en torde erkänna, att den olika uppfattningen är en följd af sednare, noggrannare undersökningar af Mossornes arter.

Uti stora släkten, säger Darwin äro arterne benägne att vara nära, men ojemt sins emellan beslägtade, bildande liksom små grupper ikring vissa arter. Sådane nära beslägtade arter hafva ringa utbredning. Ut i dessa förhållanden hafva arterne af stora släkten en tydlig analogi med varieteter. Och man kan lätt begripa anledningen till dessa analogier, om arterne först uppstått och existerat sasom varieteter; då der-

emot dessa analogier äro fullkomligen oförklarliga, om hvarje art tillkommit genom en särskild skapelseakt. De stora släktena dela sig också på detta sätt i under-slågten, hvilka i sin ordning blifva till slågten. Och salunda blifva lifvets former genom hela naturen delade i grupper, som subordinera den ena under den andra.

Huru förledande denna lära torde förekomma för hvar och en: huru väl den synes förklara många af de förhållanden, som tränga sig på hvarje reflecterande systematiker, så torde dock icke deraf följa, att den till utseendet så sannolika förklaringsgrunden också är den rätta. Det har redan ofvanför blifvit påpekadt, huru Linné, tydligen ledd af sin uppfattning om de i naturen förekommande släktskaps-förhållandena, framkommit med en teori om arternes uppkomst, som han antog nödig, och väl äfven tillräcklig, för förklaringen af de naturliga familjförhållandena, och hvilken derföre, enligt hans egen förklaring, inrycktes i inledningen till hans uppställning af de naturlige familjerne. I stället för att Darwin bygger sin lära på en formernas föränderlighet, under den pågående striden för tillvaron, och på den starkares rätt, så antog Linné att arterne uppkommit af hybrider, och att grupperne voro en följd af korsningar mellan samma moder och olika fäder. Men Linné förklarade sin lära som en hypothes, hvilken borde bekräftas genom observationer; och då sedermera dessa tycktes altmera antyda hybridernes oförmåga att bilda nya arter, så torde han själf i sina sista arbeten hafva allt mera tvekat om hypothesens nöjaktighet. Men var det Linneanska förklaringsförsöket en hypothes, så är väl det Darwinska icke heller något mera. Vetenskapen måste fordra att hypothesen bevisas. Tillfredsställer hypothesen den redan för handen varande erfarenheten? Jag skall i detta afseende tillåta mig först några allmänna anmärkningar.

Äfven inom den oorganiska verlden förefinnes det förhållandet, att ämnena efter characterer och egenskaper bilda liksom större och mindre grupper, hvardera med sina undergrupper. De ädla metallerna hafva vissa egenskaper gemensamma med vissa andra metaller, under det att samma egenskaper icke finnas hos andra; och dessa andra metaller hafva åter sina egendomligheter. De oorganiska ämnena kunna således äfven sammanfattas i grupper, utan att man ännu lyckats visa något genetiskt sammanhang dem emellan, eller

vissa för dem gemensamma grundännen. Grupperingarne torde således i och för sig icke utgöra tillräckligt bevis för descendens teoriens antagna förklaringar.

Man vet att äfven oorganiska ämnen kunna sins emellan vara mycket olika både till utseende och egenskaper, och dock bestå af samma enkla ämnen, ehuru på olika sätt för- enade. Man känner ock att en viss öfverensstämmelse i ut- sende och egenskaper kunna förekomma hos ämnen, som bestå af olika enkla ämnen. Om således inom den oorganiska na- turen man på visst sätt har släkten med mer eller mindre hvarandra olika arter, och emellan olika släkten och arter vissa analogier kunna förekomma, utan att något gemensamt ursprung torde kunna antagas såsom förklaringsgrund, så torde näppeligen mera skäl förefinnas att inom den organiska na- turen anse analogier och släktskaps-förhållanden såsom bevis på ett fjermare eller närmare gemensamt ursprung.

Både Linnéaner och Darwinister antogo väl, att nutidens individer under generationernes långa följd successivt ökats, och att man sålunda genom att gå ättartafloren tillbaka slut- ligen måste komma till ett färre antal stamstånd, vare sig nu dessa anses med Linné hafva utgjort skiljda arter, eller med Darwin såsom stamfäder för sednare bildade arter. Icke ens Darwinisterne, vare sig de antaga dessa stamfäder hafva varit flera, eller de antaga ett enda urväsende, hafva kunnat an- gifva huru dessa stamfäder tillkommit. Antagas dessa hafva tillkommit på hvilket som helst extraordinärt sätt, så torde det väl med lika befogenhet kunna antagas att flera, eller många tusental tillkommit, hvardera med sina likheter med, eller afvikelser från de andra. Den Darwinska tydningen af de i naturen förekommande släktskaps-förhållandena förklarar dem *under den af honom förutsatta formernas föränderlighet och successiva ombildning*. Men det var väl denna formernes föränderlighet och successiva utbildning, som genom slägt- skapsförhållandenas förklaring i sin mån skulle anses bevisad.

För min del vågar jag tro, att de hufvudsakliga skäl, som man framhållit för den Darwinska uppfattningens giltighet, icke kunna anses bevisande, så snart de nogare pröfvas. Huru- vida den i naturen antagna formernes föränderlighet af andra skäl kan bevisas, derom kan man måhända hafva olika mening. Sannolikt skall man lättast kunna bedömma detta genom att granska arten af de förändringar, som förekomma. Äro dessa

af olika slag, så torde de väl äfven hafva olika betydelse. Jag skall således tillåta mig först anföra några exempel på sådana förändringar, för att sedan efterse i hvad mån de kunna antagas som bevis för den Darwinska uppfattningen.

a) *Artens normala förändringar, oberoende af yttre inverkande orsaker; olikheter i yttre form, som måste anses tillhöra artens normala formkrets.*

Vill man göra sig reda för betydelsen af de olikheter i yttre form, som förekomma hos organismerna, så torde man väl i första rummet böra skilja emellan de förändringar, hvilka ligga inom artens normala formkrets, och de som på ett eller annat sätt förändra denna. Framför allt måste detta vara nödigt hos vexterne, der icke alla, samma individ tillhörande organ samtidigt äro utvecklade, och der, hos många träd, hela sekler kunna ligga emellan de först och de sist utvecklade delarnes tillkomst.

Linné antog såsom allmän regel, att alla de arter, som öfverensstämde i fruktdelarnes bildning, tillhörde samma slägte; och att alla Individer — mer eller mindre olika — som kunde framkomma ur frö af samma vext, tillhörde samma art; och han drog af sin mycket rika erfarenhet den slutsats, att släkten lika väl som arter, voro i naturen bestämde och icka borde efter olika teorier eller olika tycken kunna förändras (*Philos. Bot.* § 159, 162). Men han fordrade i detta afseende, som i andra, att naturen i hvarje särskildt fall skulle fälla utslaget. Han hänförde utan tvekan *Cerastium semidecandrum* till slägtet *Cerastium*, oaktadt den afvek ifrån andra arter af slägtet i en karakter, hvarpå Linné i andra fall lade synnerlig vikt.

Motsvarande förhållanden finnas nn jemväl hos Arterne; de hafva en hvar sina former, sina egendomligheter, sina karakterer, afvikande ifrån andra arters. Men hos vexterne äro formerne icke bestämda med matematisk noggrannhet. Det ena individet är icke fullkomligt likt det andra; olika grenar, olika blad på samma individ, ja olika ståndare i samma blomma skola finnas icke fullt lika hvarandra, om de nogare granskas. Man torde således kunna antaga det äfven hos individerne af samma art individuella olikheter normalt böra förekomma. Dessa individuella olikheter kunna vara större och mindre; i vissa fall så tydliga modifikatione af artens vanliga form, att svärigen någon kan betvifla deras betydelse såsom

utgörande individuela olikheter; i andra så stora, att under vetenskapens tidigare stadier de olika formerne blifvit betraktade icke blott såsom särskilda arter, utan jemväl skulle, efter nutidens uppfattning af characterers vigt, väl kunnat tydas såsom typiska för olika släkten. Det är i sådane fall hvarken characterens art eller mera framstående tydlighet, icke heller några allmänna regler, som kunna vara afgörande för bestämmande af artens normala formkrets; äfven i detta fall gäller Linnés: *Scias characterem non dare genus, sed genus characterem*. Jag skall tillåta mig ett par exempel:

Hos *Broussonetia papyrifera* kan man på en och samma smågren få se talrika blad af olika form; stundom knapt 2:ne som äro hvarandra fullt lika. Willdenow (*Baumz. p. 65*) säger att på unga plantor äro bladen djupt 5-flikiga, men på äldre träd äro de odelade, äggformiga, stundom dock 3-flikiga, med den nedersta fliken en eller 2:ne gånger bågformigt bugtad; stundom äro äfven sidoflikarne bågformigt inskurve. Om hos *Broussonetia* bladen sålunda kunna hafva olika form på unga plantor och på äldre, ja på en och samma smågren, så måste det vara tydligt, att denna föränderlighet i bladform är en egendomlighet hos denna art; ingen kan betvifla att de olikheter som förekomma, till och med på samma individ, tillhöra artens normala formkrets.

Hos *Adoxa* har den terminala blomman en annan structur än de 4 laterala, som sitta omedelbart under densamma; den förra har ett 4-delt perianthium, 8 ståndare och 4 pistiller; de sednare åter 5-delt perianthium, 10 ståndare och 5 pistiller. De characterer, hvarigenom den terminala blomman skiljer sig från de laterala, ansågos i allmänhet af Linné äga den betydelse, att han på dem grundade sexualsystemets klasser och ordningar; men då blommor med denna olika structur förekommo i ett och samma blomster, kunde de tydligen icke här äga den betydelse, som hos många andra växter. Det tillhör här artens formkrets, att hafva vissa blommor 4-delta, andra 5-delta. Samma olikhet i blommans bildning, som characteriserar olika arter hos släktet *Cerastium*, förekommer hos *Adoxa* i olika blommor på en och samma stjelk, och förekommer regelbundet sålunda i hvarje blomster. Hos arter af släktet *Viola* förekomma, jemte blommor med en utbildad blomkrona, andra som sakna blomblad; de förekomma på samma stånd, samtidigt eller på olika tider. Den dubbla blomformen tillhör

dessas arters formkrets, under det hos många andra växter apetalade blommor hafva ansetts såsom en mycket vigtig character, hvarigenom en stor grupp af de phanerogama familjerne (*Incomplete, Apetalæ*) i systemerne characteriserades.

Hos många af våra Dicotyledona Buskar och Träd är det en vanlig företeelse, att de hafva 2:ne eller flera olika slags grenar, som ofta äro tydligt nog åtskiljde både genom särskilda characterer och olika functioner. Jemte de mindre grenar, som hos Törnrosen bildas af knoppar, hvilka utgå ifrån bladens axiller, framkomma tidtals enstaka mäktiga skott (adventiv-bildningar) från stammens nedre del, afsedda, som det synes, att bilda anlaget till en ny stam som ersätter äldre bortgående. Sådane skott äro, under sin hastiga utväxt, raka och ogrenade, ofta försedda med mäktiga taggar, och hafva ett vida kraftigare utseende än andra nybildningar för året. Hos Bamburöret kan man i våra Drifhus få se yngre plantor, som under flera tidigare år stått med ringa årlig tillväxt, ett par alnar höga och af en gäspennas tjocklek, liksom plötsligt från den underjordiska delen framskjuta ett mäktigt skott, som på kort tid uppnår 10—12 alnars höjd och med mera än en grof fingers tjocklek. Man har i de Botaniska Handböckerne fästat föga uppmärksamhet vid dessa företelser i växternes lif, hvilka utan allt tvifvel hafva sina betämda ändamål. Men fruktträdsodlarna hafva länge känt, att hos våra vanliga fruktträd förekomma grenar af olika slag, olika utseende, olika struktur och olika användande för odlarens behof. Prof. Areschoug har i en vetenskaplig skrift ¹⁾ ådagalagt, att liknande olikheter förekomma mer och mindre skarpt utpräglade hos många af våra vanliga träd och buskar; och han skiljer hufvudsakligen mellan sådane, som hafva nybildning till ändamål (föryngring), och dem som afse frambringandet af blomster och frukter. De äro sinsemellan ofta olika till ursprung, utseende, struktur och fortvaro. Enahanda förhållanden finnas påtagligen hos många perennerande örter. De olika grenarne äro ofta tydligen danade för olika ändamål, de fullgöra olika functioner i dessa växters lif, och hafva väl både funnits och skola fortfarande finnas, så länge arten själf har sitt bestånd i tiden.²⁾

¹⁾ *Beiträge zur Biologie der Holzgewächse, Lund 1877*; till hvilken skrift för detaljer och olikheter, som jag icke här ansett mig böra upptaga, hänvisas.

²⁾ När Hofmeister (*Allgem. Morph. p. 579*) söker förklara den olikheten, som bladställningen företer hos olika grenar af Kastanien, dermed att ljuset

Areschoug uttalar i bestämda ordalag, att de periodiska olikheterne i uppträdandet af föryngringsgrenar och fortplantningsgrenar framkallas icke genom yttre förhållanden, utan hafva sin grund i vextens egen natur.

Hos vexterne förekomma talrika förändringar, som, mer eller mindre synliga, i allmänhet torde kunna betecknas såsom ålders-olikheter. Enär dessa framträda småningom, fäster man derpå vanligen ringa uppmärksamhet, och olikheterne framstätydligt, nästan endast då man jemför mera ifrån hvarandra skiljda åldrar. Den ettåriga grenen hos våra träd bär blad och knoppar, den 2-åriga bär grenar, som sitta på ett eller annat tuus afstånd från hvarandra. På en äldre gren sitta de mindre grenarne synbarligen längre aflägsnade från hvarandra: i det många yngre grenar försvunnit. Den yngre Tallens koniska form försvinner hos den gamla Furan, på hvilken vanligen alla nedre grenar äro borta. Hos vår vanliga Björk är den unga stammen beklädd af en slät, och genom sin egendomliga skifviga textur lätt igenkänd, *näfver*. Vid trädets mognare ålder ser man barken söndersprucken i flakor, och med en consistens som mera erindrar om kork än om näfver.¹⁾ Nya Hollands så kallade *Acacie aphyllæ* sakna Leguminosernes vanliga småblad, och hafva stjelkarne ombildade till plattade, vertikalt ställda phyllodier, som stundom hafva en mycket egendomlig form. Men man vet, att hos den yngre, ur frö framkommande plantan finnas Leguminosernes vanliga småblad och trinda bladstjelkar. Dessa delar finnas således endast under vextens första utbildningstid, och försvinna efter de första åren, hvarefter vexten får ett helt olika utseende.

Hos de annuella vexterne komma alla ståndets olika delar successivt fram under en och samma vextperiod, och det är

som inverkar olika på horisontela grenar (hvilka därför hafva bladen 2-radiga), och på upprättstående (som hafva bladen 5-radiga), skulle genom den fördel, vexten deraf vnnne, kunnat göra denna olikhet ärftlig, och anser sig sålunda kunna hänvisa till tyngdkraften som orsak till bladställningen, så är väl detta blott ett sätt, att förlägga det oförklarliga till annan grund.

¹⁾ De nedersta grenarne på den vanliga granen äro i någon mån olika med de öfre, genom glesare blad, ställda i nästan horisontela rader. Afhugges en yngre stam straxt ofvanom nedersta grenkransen, så händer att någon af den sednares grenar, som förut legat tryckt åt marken, reser småningom upp sig och blir till ny stam. Under det den är efter år tillvuxit, har jag sett den länge bibehålla sin habituella olikhet, med smärtare grenar och glesare blad. Jag har velat anföra detta exempel, emedan något liknande former, möjligen uppkomna på enahanda sätt, antagits vara begynnande arter.

således i allmänhet hos dem lätt att följa de förändringar i yttre form, som vexten under sin utveckling genomgår. Det gifves andra vexter, der ståndet under olika utvecklingsskeden kan hafva ett mycket olika utseende. *Colchicum* om hösten med blommor, om våren med frukter och blad; *Prunus* och *Pyrus* arter med blommor på bar qvist tidigt på våren, med blad och frukter om hösten, äro för visso sins emellan till utseende så olika, att de blommande stånden af olika arter snarare kunde tyckas öfverensstämma, än de olika tillstånd af samma vext, som finnas under andra årstider.

Hos många perennerande dicotyledona örter utvecklas under det första, eller under de första åren vanligen endast blad — ofta kallade rotblad, hvilka som en rosett nedtill omgifver de sednare utskjutande stammarne, på hvilka blommor och frukter utvecklas. Dessa rotblad hafva icke sällan en annan form än de på stammarne framkommande; och rotbladen utvecklas icke sällan tätt intill hvarandra, på mer eller mindre utvecklade stängselled. Hos många perennerande monocotyledoner äger ett analogt förhållande rum; hos lökvexterne förberedes lökbildningen, hos Palmerne palmstammen under flere eller färre år; först sedan de bladbärande stängselleden nått en viss omkrets synes palmstammen skjuta mera i höjden; den fortvexer sedan nästan alltid ogrenad, med stundom starkt utvecklade, oftast med föga förlängde stängselled, och med blad alltjemt af samma form. Efter flera eller färre års sålunda förberedd utveckling inträder blomningsperioden, utvecklande grenar och särskildta blad (spathæ), blomster och blommor, ofta med väsentligen förändrade characterer. Om också icke *Agave* och *Fourcroya*-arter förete de föregående långa utvecklingsperioder, man fordom tilldelade dem, så synes det dock normalt, att de under en lång följd af år endast utveckla stam och blad, hvar efter blomstret med sitt olika utseende likasom plötsligt framträder.

Efter det blomningsperioden sålunda inträdt, kan palmstammen frambringa nya blomster, år efter år, hvilka frambyta ur sednare anlagde stamdelar (internodier); och i hufvudsak är väl förhållandet enahanda hos flera andra monocotyledoner. Hos andra kunde det tyckas som hade det ofta starkt utvecklade blomstret likasom uttömt vextkraften, och hela ståndet dör (hos *Musa* och *Agave*-arter), vanligen sedan en sidoknopp är anlagd i vextens nedre del, för att utvecklas till

nytt stånd. I alla dessa och dylika förändringar, som förekomma på ett och samma stånd, lär man väl icke kunna se någon vextens tendens till variering; den ena formen, som den andra, tillhör artens formkrets, och äro normala utvecklingsskeden i dess lif. Man kunde måhända, med hänvisande till förhållandet hos *Musa* och *Agave*, med något sken af sannolikhet påstå, att blomningen inträder först när vissa materiella beståndsdelar blifvit i tillräcklig mängd hopade hos den blad-bärande vexten, och att blomningen då är den nödvändiga följden af den materiella förändringen. Men en sådan förklaring synes väl icke stå väl tillsammans med förhållandet hos *Palmerne*, der blomningen fortgår alltjemt, sedan standet uppnått den ålder, som för hvarje art är bestämd. I det ena fallet, som i det andra, torde dessa förändringar hos vexterne närmast motsvara de förändringar hos många djur, som inträda med pubertets-åldern. De äro förändringar hos *Individet*, som icke äro nödvändige för dess eget lif, men som äro oundgängliga för att vidmakthålla *artens* lif, under den tid denna har att bestå i naturen.

Oaktadt de förändringar i yttre form, som vid pubertetsperioden inträda, sålunda kunna vara betydliga, äro de dock genom många exempel så kända, att man icke gerna numera bör misstaga sig om deras betydelse. Det gifves andra exempel, som måhända kunde vara mera vilseledande. Vi odla i vexthusen en *Ficus*-art, vanligen benämnd *Ficus stipulata*. Den har spensliga grenar, som fästade genom talrika häftorgan synas likasom krypande utbreda sig öfver väggar och murverk. Hos hvarje ung gren sitta bladen med den största regelbundenhet alternerande, tätt åtsittande, och likasom uppklistrade på väggen. Men i den mån vextens grenar blifva talrikare, utbreda de sig icke blott öfver alla mellanrum på muren, utan äfven öfver andra grenar, och hela väggen inklädes sålunda till slut af det tätaste löfverk; och många grenar — likasom af brist på muryta — utskjuta slutligen för sig sjelfva och hänga fritt. Men dessa utskjutande grenar antaga småningom andra dimensioner: bladen blifva större och antaga en olika form; de dem bärande stjelkarne blifva tjockare och längre och hänga sjelfmant långt ned likasom i naturliga festoner. Det är på dessa nedhängande grenar, som de små, blommor, innehållande, Fikonen komma till utveckling. Hos *Hedera Helix* förekomma förhållanden, som mycket närma

sig dem hos *Ficus stipulata*; de blommande grenarne hafva också sin olika bladform, och hafva fordom beskrifvits som utmärkande en särskild art.

Hos dioika växter äro *han-* och *hon-stånden* icke sällan så olika, att de väl kunde betraktas såsom typer för olika släkten; de hafva i fordna tider jemväl så blifvit ansedda. Icke blott att blommorne äro olika i det afseendet, att endast ståndare kunna vara utvecklade i den ena blomman, endast pistiller i den andra; eller att ettdera organet har annan form i den masculina, annan i den feminina; äfven blommans yttre delar kunna förete olikheter (*Carica*), och till och med blomstrets form kan hos de olika könen vara olika (*Mercurialis*, *Coelebogyné*). Oaktadt således olikheter förekomma i delar, som i allmänhet lemna viktiga systematiska karakterer, oaktadt olikheterne i vissa fall kunna till och med vara större än de som skilja sinsemellan familjer i systemet, så satte hvarken Linné¹⁾, eller torde någon annan numera sätta i fråga, att äfven de mest afvikande *han-* och *hon-stånd* tillhöra en och samma art, att de äro olika företeelser af ett och samma lif, som torde kunna sägas characteriseradt äfven derigenom, att det utbildar *han-* och *hon-stånd* olika.

Om nu dessa sins emellan så olika individ af samma vext onekligen framkomma från frö, hemtade ifrån samma moder-vext, så lär väl icke kunna bestridas, att de utgöra individuella företeelser, men med olikheter som här hafva en särskild betydelse; att de olika individerne komplettera hvarandra i vextens lif, och såhunda normalt måste tillhöra artens formkrets.

Jag har sökt lemna några få exempel på de förändringar i form, som samtidigt, eller successivt, normalt inträda hos växter af samma slag. De kunna förefalla större eller mindre hos olika arter; plötsligare framträda hos några, och genom de nya delarnes bjertare olikhet vara mera i ögonfallande; hos andra mera successivt förberedas. Huru stora de i vissa fall ock kunna förekomma, de kunna förvisso dock hvarken betraktas såsom variationer, eller tydas såsom tendenser till bildande af någon ny form.

De förändringar som inträda vid pubertetsperioden, i det delar framkomma hos växterne, som tydligen icke hafva någon

¹⁾ Uti *Philos. Bot.* § 270 anmärker Linné, att fordom mycket olika växter betraktats som olika kön af samma vext; och jemväl att könen af samma vext blifvit af Raj och Tournefort betraktade såsom olika släkten.

function i individets lif, måste väl, eftersom de normalt förekomma hos alla högre vexter, och med sina modifikationers jemväl hos de lägre, nödvändigtvis antagas afse något bestämdt och viktigt ändamål.¹⁾ Om dessa förändringar snarare verka hämmande, än gagnande för individets lif; men de deremot äro oumbärliga för artens lif, för frambringandet genom frö af nya generationer af samma slag, så torde de väl kunna betraktas såsom organer för arten — för ett lif som ligger utanför individets. Om hos de dioika vexterne flera individ måste komplettera hvarandra för fullgörandet af detta lifs oumbärligaste functioner, så torde väl dessa förhållanden jemväl antyda, att naturens arter icke äro endast vetenskapens fackverk, utan förefinnas i naturen såsom dess egna skapelser.

b) *Normala förändringar i yttre form, föranledda af eller stående i samband med yttre förhållanden. Artens förmåga af adaptering.*

Det är nogsamant känt, att hos många vattenvexter förekomma blad af 2:ne slag; det ena slaget bildade för att flyta på vattnet eller höja sig deröfver, det andra fungerande nedsänkta under vattenytan. Hos *Batrachium*-arter äro dessa blad icke blott olika till form, utan hafva äfven en i viss mån olika struktur. Hos flera arter förekomma båda slagen mer eller mindre talrika; hos några utvecklas endast de nedsänkta findelta bladen; hos åter andra endast de som äro bestämda att fungera ofvan vattnet. — Våra vanliga *Utricularia* arter äro tydligen bildade för att lefva nedsänkta i vattnet; men man känner exotiska arter, som hafva blad liknande *Parnassias* och tydligen utbildade för annat lefnadssätt.

Vissa *Potamogeton*-arter hafva 2:ne slags blad, deraf de under vattnet utvecklade hafva form af phyllodier; de som äro danade för att flyta på vattnet hafva en på längre stielk utbildad bladskifva. Efter olika locala förhållanden förekomma de olika bladen mer eller mindre rikligt utbildade. Uttorkar vattnet starkare, så förekomma hos några arter nästan endast öfvervattensblad. Hos vissa arter synas de flytande bladen

¹⁾ Jag har i den föregående framställningen ansett mig böra afstå ifrån hvarje redogörelse för den förändring, som föregår hos Ormbunkar och närstående grupper af högre Cryptogamer, i det vexten här under sitt första stadium, då den nästan har utseende af en *Lefvermossa*, frambringar könsorganer, genom hvilkas samverkan ett slags embryo bildas, ifrån hvilket vexten, sådan man vanligen ser den, framkommer.

aldrig komma till utveckling. Hos *Nymphæa* och *Sagittaria* hafva undervattensbladen jemväl form af phyllodier; under det öfvervattensbladen hafva en bladskifva af helt olika form.

De olika bladformer, som sålunda förekomma hos vissa vattenväxter, torde väl böra anses normalt tillhöra dessa arters formkrets; sådana växter synas danade för att lefva under olika lokala förhållanden, och utbilda derefter sina för de olika lefnadssätten afpassade organer nu talrikare för det ena, nu för det andra lefnadssättet. Men om vissa arter af *Batrachium* och *Potamogeton* aldrig utveckla de flytande bladen, huru mycket de förhållanden, under hvilka dessa arter förekomma, kunna närma sig dem, som hos närstående arter föranleda bildandet af sådana blad, månne icke i denna olikhet ligger en egendomlighet hos arten, och en antydning om att olika arter hafva en olika förmåga att omgestalta sina former efter olika lokala förhållanden.

Bland växter, som mera uteslutande tillhöra land-vexterna, känner man väl få, som äro danade för att lefva jemväl i vatten. Ett och annat exempel förefinnes dock. Så har *Polygonum amphibium* ett så olika utseende när den växer i vatten, att den väl kunde anses såsom skild art. Man torde dock icke heller här rimligtvis kunna tala om någon artens tendens till variering. Båda äro väl att betrakta som normala former hos en amphibiskt lefvande art, som apterar sina delar efter de olika medier, deri den förekommer.

Flera kärrväxter (*Hippuris*, *Pilularia*, *Cardamine pratensis*¹⁾) kunna, då de öfverspolas af vatten, jemväl omgestalta både yttre delar och inre struktur mer eller mindre. I stället för den upprätta, styfva, nästan ett litet barrträd liknande form, som *Hippuris* antager på mera torra lokaler, blir den i rinnande vatten nedliggande, med vanligen flera blad i kransen, och äfven bladen till sin form och konsistens olika. Ut i sin uppsats om växternes perfectibilitet omtalar E. Fries, att vissa växter, dränkte under vatten, kunna i en utbildad form mycket länge fortlefva, utan att sätta blommor, men fortplantade genom knoppar. Och såsom exempel härpå anföres en i Smålands strömdrag vanlig form af *Juncus supinus* (*J. supinus fluitans* Fr. Nov. p. 92).

Inom tropikerne förekomma arter af släktet *Neptunia*, än växande på fuktiga lokaler, än flytande på vattnens yta. En

¹⁾ Enligt Schenk i *Ber. der Bot. Gesellsch. Jahrg. 11. Heft. 10.*

sådan, fordom som *Desmanthus natans* beskrifven art, har, då den förekommer vexande på fuktiga lokaler, en upprätt stam och nästan habitus af den vanliga Sensitivan; uppdrages den deremot i vatten, utvecklar den en stam, som med sin nedre och öfversta del är nedsänkt under vattenytan, men hvars medlersta del hålles flytande på vattnet genom der utvecklade blåslika organer. Mellan de der utvecklade bladen, som sitta på ungefär tumslånga afstånd ifrån hvarandra, svälla internodierna ut till aflånga blåsor, som hållas utspända af en svampartad väfnad af glesare trådar. Medelst denna flytapparat hålles vextens medlersta del uppe på vattenytan. I den mån som de utsvålade internodierna blifva äldre, afkastas blåsorne, och närmast följande internodier ombildas på samma sätt. Något liknande förhållanden sägas förekomma hos vissa *Jussieu*-arter, men blåsorne der bildade inom andra delar ¹⁾).

Hos den vid våra kuster vanliga blås-tången förekomma icke några blåsor, då den vexer i öfversta hafsbandet och tydligt nog icke har behof af sådane. På djupare vatten sväller bålen ut på bestämda ställen till en rund, inuti nästan tom, eller blott af några glesa trådar upptagen blåsa. I synnerhet i lugna vikar, på något djupare vatten, kan man få se den sträfva upp mot vattenytan, tydligen med tillhjälp af de blåsor, som den utvecklar, sparsammare eller rikare. Det gifves närstående arter, som jemväl hafva sin blåsapparat, men blåsorne äro än af olika form, än utvecklade på andra ställen. Och det gifves andra arter, der dessa blåsor sannolikt aldrig förekomma. Hos *Sargassum*-arterne, hvilka stundom under längre tid fortleva skiljda från sitt rotfäste, och flytande i hafsbrynet, förekommer jemväl en ofta starkt utbildad flytapparat; men blåsorne uppkomma hos dem genom ombildning af deras blad, af hvilka efter behof flera eller färre ombildas. Hos *Macrocystis*-arterne finnas likasom blad af 2:ne olika slag; de flesta, afsedda att hålla vexten uppe närmare vattenytan, äro derföre försedda med en päronformig blåsa, bildad af den utsvällande bladstjelen; andra, men färre blad, afsedda att bära fruktdelarne, framkomma på särskilda stamm-grenar nere vid roten, utan blåsor, hvaraf de väl icke heller äro i behof. Likasom de här omnämnde Algerne efter behof synas kunna utbilda den flytapparat, som de under vissa förhållanden torde behöfva, så kan denna under andra förhållanden hos dem sak-

¹⁾ Jemför *Rosanoff* *uti* *Mohl Bot. Zeit* 1871 n:o 49.

nas, likasom den hos många andra och stundom närstående former aldrig utvecklas.

Om den så kallade Jericho-rosen (*Anastatica hierochuntica*), som än är en ört med från roten utbredda grenar, hvilka bära blad och blommor, än är trädhård med inböjda och likasom hopknutna grenar, bildande då likasom ett nystan, som kringföres af vinden, känner man sedan lång tid tillbaka (*Linn. præl. p. 483*), att dessa olikheter stå i närmaste samband med dess sätt att lefva. Den vexer nemligen på Palestinas och Egyptens under vissa tider af året uttorkade, under andra öfversvämmade sandfält, i närheten af haf eller flod. Sedan dess frukt om hösten är mogen, böja sig de torkande grenarne tillhoppa, bärande frukterne på sin insida. Rullande för vinden, eller kringkastad af vågorne, då vattnen stiga, bär den frukterne skyddade af de inböjde grenarne. Då vattnen åter falla, stadnar vexten på den fuktiga och uppvärmda sanden; grenarne, uppmjukade af vattnet, breda sig åter ut, och från de utkastade fröna spira fram nya plantor.

Det är väl vanligt, att klängande vexter framkomma ur fröet som upprättade plantor. Tillsättes dem icke något stöd, så fortsätta de åtminstone någon tid att vaxa på detta sätt; tillsättes deremot ett stöd, så förlängas de ofta hastigt och kunna då uppnå en betydlig höjd. Vi odla på trädgårdsrabatterne flera arter Cucurbitaceer, som krypa åt jorden i brist på något stöd, hvarvid de kunde klättra upp med tillhjälp af deras i riklig mängd utvecklade cirrhi; måhända mogna frukterne snarare, då de odlas på nämnde sätt. Men tillvaron af dessa cirrhi torde antyda tillräckligt, att dessa vexter äro danade för att lefva på annat sätt. De i trädgårdarne odlade *Tropæolum* arterne förekomma jemväl såsom små örter; apteras på lämpligt sätt ett stöd till vissa arter (*Trop. pentaphyllum*), kan man få se dem, med tillhjälp af sina krökta bladstjelkar, till och med klänga sig upp i ett mindre träd, och hänga slutligen ifrån trädets krona ned i långa festoner. Uti Lunds botaniska trädgård finnas några exemplar af *Evonymus angustifolius*, som äro mera än 20 år gamla. De visa den egendomligheten, att under det en del af vexten utbildats till en upprätt buske, för att icke säga ett litet träd, knapt öfverstigande en aln i höjd, hafva några nedre grenar böjt sig ned till marken och likasom krypande utbreda sig deröfver. De nedliggande förgrena sig altjemt med lik-

nande grenar; de hafva blad, blommor och frukter, som, så vidt jag sett, fullkomligt öfverensstämna med dem, hvilka framkomma på den uppräta delen. Men de nedliggande stammarne synas vida frodigare än den uppräta; och jag har sett dem flerdubbelt längre än denna. Jag har antagit olikheten hafva uppkommit deraf, att vexten, enligt sin natur behöfver ett stöd; att den, såsom andra, framkommit såsom upprätt buske och fortsätter på detta sätt att utveckla sig med den uppräta delen. Förhållandet torde vara enahanda med några Rosor, som, planterade fristående, förblifva buskar med relativt ringa tillvext, men hvilka, uppdragna vid stöd, kunna hastigt uppnå betydlig höjd.

Hos flera Alger, och ofta hos vissa arter, förekommer att en förut rak gren, som kommer i närheten af en annan Alg, böjer sig och ofta mycket tvärt derikring, hvarefter den sjelf hastigt tillvexer i tjocklek, blir intensivare färgad, bildande en *cirrhus*, som tjenar till stöd för förlängda grenar på moderståndet, eller en *callus*, som i fall grenen lösslites torde kunna blifva centrum för ett nytt stånd. Sådane bildningar förekomma ofta hos vissa arter af *Hypnea*; men äro nu kända hos flera andra bland de röda Algerne. Och de torde väl böra betraktas såsom ett slags adventiva bildningar, som under särskildta förhållanden komma till utveckling.

Att både adventivknoppar och adventivrötter hos vissa vexter, eller på vissa delar af vexter, kunna under vissa förhållanden framkomma, som under andra icke på dem utbildas, är nogsamant bekant. Under det sådane bildningar hos många arter synas oundärlige, framkomma de hos andra, såsom det synes, obestämda både till antal och i afseende på det ställe af vexten, derifrån de utgå.

Om de här exempelvis nämnde förändringarne i delarnes form och särskilda organers utveckling tydligt nog torde visa en för särskilda arter egendomlig förmåga, att accomodera lifvets bildningar efter olika yttre omständigheters kraf, så torde det väl kunna ifrågasättas, huruvida icke äfven vissa andra förändringar, t. ex. i vextens beklädnad, kunde bero af eller stå i samband med yttre förhållandens inverkan.

Redan Linné anmärkte om *Heliocarpus*, att den såsom ungt träd har ludna blad likasom en *Malva*, men får efter några år fullkomligt hårfria blad. Hos *Triumfetta* deremot, hvilken som ung knapt kan skiljas ifrån *Heliocarpus*, för-

ändras luddet, och den äldre vexten blir styfharig. Hos flera af våra vanliga träd (popplar, bok, m. fl.) äro de nyss utslagna bladen ludna, men snart blifva de fullkomligt glatta. Hos aspen har hela den yngre vexten både i bladens form och behåring ett från den äldre vexten afvikande utseende. De förändringar, som sålunda förekomma på samma stånd, eller hos en och samma vextdel, de kunna måhända äfven väntas hos olika individer, när de på olika lokaler exponeras för olika yttre inflytanden. Många vexter torde således, hvarhelst de förekomma på mera exponerade lokaler, finnas mera eller mindre hårbeklädda, under det samma arter på mera skyddade lokaler kunna sakna en sådan hårbeklädnad. Linné anför flera exempel på en sådan olikhet i utstyrsel, som han utan tvekan tillskrifver yttre lokala förhållanden. Om *Comarum palustre* med ludna blad, som förut varit uppställd såsom egen form, säger Linné (*i Fl. Lapp.*) att ludenheten förekommer på den 2-åriga vexten, på blad som öfverlefvat vintren. Om *Alchemilla vulgaris* säger han (*i Fl. Lapp.*) att deraf förekomma 2:ne varieteter, af hvilka den ena är den naturligaste, mera upprätt, hårig och grön; den andra har nedliggande rödaktig stjelk med glatta och blekare blad: dessa olikheter föranledas af lokala förhållanden (*»a sola naturali cultura oriuntur»*).

I alla dessa olika förhållanden torde man väl icke med fog kunna se nagon de nämnda arternes tendens att bilda nya former; de adagalägga väl i stället att hos vissa vexter förefinnes en förmåga, att kunna omgestalta sin form efter de lokala villkor, som erbjudas lifvet. Denna omgestaltning sker hos dessa vexter på ett för arten bestämdt sätt; och den förekommer hvarhelst samma art exponeras för enahanda förhållanden. Alla de förändringar i utseende och hos särskilda delar, som på detta sätt uppkomma, måste anses tillhöra artens formkrets, sådan denna en gång blifvit bestämd för artens lif; och dessa förändringar torde väl hafva förefunnits så länge arten existerat, och skola nog återkomma så länge den fortlevver på jorden. Äro de yttre former, som samma lif under olika yttre förhållanden ikläder sig, stundom sins emellan mera afvikande än de som stundom skilja olika arter, så torde de för naturforskaren, som ställer sig på Linneansk grund, jemväl kunna tjena såsom nya bevis för den åsigt, att betydelsen af likheter och olikheter hos formerne i naturen icke får bedömmas efter deras mer eller mindre i ögonfallande beskaffen-

het, utan måste väl betydelsen deraf i hvarje särskildt fall pröfvas; om ock man i många fall tror sig kunna sluta der- till efter analogier. Naturen har sin egen logik, och Linné skref därför såsom corollarium till sin lagbok: *In Scientia naturali principia veritatis observationibus confirmari debent.*

c) *Olikheter i artens yttre form, hvilka städse förekomma hos olika individer, likasom tillhörande artens normala formkrets.*

Det har redan blifvit påmint derom, att hos de dioika vexterne samma arts individer kunna vara sins emellan vä- sendtligen olika (Individer af olika kön). Om i dessa fall, ehuru olikheterne hafva den största betydelse, de olika indi- viderne måste nödvändigtvis anses tillhöra samma art, så torde man väl med fog kunna antaga, att äfven mindre olikheter kunna förekomma hos olika individer, hvilka ligga inom ar- tens normala formkrets. En noggrannare jemförelse visar lätt, att sådane individuella olikheter förekomma öfver allt, ehuru ofta så föga märkbara, att de alldeles förbises i botanisternes beskrifningar ¹⁾. De kunna uppenbara sig i större eller min- dre förändringar i vextens yttre form, i blommornes färg, i frukternes smak, i vissa biologiska förhållanden o. s. v. Om de oftast förekomma i delar och i afseenden, som hafva min- dre betydelse, så sträcka de sig i andra fall äfven till vex- ternes vigtigaste delar. Finnas inom artens formkrets flera racer, eller grupper af individer af särskild beskaffenhet (olika kön), så utesluter icke detta förekomsten af individuella olik- heter inom hvardera gruppen särskilt. Om således arterne hafva hvardera sitt eget lif, som utpreglar sig i vissa yttre former, så vill det synas som i dessas begränsning rådde en viss frihet, som måhända betingas af sjelfva vextlifvets art, och dess passiva mottaglighet för inverkan från yttre för- hållanden.

De flesta arter hafva utan tvifvel en benägenhet att an- taga en viss form för hela ståndet, och lättast torde detta vara märkbart hos de större och länge lefvande träden. Man kan vanligen redan på långt håll skilja träd af olika slag från

¹⁾ Jag har redan ofvanför erindrat om Linnés uttalanden härom; och jag har sökt göra gällande, att en olika uppfattning af arten torde bero i vissa fall på ett förbiseende eller misskännande af de individuella olik- heternes tillvaro.

hvarandra (fur, gran, björk, bok). En sådan egendomlighet i form framkallas utan tvifvel genom flera combinerade förhållanden. Normalt utgå grenarne på något när bestämda afstånd ifrån hvarandra och i viss riktning, som kan vara olika hos olika trädslag — i grenarnes täthet, i benägenheten att utveckla vissa grenar mera än andra o. s. v. Under utvecklingens fortgång tillkomma ytterligare olikheter i den ursprungliga anläggningen; öfre grenar afkastas hos pilar och popplar, nedre grenar, som vissna, affalla snart hos de flesta, men sitta som döda länge qvar hos andra (granen). Det är lätt begripligt att en egendomlighet i form, som är beroende af flera inverkande moment, också måste vara underkastad många afvikelser, till en del beroende af yttre förhållanden på de olika lokaler, till hvilka vexterne spridas i den fria naturen.

Huru sådane lokala olikheter (rikligare eller knappare tillgång till ljus och luft, bättre och sämre jordmån o. s. v.) inverka, ser man öfveralt, om man blott derpå fäster någon uppmärksamhet. Man ser trädet ofta böja sina grenar på ett abnormt sätt, likasom för att undvika ett annat närstående träds område; och i skogen få de grenar, som utgå mot friare rymd, en starkare utveckling. Hos tallen försvinner det yngre trädets coniska form, så att antingen, der träden stå glesare och de nedre grenarne äfven kunna komma till utveckling, den äldre furan närmar sig den form, som ofta anses karakteristisk för Libanons cedrar; eller, der träden stå tätare, den får den form, som är vanlig i den nordiska timmerskogen. Ingen lär väl antaga, att sådane olikheter antyda någon artens tendens att skilja sig i särskilda arter; vextens passiva lif har fått vika för den yttre omgifningens makt; och de många individerne i timmerskogen få en viss likhet i yttre form under inflytande af samma yttre förhållanden. Det är väl liknande anledningar, som betinga flera af de individuela olikheterne. Och hvad som i det citerade exemplet ter sig mera synbart i stort, det förekommer väl äfven med afseende på vexterne särskilda delar, hvilka sammansättas af elementer, som i sin ordning kunna utbildas talrikare eller färre, mera i en riktning på ett ställe, kanske i en annan på ett nära befintligt.

Hos de röda Algerne finnas många, der delarne anläggas med den största regelbundenhet, och der denna regelbundenhet

lätt kan följas i de minsta delar. Det finnes sålunda arter, hos hvilka vid hvarje led af en tveäggad stam en gren utgår; grenarne ofta alternerande åt höger och venster. Andra arter hafva grenarne utgående vid hvart annat led, eller vid hvart tredje, eller fjärde o. s. v.; under det hos andra arter en sådan bestämd norm för utvecklingen näppeligen torde kunna uppspåras. Äfven hos sådane arter, der grenar anläggas och utgå med den största regelbundenhet (arter af *Ptilota*, *Plocamium* m. fl.) finner man att under utvecklingen olikheter uppkomma — olika grenar få olika utveckling, några förblifva ogrenade, andra utvecklas vidare, stundom äfven detta med den största regelbundenhet; nedre grenar antaga stundom riktning och utseende af rötter; vissa grenar ombildas till cystocarpier, andra förblifva sterila; på olika stånd sker ombildningen till olika slag af de fruktorganer, som förekomma hos Florideerne. Hos några arter förete de individer, som skola bära de olika fruktorganerne vissa andra olikheter (arter af *Ceramium*, *Hypnea*, *Gigartina* o. s. v.). Hos närstående arter kunna de individer, som bära samma slags fruktificationsdelar, få sins emellan en viss öfverensstämmelse; men icke följer deraf, att de sålunda analoga individerne utgöra något slags öfvergångsformer mellan de arter de tillhöra.

Hos många högre vexter, och kanske tydligast hos de med alternerande blad, hvilka vanligen hafva längre bladstjelkar, ser man dessa än längre än kortare. Hos arter af Nympheaceer, som vexa på grundare vatten, får bladstjelken en derefter afpassad längd; men man kan på individer af samma art, då de vexa på djupt vatten, få se bladstjelkarne uppnå en mångdubbelt större längd.

Om dessa individuella olikheter i vissa fall tyckas lätt nog kunna förklaras af förekommande förhållanden, så gifvas andra, som torde vara vida svårare att härleda från sina naturliga orsaker. Hos annuella och bienna vexter framkomma blommorne temligen samtidigt hos individer, som vexa under enahanda yttre förhållanden, så att t. ex. på samma rågfält stora antal af derpå befintliga stånd utkasta pollenkornen nästan samtidigt i rykande massor. Hos mångåriga vexter, och tydligast hos träden, inträffar första blomningsperioden hos olika individ af samma art, ofta vid olika ålder. Hos monoiska vexter (*Pinus*-arter) har jag vid den första blomningen hos några (*P. austriaca*) endast sett maskulina; hos

andra arter (*P. Cembra*) endast foeminina-blommor framkomma; och detta vid yngre ålder hos vissa stånd, än hos andra. Om *Picea pectinata* anmärker Loudon, att kottar med fertilt frö sällan komma till utbildning förrän träden uppnått 40 års ålder; men att kottar utan frö kunna finnas redan före 20 års ålder, och att foeminina kottar kunna utbildas år efter år innan maskulina blommor visa sig. Om en afart af *Ulmus suberosa* anmärker *Willdenow*, att då den planteras i häckar och hålles kort, såsom bruket var vid byarne kring Berlin, den aldrig blommade. Midt för det nya akademihuset i Lund, står ett gammalt träd, hvars ålder nog kan uppskattas till öfver 100 år, som sannolikt aldrig har blommat¹⁾. Om blomningsperioden sålunda tyckes inträda vid mycket olika ålder, så torde detta bero på förhållanden, såväl hos arter som individer, för hvilka det torde vara svårt finna en tillfredsställande förklaring²⁾.

Ikke mindre svårt torde det vara att förklara, hvarföre i vissa fall olika individer få en olika lifslängd. Hos hampan kan man få se hanstånden torra, långt innan de samtidigt sådda honstånden upphört att bilda nya delar. Om man antager att hos de annuella vexterne lifskraften uttömmes genom blomningen, så skulle man knappast vänta, att pollenbildningen skulle förmå mera än fruktsättningen.

Bland individuella olikheter, som mest falla i ögonen, torde de förändringar kunna räknas, som olika stånd förete i blommandes färg och färgernas olika grupperingar. Om i vissa fall sådana förändringar kunna förklaras af de olika ämnen, som med roten upptagas (*Hortensian*, *Anthyllis vulneraria* m. fl.), så torde i andra fall olikheterne ikke kunna härledas från liknande orsak. När man oftast på samma lokal i den fria naturen ser *Orchideer* och *Corydalis*-arter med röda eller hvita blommor stå blandade om hvarandra, och de, inflyttade i våra trädgårdar medelst lökar, bibehålla dessa sina olika färger, så torde det väl ikke gerna kunna antagas, att de olika färgerne förorsakas af olika ämnen, som på olika ställen med roten upptagas. Man vet jemväl, genom en lång erfarenhet, att

¹⁾ I Zetterstedts katalog upptages trädet under namn af »*Ulmus usula*»(?), med bifogad anmärkning, att trädet ikke blommat; oakadt jag sedermera fäst uppmärksamhet på trädet, har jag aldrig derpå sett blommor.

²⁾ Decandolle har i sin physiologie några observationer om vexterens olika pubertets-tid; men dessa torde knapt erbjuda någon nöjaktig förklaring af anmärkta förhållanden.

hyacinther, tulpaner, frittilarier, när de uppdragas ifrån lökar, bibehålla moderlökens blom-färg, huruvidt de än kringspridas till olika localer; äfvensom å andra sidan, att många af våra odlade vexter, som uppdragas ifrån frö, framkomma med blom-mor i olika färger och färgteckningar (arter af *Phlox*, *Verbena*, *Viola* o. s. v.)

Individuella olikheter förefinnas sålunda och uppenbara sig i större eller mindre förändringar i form och färg, likaväl som i biologiska förhållanden. Äro de i många fall af den art, att man derpå knapt fäster uppmärksamhet, så äro de i andra fall så väsendtliga, att de måste finnas för vidmagthållande af artens lif (individer af olika kön), och framträda med sådane olikheter i yttre form, att de till och med kunnat hänföras till olika släkten. Kunna de stora förändringar, som förekomma hos individer af olika kön, icke med fog betraktas såsom bevis för någon artens tendens att variera, eller att utbilda de olika könen till olika arter; så borde väl de obetydligare modifikationer, som förekomma hos arternes olika individer, än mindre böra räknas såsom sådane bevis.

De gränser, inom hvilka det individuella lifvet sålunda fritt får utveckla sig, äro måhända en gång för alla bestämda, och dragna, sasom det tyckes, trängre eller vidare efter olikheten af det särskildta lif, som i hvarje art fått sitt uttryck. Likasom mynten skola utpreglas till ett bestämdt värde, men dock åt myntaren är öfverlemnadt ett remedium, öfver eller under det bestämda värdet, som det särskildta myntstycket icke får öfverstiga, så hafva äfven arterne i naturen sina bestämda former, men som hos olika individer kunna inom vissa gränser varieras. Man torde kunna säga, att dessa individuella olikheter hos vexterne (inom artens formkrets), motsvara de olikheter, som visa sig hos olika personer. Likasom några äro hvarandra mycket olika, så äro andra hvarandra ofta förvånande lika. Man ser stundom tvillingbröder, som kunna vara hvarandra så lika, att de med svårighet åtskiljas af dem som icke närmare känna dem. Inom slägter der giftermål, generation efter generation, ske inom familjen, förekomma stundom familjedrag — vissa, för alla gemensamma, individuella likheter — som göra familjens medlemmar i viss mån igenkänneliga ifrån andra. Det gifves på samma sätt hela nationer, som i sitt skarpt utpreglade utseende bära vittnesbörd om den race de tillhöra. De locala former, som hos vexterne stundom

förekomma i den fria naturen, motsvara väl oftast dylika racer och uppkomma väl på analogt sätt: de få sin egen pregel derigenom, att ett visst mått af individuella likheter äro för dem gemensamma. Det är, som det synes mig, hufvudsakligen om sådana racers natur, man kan hafva olika meningar. Jag skall nedanför söka antyda i hvad mån naturens egna anordningar synas berättiga, att anse dem såsom varande af betydelse för bildandet af nya arter.

Så bygger vextlifvet sina yttre former, med en viss frihet i utförandet, möjligen beroende af beskaffenheten, eller lämpad efter rikedom af det material, som erbjudes detsamma på den torfva, vid hvilken vexten är fästad och genom de yttre förhållanden i öfrigt, under hvilka lifvet får utföra sitt arbete. Har vexten icke som djuret sjelf förmåga att uppsöka sin föda; icke frihet att välja den, eller att moderera den mängd som upptages med roten, och som på ett eller annat sätt skall förarbetas, (assimileras eller afsöndras) — så kunde det måhända böra antagas, att en viss föränderlighet i vexten, i bildandet af de yttre former, som derunder tillkomma, äfven nödvändiggjordes. Att således i sjelfva vextlifvets natur finnes en anledning till större föränderlighet i yttre form, än som möjligen i den fria naturen förekommer hos djurens olika individer af samma art.

d) *Abnorma förändringar i yttre form, föranledda af olika anledningar; olikheter, som mer eller mindre ligga utanför artens normala formkrets.*

Uti det föregående har jag sökt lemna exempel på olikheter i yttre form, som lifvet ikläder sig hos en och samma art, hvilka, huru stora de stundom kunna förekomma, ändock måste anses såsom normala utvecklingar af samma lif. Det gifves andra förändringar i yttre form, som stundom mera, stundom mindre afvika ifrån de vanligen förekommande, hvilka icke kunna betraktas hvarken såsom normala eller nödvändiga företeelser af artens lif. De förra hafva, så långt efterforskningar och erfarenhet kunna gå tillbaka, utan tvifvel tillhört artens egendomligheter, och de skola, enligt den Linneanska uppfattningen, säkert återkomma så länge och hvarhelst artens lif framträder i sina naturliga former. De sednare tillkomma väl alltid af någon, mer eller mindre tydlig, tillfällig anledning, och försvinna förr eller sednare, när denna upphört att verka. Linné uttalade också att en bestämd skillnad måste

göras emellan artens normala former och en lekande naturs abnorma bildningar.¹⁾ Han åtskiljde dessa sednare under olika kategorier, några såsom hybrider, andra såsom monstrar, och kanske än flera såsom af tillfälliga anledningar tillkomne missbildningar af vexternes normala former. Och det var för visso icke Linnés mening, att racen eller varieteten skulle anses såsom något slags naturligt trappsteg emellan individet och arten. Före Linné gjorde man vanligen icke någon skillnad emellan de olika begreppen; arter, varieteter, racer och missbildningar uppräknades i brokig blandning; variationer, som under en föregående tid tydligen uppkommit under blomster-odlarens hand, antogos ofta likbördiga med naturens arter. Det är icke minst betecknande för Linnés ståndpunkt, att redan i ett af sina tidigaste arbeten, *Critica Botanica*, hvilket hade till syfte att rensa vetenskapen från en föregående tids i många riktningar gjorda missgrepp, han mycket omständligt behandlar de abnorma bildningar, som datiden redan kände. I en följd af olika paragrafer redogör han både för arten af de variationer som förekomma, och för de delar som ofta förekomma varierande. Ännu i den dag, som är, torde den, som vill göra rättvisa åt Linnés arbete för vetenskapens grundläggning, kunna finna skäl att i detta hans ungdoms arbete beundra så väl hans — väl hufvudsakligen på egna observationer grundade — rika erfarenhet, som en sällspord klarhet i uppfattning. Han inleder här sin framställning såhunda: "*Sexus varietates naturales constituit; reliquæ omnes varietates monstrosæ sunt*".

Abnorma bildningar kunna spåras hos vexterne, icke blott hos de flesta deras delar, utan de framträda ock på olika sätt, och framkallas utan tvifvel af olika orsaker; de torde såhunda jemväl kunna hafva olika betydelse. Jag skall tillåta mig anföra några exempel:

Uti Malpighis kanske numera förbisedda arbete: *De Gallis* redogöres, efter i detalj gaende undersökningar, för de egenomliga utvexter, hvari vextlifvet ter sig, efter insekters af olika slag inverkan på olika vexter, äfvensom på olika delar af samma vext. Må man icke föreställa sig, att dessa utvexter äro af insekterne sjelfve bygda boningar, uti hvilka deras utveckling föregår. Om det vanliga galläplet utgöres af en ma-

¹⁾ "Distinguimus Creatoris artificio distinctas Species a Naturæ ludentis Varietatibus."

hända mindre afvikande knöl på ekens grenar, så finnas andra dylika bildningar, hvilka mycket hjertare sticka af mot vanliga delar. Hos rosorne påträffas, ingalunda så sällan, stora klotformiga bildningar, som nästan hafva utseendet af en monströs knopp, bestående af mycket talrika bladlika delar, några erindrande om törnrosbladets former, andra mera afvikande, och alla tätt hopgyttrade till en oregelbunden knut, af stundom mera än tums diameter. Likasom man i de yttre formerne igenkänner rosornes delar, så återfinner man i dessa äfven modervextens anatomiska elementer, om ock mer eller mindre annorlunda ordnade. Och det torde icke kunna vara något tvifvel om att dessa, i så hög grad abnormal, bildningar äro produkter af vextens egen lifsverksamhet, men hvilken här af särskild anledning utpreglats i mycket afvikande former. Afskalas de bladformiga delarne, finner man i det inre flera särskilda knutor, ur hvilkas inre slutligen insekten fullbildad bryter sig en öppning. Det är hos eken och törnrosen samma orsak, som framkallar en afvikelse i vextens normala gestaltningprocess, men afvikelsen framträder på olika sätt hos de båda vexterne; och så är väl förhållandet äfven hos många andra vexter. Jemväl hos en och samma art (eken) kunna flera olika slag af dylika bildningar förekomma, måhända framkallade af olika slags insekter, men i alla händelser i viss mån olika, allt eftersom insektägget nedlägges i en rot eller i en gren, i ett blad eller i en knopp, i en masculin eller feminin blomma. Delarne i det masculina blomstret hos eken få en förändrad ställning och andra former än i det normala; men en och annan ståndare finnes qvar, tillräckligt antydande hvilken del af vexten, som blifvit ombildad. Man torde väl i alla dessa fall kunna antaga att det gift, som med insektstynget och det inlagda ägget infördes i den förut friska vextdelen, framkallat en starkare lifsverksamhet, hvarigenom vextlifvet oskadliggör det i dess inre införda främmande elementet; men i det safterne således i rikligare mängd här hopas, bibehålla de väl sin tendens att utbilda sig till de former, som normalt tillhöra den angripna delen.

Likasom vextdelar sålunda kunna få en abnorm utveckling genom insekters åverkan, så torde väl äfven vextparasiter af olika slag kunna gifva åt närvexten ett mer eller mindre abnormt utseende. Hos den vanliga *Murgrönan* äro rötterna tradlika, greniga, från rothalsen nedåt temligen jemt afsmal-

nande. Men hafva frön af den på murgrönan parasitiskt lefvande *Orobanche Hederae* nått ned till murgrönans rötter och deri inträngt, svälla de angripna ställena ut till knölar, som i form och storlek nästan kunna jämföras med potatis.

Ingen lär väl antaga att de egendomliga bildningar, hvari vextlifvets former utbildas under inflytandet af nämnde, för det samma fullkomligt främmande moment, torde kunna tydas såsom bevis för någon hos vexten befintlig tendens att omgestalta sig i nya former. En hvar skall väl erkänna, att dessa abnormala bildningar snarast äro att betrakta såsom sjukdoms-fenomen, hvilka uppkommit af en tillfällig, här lätt funnen anledning. Lifvet fortsätter sina bildningar i den angripna vextdelen, men likasom afledt uti en främmande strömfärd; och det fortsätter väl sin verksamhet här, så länge det afledande momentet verkar. Men liksom lifvet derefter återgår till sina normala former, så återkomma de abnormala bildningarne, hvarhelst det främmande momentet åter inverkar på den normala formbildningen.

Det är en vanlig företeelse, att om man afskär ett yngre, i sin fulla vextkraft befintligt träd, så frambryta från den återstående delen nya skott, hvilka bade förlänga sig hastigt (*Salix*-arter) och bära ofta blad af ovanliga dimensioner. Man kan måhanda antaga, att den rot-adparat, som förut varit tillräcklig att mata det ostympade trädet, nu, då den har färre delar att nära, utbildar dessa i kraftigare former. Ser man således i detta enkla exempel en möjlighet, att genom ökad näring framkalla talrikare eller starkare utbildade delar hos vexterne, så kan man väl lätt föreställa sig, att under den långa tid menniskan närt sig af, eller användt odlade vexter, hon funnit många olika sätt, att öka och omgestalta sådane de odlade vexternes delar, som hon funnit för sina behof användbara. Så har kulturen, under seklernes följd, smaningom omgestaltat de vexter, som varit föremål för odling. Och då man altjemt söker tillförsäkra sig det önskade resultatet, skola ock de genom kultur vunna formerne genom liknande odlingssätt bibehållas. Har man någonstädes, genom en förändring i detta, lyckats frambringa någon ny eller förmanligare form, så skall man der fortsätta med samma odlingssätt, och skapa en ny race. localt bestående jemte den allmännare. Har man nu öfvertygat sig, att de genom insekters åverkan frambringande abnormala formerne endast äro att betrakta såsom sjukdoms-fenomen,

så förefaller det mig icke blott sannolikt, utan väl äfven bevisligt, med afseende på flera af vara kulturvexter, att de endast äro genom konst frambringade patologiska afvikelser ifrån de i naturen förekommande vilda stamarterne. Och äfven den skillnad, man ofta gör, emellan tillfälliga variationer och constanta racer, torde väl näppeligen föranleda ett annat uppfattningssätt.

Linné antog i allmänhet, att dessa kulturformer endast voro genom konst tillkomna egendomliga bildningar, som atergingo till sina stamarter, när de fortplantades genom frö och utsåddes, flera generationer efter hvarandra, på icke genom konst förberedda localer. Th. Fries (*Kulturväxternes ursprung*) uppgifver att såväl *moroten* som *palsternackan* blifvit ursprungligen hos oss införda såsom kulturvexter; och att de båda sedermera förvildade, spridt sig vida omkring till olika localer. De odlade racernes egendomlighet, att hafva roten starkt utbildad, med egendomlig smak, och med olika qualificationer hos olika varieteter, är hos den förvildade vexten fullkomligt försvunnen. Den vanliga vinrankan hör utan tvifvel till den gamla världens äldsta kulturvexter. Man odlar den på i någon man olika sätt, efter localernes olikhet. Man känner också deraf många olika variationer, och man vet att vinet från olika ställen kan hafva mycket olika egenskaper; det är ock den säregna beskaffenheten af olika vinsorter, som bereder i många fall åt dem en mycket stor afsättning. Det ligger således i odlarens intresse, att bibehålla dessa egenskaper oförändrade. Om således locala variationer hade benägenhet att öfverga till särskilda arter, så skulle väl detta företrädesvis väntas hos vinrankan. Men i motsats härtill säger Alph. DeCandolle (*Geogr. Bot. p. 872*), att om en vinranka påträffas i den fria naturen, det är omöjligt afgöra om den der är ursprungligen vild, eller härstammar från odlade exemplar, som förvildats, Linné omnämner i sin *skånska resa*, att man vid Gärnsnäs gjort försök med vinodling, men att försöket uppgifvits mera än 20 år före hans dervaro; dock funnos ännu på platsen exemplar, som blifvit vilda liksom stammen».

Frukträdsodlaren har lärt sig, att både öka frukternes mängd och deras storlek, sockerhalt m. m. Ut i en afhandling, införd i de *Skand. Naturf. Förhandl. vid mötet i Köbenhavn år 1873*, har en af nordens skickligaste trädgårdsodlare, Etats-Rådet Hoffman Bang, lemnat en redogörelse för de nästan

otroliga resultat, som modern konst uppnått genom använd beskärning, hopkoppling af delar, både från olika stånd af samma fruktslag, och stånd af olika trädslag. Man kan afskära stammen till ett träd, och låta kronan matas medelst grenar, som sammankopplats ifrån andra träd. Man kan således få safterne att utbreda sig i motsatt riktning mot den de följa i det ostympade trädet. Ingen lär väl kunna sätta i fråga, att anse en sådan abnormitet utgöra likasom ett nytt uppslag i vexternes lif — en begynnelse till former, i hvilka safterne rörde sig efter andra lagar, än de som hittills varit kända.¹⁾ Man kan väl knappast i detta egendomliga fall se något mera än ett nytt exempel på lifvets förmåga, att under onaturliga förhållanden hjälpa sig fram på äfven ovanlig väg. Och har en vanliga förhållanden så motsägende förändring icke någon annan betydelse, så torde väl andra förändringar, som förefinnas under tillkonstlade förhållanden, icke heller böra anses såsom giltiga bevis mot hvad naturens normala bildningar kunna lära.

Sjelfva det sätt, hvarpå kulturvexterne afvika ifrån sina vilda stamarter, torde i många fall antyda deras egenskap att blott vara genom konst tillkomne. Det tillhör nemligen vexten att på vissa tider uppsamla reserv-näring på olika ställen för kommande behof, Än är det företrädesvis i roten (hos många perennerande örter), eller dermed i viss mån jemförliga delar (rotknölar, lökar, rotskott), än i frukter och frön eller dem tillhörande delar, som vexten uppsamlar sina förråd. Dessa naturens förrådskamrar har konsten lärt sig att vidga och rikligare utstyra, dels genom att öka de näringsämnen, som tillföras vexten genom roten, dels genom att i vissa fall afstänga ifrån ljus de delar, som skola begagnas, dels genom att i andra fall i rikligaste måtto exponera dem för inflytandet af ljus och värme.

De hos vexten uppsamlade ämnena utgöras hufvudsakligen af stärkelse och socker, med olika tillsatser hos olika vexter, än mera oskadliga, än giftiga och för menniskan stundom i hög grad farliga. Man vet att olikhet i detta sednare afseende stundom förekommer hos närstaende arter (hos *melonen* och *coloquinten*). Men sadane förhållanden har man trott sig kunna

¹⁾ Linné omnämner att man på hans tid gjort försök med att vända upp och ned på ett yngre träd (af *Tilia*), och att man lyckats få kronan ombildad till rot, och roten att bilda grenar till en ny krona.

förklara genom antagandet, att hos närstående arter samma ämnen förefinnas, men i olika mängd; och att ju mera konsten lärt sig att öka de egentliga näringsämnen, desto mindre utvecklas de skadlige, eller förminskas deras verkningar äfven på andra sätt. Sålunda hafva manihot, batater, potatis, meloner, gurkor, som alla tillhöra familjer med ofta farliga bestandsdelar, kunnat blifva föremål för en vidsträckt kultur.

De konstgrepp, som en lång erfarenhet lärt odlaren att använda, äro af olika slag. Man söker afstänga hvitkål och blomkål, salat, sparris, potatis o. s. v. från ljusets inverkan för att hindra vexten att själf använda den uppsamlade näringen; man beskär buskar och träd på eget sätt, för att localisera dess uppsamlande; man spalierar dem, man uppdrager dem i drifkast för att öka tillgången på ljus eller värme o. s. v. Frukter och bär visa ofta genom den olika färg, de på solsidan antaga, hvilket inflytande ljus och värme utöfva på ombildningen af de ämnen, som i frukterne äro uppsamlade.

Det är icke minst betecknande för arten af de förändringar, som kulturvexterne förete, att i den mån odlingens konst stiger, desto mera ökas antalet af kulturvexternes racer. Af den vext Romarne odlade i några få variationer, deraf känner nutiden en stor mångfald. Vexter som hos dem odlades endast för kökets behof, de förefinnas nu i olika racer jemväl för ladugårdens. Kulturvexter deremot, som icke användas för liknande behof, och af hvilkas förändringar för olika ändamål odlaren icke haft någon fördel, dessa förekomma ofta efter sekels gammal kultur knapt kända i olika variationer. Så är *Agave americana*, som var okänd för Romarne, numera en så allmän kulturvext i Italien, att den af konstnären ofta begagnas såsom karakteriserande det Italienska landskapet; men, så vidt jag känner, förekommer denna art knapt i andra variationer, än i några förändringar i bladets färg, som användas för decorativa ändamål. I stället för att odlade frukter och bär förefinnas i en mångfald af variationer, olika i storlek och form, i färg och smak, så förekomma de flera olika slag af bär, som förefinnas hos oss vilda och icke ännu blifvit föremål för kultur, nästan öfverallt hvarandra lika.

Äfven det förhållandet, att olika vexter ofta förändras på ett liknande sätt, torde väl antyda att förändringen framkallats af någon särskild orsak. Det är sålunda vanligt att Legumi-

noser och Oxalideer, som hafva 3:ne småblad, öka dessas antal till 4; att vexter, som normalt hafva 2:ne motsittande blad (arter af *Lysimachia*, *Veronica*, *Anagallis*) få verticillerade blad med 3—4 blad i kransen. Likasom i sådane fall stjälkens kanter ökas (från 4—6), ser man hos de odlade Caeteerne det normala antalet ribbor här och hvar tillökas med en ny; och detta stundom repeteras i den mån stammen tilltager i tjocklek — huru mycket annars sådane characterer hos dem synas vara constanta. Träd af mycket olika familjer, som i sitt vilda tillstånd äro försedda med tornar (Rosaceer, Oliver, Aurantiaceer) och hafva sura eller bittra frukter, förekomma hos odlade racer utan tornar och med ätliga frukter.

Äfven den mycket egendomliga form, som *Celosia cristata* nästan alltid antager, hvarhelst den odlas, är utan tvifvel en genom kultur frambragt form. Uppdragen på mager jord, säger Linné, blir den liten och klen, får sina naturliga trinda grenar och blomster i vanliga, enkla ax. Jemväl hos många andra vexter förekomma analoga stambildningar, men mera tillfälligtvis. Linné citerar flera exempel härpå, observerade hos *Tragopogon*, *Cichorium*, *Scorzonera*, *Asparagus*, *Hesperis*, *Beta*; och de fleste botanister torde nog hafva paträffat sådane monströsa stjelkbildningar äfven hos andra vexter. Linné antog dem, likasom de krusade eller på annat sätt förändrade blad, som under odling uppstå hos många vexter, vara genom kultur frambragte luxurierande former, hvilka han påtagligen ansåg hafva ringa betydelse såsom variationer. I många fall, och helst der de framträda mest afvikande, torde jemväl de sistnämnda kunna betraktas sasom närmast analoga med de monströsa bildningar, som här ofvan blifvit tydda sasom patologiska afvikelser.

Likasom lifvet i dessa abnorma former framträder på ett eller annat sätt förändradt, till följe af en rikligare tillgång till näring, så förvara vi i de botaniska trädgårdarne talrika vexter, som väl närmast kunna betraktas som krymplingar eller sjuklingar. De fortsätta att lefva på detta sätt öfverallt, der man icke känner, eller förmår at dem bereda de lifsvilkor, under hvilka de i sina hemland utbildas i rikare former. — Det är lätt begripligt, att enahanda modificationer i utveckling, som kulturen bereder, stundom kunna förekomma på särskilda localer i den fria naturen. Så reduceras buskar och träd i aretiska regioner till möjligast minsta dimensioner, med

stammar, som krypa i jordbrynet, och med delar i öfrigt, som tydligt bära stämpeln af en karg natur. Så förekomma på de sandiga stränderne vid hafven, likasom på alpernes mera exponerade localer, många vexter under form af nedliggande tufvor, som under andra förhållanden få ett olika utseende.¹⁾ Så äro de saltvattens alger, som förekomma vid Östersjöns stränder, reducerade till former, hvilka stundom äro så afvikande, att de fördom upptagits såsom egna arter; men följer man Östersjöns stränder genom sundet till Kattegat, så ser man ock huru, med den tilltagande salthalten i vattnet, de förkrympta formerne återtaga sina vanliga dimensioner. Vi veta också, att våra vanliga barrträd kunna, äfven på lokaler som ligga jemte hvarandra, förete ett mycket olika utseende. Sammanträngde i massor i skogarnes skugga, eller vexande glesa på de torfbildande kärren, få de af brist på ljus på det ena stället, af brist på passande näring på det andra, samma tvinnande utseende.

De abnorma förändringar i artens utseende, hvarpå jag här ansett mig böra lemna några exempel, torde väl icke med fog kunna anses såsom bevis för en hos vexten nedlagd tendens att variera de normala formerne: de äro tydligen tillkomne under inverkan af en yttre främmande orsak, som i vissa fall synes öka, i andra fall minska den vanliga lifskraften. Och då denna är beroende icke blott af jordmånens rikedom eller brist på närande ämnen, utan jemväl och kanske i lika hög grad af atmospheriska förhållanden — af fuktighet, af ljus och värme, — och dessa vilkor för lifvet i den fria naturen erbjudas vexterne i oändligt skiftande gradationer, så är lätt begripligt, att äfven här formerne kunna framträda mer eller mindre olika. Men för så vidt som konsten lärt sig att likasom i en brännpunkt förena nämnde lifvets viktigaste vilkor, och jemka dem efter olika vexters olika fordringar, så skola ock genom den de mest afvikande resultaten antagligen kunna vinnas.

¹⁾ På öar, spridda i de stora oceanerne, få flera alger, hvilka der mera än på andra ställen torde vara utsatta för hafvets hela våldsambhet, ofta form af nedliggande dyn-likä tufvor. De utmärka sig då icke blott genom tätare förgrening och ofta rik rotbildning, utan äfven derigenom att skiljda grenar sammanvexa sins emellan, så att hela ståndet kan sammanhänga till en outredbar härftva af sammankopplade grenar. Så vidt jag kunnat se äro flera af dessa alger endast locala former af arter, som på andra ställen hafva ett annat utseende.

D. Müller anmärker: att »efter en långvarig kylig väderlek, framkomma nejlikorne med sammanflutne färger; och att alkaliska substanser i jorden betinga hos löfkojorne hvitpunkterade blomblad, likasom hortensierne blifva blå genom jernoxider. Det är väl antagligt, att många andra nyanceringar i blommornes färg kunna hafva liknande anledningar. Müller tillägger: dessa förändringar häfvas likväl med försvinnandet af deras orsaker; och det är endast genom inverkan på moderplantan, som constanta förändringar frambringas».

Redan Linné påminner om flera i den fria naturen förekommande exempel på vexter, som på ett eller annat sätt förändra bladens gröna färg; han omtalar nagra tecknade med en hvit fläck på bladskifvans midt, andra med en svart eller en röd; några med hela bladet tecknad med 4-kantiga fläckar, andra med punkter eller linier, eller med olikfärgade kanter. Man har i sednare tider med ifver eftersökt vexter, som antyda benägenhet till sådane förändringar, och under lämpligt behandlingssätt lärt sig att öka de naturliga tendenserne. Man har salunda lyckats frambringa de brokiga maskerad-kostymer, hvarmed de så kallade bladvexterne nu öfverallt prunka i de moderna vexthusen. Likasom de förändringar i bladens färg vi se föregå hvarje höst, och föregå på samma sätt hos individer af samma art; likasom hos flera blommor färgen förändras med fortskridande utbildning (*Boragineer* m. fl.), så torde väl äfven de förändringar i färg, som odlarens konst frambringar hos bladvexterne, åtminstone i vissa fall ske med tillhjälp af ljusets inverkan. Hos *Evonymus Japonicus* förekomma bladen ofta hvitfläckiga på exemplar, som hållits instängda i vexthusen; men ett sådant exemplar, utflyttadt i det fria, återtager vanligen de friska bladens gröna färg. Hos många framkomma de brokiga färgerne bättre, då vexten sättes längre tillbaka på mindre belysta platser. Den varietet af *Dactylis glomerata*, som nu odlas med hvitfläckiga blad, är väl också en slags bleksots-patient, som genom sjelfva förökningssättet qvarhålls i ett ständigt svaghetstillstånd.

Har nu blomsterodlaren en gång lärt sig de konstgrepp, genom hvilka blommornes och bladens färger förändras, så är det väl äfven tänkbart, att han i någon mån har i sin magt att öka eller minska de naturliga tendenserne. Men svårigen torde man med fog ifrån dessa förändringar kunna deducera någon egen vextens benägenhet till utbildande af nya former. Den

moderna läran om *förklädnad*, enligt hvilken arten skulle äga förmåga att ikläda sig särskilda färger och färgteckningar, hvilka för den kunde vara gagneliga, skyddande mot faror o. s. v.; — torde nog hvila på en mycket osäker grund.

Det gifves vidare bland vexterne åtskilliga andra slag af variationer, som här och hvar anträffas i den fria naturen, än tillfälligtvis, än ofta återkommande hos samma vext; afvikelser, hvilka konsten lärt sig att fortplanta och detta äfven hos sådane arter, der en dylik förändring svårligen kunde väntas. En sådan af mera egendomlig art förete de nu i kultur ofta förekommande träd med hängande grenar. Hos björken, som i allmänhet har fina spensliga grenar, synes en sådan förändring vara likasom mera naturlig och äfven lättare kunna uppstå genom blotta grenarnes förlängning och tilltagande tyngd. Men i kultur förekomma jemväl flera andra träd (häng-)ask, (häng-)bok m. fl.), hvilka normalt hafva upprätta och styfva grenar.

Det är nogsamnt känt, att *Ilex aquifolium* lätt skiljes från nästan alla andra vexter genom sin egendomliga bladform. Men man har former deraf, hos hvilka bladen afvika än genom fullständig brist på taggar i bladens kanter, än genom att hafva flera rader af taggar, och äfven på bladens yta. Endast genom att med konst bereda afläggare, hvilka bibehålla stamståndets egendomligheter, kunna dessa egendomliga afarter fortplantas till nya stånd. Den vanliga stamarten fortplantas lätt genom frö.

Hos andra buskar och träd känner man andra slag af variationer; några utmärka sig genom blad af enklare form, andra genom blad, som äro djupare inskurna, eller flera gånger delade än hos de normala formerne. Ut i beskrifningar på trädgårdsformer uppräknas sådane förändringar såsom *simplicifoliae*, *asplenifoliae*, *laciniatae*, *pinnatifidae* o. s. v. De förekomma ofta så starkt afvikande ifrån artens normala form, att de väl kunde antagas utgöra egna arter. Ett af de äldsta exemplen på denna slags afarter känner man hos flädern (*Sambucus nigra*, *laciniata*). Såsom analoga former af boken uppräknas *Fagus heterophylla*, *F. laciniata*, *F. asplenifolia*, *F. salicifolia* o. s. v.

Äfven hos almen finnas afarter af olika slag, om hvilka det uppgifves, att de vid frösadd icke bibehålla sig oförändrade. Om flera eller färre af de uppgångne plantorne bibe-

hålla afartens egendomlighet, så återga andra, och väl oftast de flesta, till artens normala form, under det åter andra kunna bilda nya mellanformer.

Af vissa träd förekomma dvergformer, som stundom derjemte utmärka sig genom andra egendomligheter. Hos *asken* förekommer en sådan dvergform, som har egendomligt lacinerade och krusade blad. Om en liknande afart af bok (*Fagus cristata*) antager Loudon utan tvekan, att den endast är en monströs form.

Det torde förnämligast vara former af här sednast betecknade slag, som stundom upptagits sasom egna arter (*Sambucus laciniata* Retz.), och väl företrädesvis kunde såsom »begynnande arter» med något fog anföras. Jag skall således tillata mig nedanför något mera i detalj till dem återkomma.

Vexternes blommor betraktas vanligen såsom tillkomne genom en metamorphos af delar, hvilka skulle haft annan anordning, andra former och andra functioner, såvida denna metamorphos icke försiggått. Äro organerne i blomman ombildade blad och axelpartier, och genomföres metamorphosen hos olika arter än mera, än mindre fullkomligt, så låter det väl tänka sig att metamorphosen, om ock tenderande till en viss för typen normal bildning, dock kan i vissa fall vara genomförd mer eller mindre fullkomligt, och på ett från den normala typen mer eller mindre afvikande sätt. Några exempel må anföras:

Den form af blomstret, som väl i allmänhet anses för en vigtig character hos Umbellaterne, och som äfven gifvit gruppen sitt namn, uppkommer utan tvifvel genom en på eget sätt genomförd ombildning af stam och grenar. Vanligast förekommer väl blomstret under form af *dubbel umbella*; dock förekomma arter, der metamorphosen likasom endast delvis är genomförd, der de enkla umbellerne sitta hvar för sig på relativt oombildade grenar. Sjelfva denna olikhet anses ofta characteristisk för olika släkten. I andra fall kan man få se att hos samma art (*Archangelica* och *Ferula*), der den dubbla umbellan förekommer nästan alltid skarpt utpreglad, den tillfälligtvis kan antaga form af en förlängd panicula, der på en genomvuxen stam, blomstren sitta i verticiller på sina långa blomstjelkar. Det synes mig som i detta fall den abnormal formen måste tydas, icke såsom någon artens tendens till varie

ring, utan sasom en tillfällig ofullkomlighet i genomförandet af den för gruppen typiska metamorphosen.

Hos umbellater och andra vexter, som hafva ett snarlikt blomster, äro kantblommorne stundom utbildade på annat sätt än de inre blommorne. Hos *Snöbollen* och *Hortensian* utgöres hela blomstret af blommor, som hafva kantblommornes form. Afvikelsen torde antyda en egendomlighet i metamorphosens genomförande. I närmaste analogi härmed förekommer hos Syngenesisterne disk- och kantblommor förändrade, än så att nästan alla blommor utbildas till diskblommor, än nästan alla till kantblommor. Näppeligen torde dylika olikheter kunna antagas sasom bevis för någon artens benägenhet att variera.

Den metamorphos af bladdelar, hvilka ingå i blomman, genomföres jemväl hos olika vexter mer eller mindre fullständigt. Om man hos några (törnrosen) i de yttre calyxflikarne ännu spårar, mer eller mindre tydligt, de ometamorphoserade bladens form, så hafva deremot hos de flesta andra vexter calyxflikarne en från de ometamorphoserade bladen mer eller mindre afvikande bildning. Så t. ex. hos Papaver-arterne; men det finnes en form (*P. bracteatum*), der den, som vanligt, på en längre blomstjerk höjda blomman omslutes af fullkomligt bladartade delar. Den ovanliga formen har utan tvifvel uppkommit derigenom, att metamorphosen i de yttre delarne icke är lika fullkomligt genomförd, som hos andra Papaveraceer¹⁾. Hos den vanliga tulpanen förekommer icke sällan, att en eller flera af de perigoniala bladen sitta nedanför blomman, och då ofta både till form och färg mera öfverensstämmande med de vanliga bladen.

De många förändringar i blommans form och utbildning, som ofta förekomma i ett och samma syngenesist-blomster, blifva hos många andra vexter characteristiska för familjer eller släkten o. s. v. För *Caprifolium* och *Linnæa* är den symmetriska blomformen karakteristisk; hos flera *Lonicera*-arter kallar man väl oftast blomkronan regelbunden. Hos *Lonicera alpigena* kan man hos blommor af en och samma buske få se de tydligaste öfvergångar emellan båda. Jemte olikheten i form, finnes ofta i den symmetriska blomman den egenhet, att den ene ståndaren antingen aldeles abortierar,

¹⁾ Huruvida *P. bracteatum* är en från *P. orientale* skild art, torde måhända kunna betvivlas. Bracteorne hafva synts mig stundom mera, stundom mindre utvecklade, och saknas väl äfven stundom.

eller är på ett eller annat sätt missbildad, och att af de 4 återstående det ena paret är kortare än det andra, eller kan felslå o. s. v. Om ock dessa blommans olikheter synas vara mycket constanta inom vissa typer, så finnas andra, der de äro sammanförde i samma blomster (*Syngenesisterne*); och åter andra, der man mellan de extrema formerne finner talrika mellanformer (*Caprifoliaceæ*); hos de flesta sträcker sig den symmetriska ombildningen äfven till ståndarne, hos andra (*Synanthereæ*) förekomma dessa oberörda i vissa fall, aldeles försvunna i andra (*Centaurea*). Alla dessa olikheter antyda väl endast gradationer i metamorphosens genomförande, och dessa gradationer äro, likasom andra olikheter hos olika vexter, än constanta, än utgöra de tillfälliga afvikelser från den normala bildningen. Likasom väl ingen betvivlar, att de så kallade dubbla blommorne (hos *Cruciferæ*¹⁾, *Papaveraceæ*, *Ranunculaceæ* m. fl.) äro monströsa bildningar, så var för visso äfven Linnés *Peloria* en tillfällig, genom abnorm metamorphos uppkommen form af *Linaria vulgaris*²⁾.

Det gifves slutligen ett eget slag af abnorma bildningar, hvilka oftast, både genom sin från modervextens afvikande form och hufvudsakligen genom könsdelarnes missbildning, likasom angifva sig sjelfve såsom monströsa former. Först uppvuxne ifrån frö, som tillkommit efter befruktning med pollenkorn af annan art, sammanfattas de vanligen under en gemensam benämning af *Hybrider*.

Ofvanför har redan blifvit antydt, att Linné under en period ansåg korsning mellan olika arter såsom ett medel för nya arters frambringande; men att han sednare tviflat derpå, och måhända till och med slutligen öfvergifvit denna mening. Å andra sidan tyckes det framgå af det jemväl ofvanför anförda yttrandet af Mohl — som utan tvifvel kände både de många efter Linnés tid gjorda försök med korsningar emellan olika arter och de åsichter som deraf framkallats — att äfven han tyckes hafva antagit, att nya vextformer kunde mera allmänt på detta sätt bildas. Det torde således väl förtjena öfvervägas i hvad mån en sådan åsigt kunde numera vara berättigad.

¹⁾ Ut i Cruciferernes fyllda blommor försvinna vanl. könsdelarne, så att man efter sådana aldrig får frö (*Dan. Mueller l. c. p. 608*).

²⁾ Om *Pelorian* uppgifves (*Hartm. fl. p. 108*) att den oftast förekommer höstetiden på afbetade eller afhuggna exemplar, som skjutit nya grenar från stjelkens bas; och att på dessa så väl normalt bildade som abnorma blommor merendels förekomma i samma blomklase.

Det torde, för bedömande af denna fråga, i första rummet böra erindras, att man genom mångas sammanställande observationer, anställda på ett stort antal Fanerogama växter af de mest olika familjer, tror sig fullkomligt känna den invecklade mekanism, som befruktnings-processens normala fullbordande förutsätter. Man vet att pollenkornen hafva sina bestämda former, som kunna vara mycket olika hos olika växter; att jemväl pistillens vid befruktningen medverkande delar äro hos olika växter mer eller mindre olika: i stigmats beskaffenhet och läge; i structur, konsistens och längd hos den ledande cellväf, som pollenkornets rostell skall under sin utveckling följa; befruktningspunkten på gemnulan, som rostellens spets måste uppsöka, har hos olika växter mycket olika lägen; och slutligen torde det väl kunna antagas, att både fovillans beskaffenhet och konsistensen af de membraner, den skall genomtränga, hafva på möjligheten af befruktningens fullbordande ett viktigt inflytande. Redan i dessa förhållanden torde man finna icke så ringa sannolikhet för antagandet, att befruktning mellan olika vextarter måste vara både inskränkt inom vissa trängre gränser, och relativt till den normala väl äfven mera sällan förekommande. Också äro väl de vextformer, som mera tydligt synas angifva sig sasom hybrider, relativt sällsynta, under det vi i trädgårdar och på sädesfälten se de genom fröarligen framkommande generationerne af nya individer städse återgifva modervextens former, med de små (individuella) modificationer, som hos olika individer kunna förekomma.

Emedlertid kan det icke förnekas, att hybrider förekomma; med konstens tillhjälp kan till och med lätteligen inom vissa släkten korsning emellan olika arter åstadkommas; under det inom andra alla försök i detta afseende misslyckats¹⁾. I hvad mån åter den förekommer i den fria naturen, och hvilket inflytande den der kan äga på formernes mångfaldigande, derom kunna mycket olika uppfattningar spåras hos författarne.

De båda med afseende på bastard-bildning inom vextriket främste auctoriteterna, *Kölreuter* och *Gärtner*, skrefvo sina berömda arbeten utan kännedom om den complicerade mekanism, som tjänar för befruktningens normala fullgörande hos

¹⁾ Hos D. Müller heter det: många genera t. ex. Amaryllider, Fuchsier, Calceolarier, Pelargonier, Cacteer m. fl. hafva stor benägenhet till korsning; hos andra, t. ex. *Reseda alba* och *R. odorata*, har den ännu ej lyckats.

vexterne ¹⁾. De synas hafva antagit, att det var pistillen i sin helhet, och icke gemmulæ hvar för sig, som befruktades. När de, och i sednare tider andra (Darwin), tala om en *relativ* sterilitet, eller en *större* fertilitet, antydd genom färre eller flera utvecklade frön, så grunda sig måhända sadane uttalanden på en missuppfattning af den antyddas beskaffenheten. Också torde väl flera af de motsägende resultat, som framgingo af olika korsningsförsök, finna sin förklaring deruti, att olika gemmulæ inom samma ovarium kunnat blifva befruktade af olika pollen.

Det torde kunna antagas såsom allmän regel, att bastarderna mer eller mindre afvika från de stamplantor, som frambringat dem. Ofta utmärka de sig genom blommornes storlek och färger, och härigenom måhända antydande någon analogi med de vanligen så kallade dubbla blommorne, hos hvilka blommans yttre delar få en starkare utveckling, som det kunde tyckas, på bekostnad af de inre väsendtligare organerne, hvilka än aldeles förtryckas, än missbildas och ofta förblifva sterila.

Det har redan ofvanför blifvit antydt, att Linné antog, måhända hufvudsakligen på grund af förhållandet hos den hybrida form, som han beskref under namn af *Veronica spuria*, att hos hybriden de yttre delarne mera närmade sig den stamplanta, hvarifrån pollenet tagits, under det att de viktigare fructificationsdelarne närmast öfverensstämde med moderplantans. D. Müller uppgifver, att de genom korsning frambragta plantornes blommor likna till färgen mera fadrens, till formen mera moderns blommor. Det torde framgå af Kölreuters försök, att han ansåg hybriden resultatet af en korsning emellan 2:ne arter — utfalla mer eller mindre olika, allt efter som den ena eller andra arten antingen begagnades som moderplanta eller lemnade pollen till befruktningen. I motsats härtill drog Gärtner af sina mycket talrika försök den slutsats, att bastarder, som uppkommit genom *korsning*²⁾, sålunda att i ena fallet en arts pistill befruktats af annan arts pollen, i andra fallet den

¹⁾ Gärtners bok om bastardbildningen angifves vara en omarbetad upplaga af ett föregående (prisbelönt) arbete. Oaktadt både *Amicis* och *Brongniarts* observationer öfver foeundationsprocessen hos vexterne deri blifvit citerade, så antyda, som det synes mig, många ställen i den nya upplagan, att dessa blifvit reproducerade från det äldre arbetet, utan att de nyare observationerne dervid rådfrågats.

²⁾ Gärtner använder termen *korsning* på här anförda sätt; många andra, och kanske de flesta, som skrivit om hybrider, förstå med korsning hvarje öfverföring af pollen från en art till pistill af annan art.

sednare artens pistill befruktats af den förras pollen, blifva hvarandra fullkomligt lika. Detta är, säger han, den allmänna regeln hos nästan alla vexter, men företrädesvis då försöken göras med rena arter, sådane de förekomma i den fria naturen. Härigenom skulle bastardbildningen inom vextriket afvika från den inom djurriket förekommande, och han söker förklaringen för denna olikhet deruti, att hermaphroditismen är förherskande hos vexterne, men könen äro skiljde hos djuren, och att hos dem de olika könen, utom olikhet i könsdelarne, jemväl äga vissa andra olikheter.

Såsom characterer, hvarigenom bastarderne hos vexterne vanligen utmärka sig, angifver Gärtner: att de väsentligaste förändringarne drabba de masculina organerne; man ser sålunda ståndarnes antal ofta vara större hos bastarderne än hos stamarterne; om ock ståndarne till yttre form och storlek ofta förekomma normala, sakna de dock den befruktningskraft, som tillkommer de rena arternes; oftast äro de, hos olika individer mer eller mindre, äfven till det yttre, abnorma, så att man redan härutaf kan sluta till deras impotens; antherans dehiscens är ofta bristfällig, och många antherer krympa tillsamman utan att öppna sig; om pollenkornen, den viktigaste delen vid befruktningen, hade redan Kölreuter anmärkt, att de delvis äro oregelbundna, hopkrympta och likasom söndersprungna; oftast utgöra de oregelbundet bildade pollenkornen den vida öfvervägande massan; och hos bastarden är olikheten i gestalt och storlek inom samma anthera vida större än hvad som kan vara fallet hos de rena arterne; sjelfva innehållet i pollenkornet är mycket olika hos bastarderne; äfven hos de potentia är det ringa, oftast felas det alldeles och pollen synes torr; när pollenkornet hos bastarden har normal gestalt och storlek, innehåller det vanligen en oljaktig substans, men är dock ofta impotent. Om de feminina organerne uppgifver han, att de till sin yttre form knappast kunna skiljas ifrån de rena arternes, så att bastardblommans conceptionsförmåga nästan endast kan utrönas genom direkta försök; han anmärker dock, att en bastards oförmåga ofta spåras i äggens ofullkomliga utveckling; men att detta dock icke alltid är förhållandet; hos de fullkomligt sterila bastarderne synas alla gemmulæ vara ofullkomligt utvecklade; hos delvis fruktbara kunna de ofullkomligt utvecklade vara blandade med andra, som hafva utseende af att vara sunda. Ett sådant äggens sjukliga utseende (tillägger han

p. 344) förekommer i alla hybrida blommor, äfven hos de fruktbaraste arter, så att i deras frukter det normala antalet af grobart frö aldrig utvecklas, utan dessa förekomma blandade med outvecklade gemmulæ, jemte det att aldeles tomma pericarpier hos dem förekomma. I ett följande kapitel yttrar han (p. 383—4) att fruktbarhet hos frukter och frö är ett attribut, som hos vexterne är bundet vid de rena arterne, der dessa förekomma i friskt tillstånd och under naturliga förhållanden: hos bastarderne ater är fruktbarheten en oviss och föränderlig egenskap; dervid så väl gynsamma som skadliga förhållanden inverka, likasom hos arterne, men hos bastarderne på ett verk-sammare sätt. På ett annat ställe (p. 390) heter det: Kölreuter har således icke orätt, då han förklarar de flesta bastards frö för ofruktbara: men, tillägger Gärtner, icke alla bastarder äro ofruktbara på samma sätt.

Af Kölreuters redogörelse för sina försök framgår, som det synes mig tydligt nog, att äfven han gjort sig reda för pollenets missbildning hos de hybrida vexterne, och att han på grund deraf skiljde emellan fertil och steril pollen, så att han redan efter sitt första försök kunde förklara, att den hybrida vexten vore fullt utbildad i öfriga delar, men att dess pollen-korn vore tomma och följaktligen sterila. Men da Kölreuter synes icke haft någon aning om pollenkornets inverkan medelst rostellen, utan antog att befruktningen skedde genom en utstrålning af det föecunderande ämnet från de på pollen-kornen ofta befintliga små utvexterne: och då hvarken han eller sannolikt Gärtner, då han gjorde sina försök, ännu hade ens en ytlig kännedom om sättet, hvarpa föecundationen vidare genomföres hos vexterne, och framför allt icke derom att hvarje ovulum befruktades särskildt, så lag det för dem nära tillhands att antaga en gradation i fertiliteten hos pollen-massorne, till förklaring af de olika resultat som olika korsnings-försök lemnade: och att anse utvecklingen af flera eller färre frön såsom bevis för en större eller mindre fertilitet hos den hybrida stamplantan. Känner man deremot nu, att möjlighet, och i många fall sannolikhet, förefinnes för att olika ovula inom samma ovarium kunna befruktas af pollen-korn som tillhört olika blommor, så ligger det måhända nära till hands att heldre söka förklaringen för de olika resultat, som experimenterne lemnat, i andra antaganden. Har en castrerad blomma, eller blomman på en hybrid vext, blifvit befruktad med pol-

len, som tagits från en hybrid, så är det utan tvifvel möjligt att, oaktadt nämnda pollen icke utöfvade större inflytande än om pistillen belades med oorganiskt stoft, samma pistill dock kan utveckla ett eller annat fertilt frö, såvida tillfälligtvis, genom vind eller insekter, fertila pollenkorn tillförts densamma. Kölreuter, som för visso icke önskade betydelsen af sina försök i nagon mån underskattad, yttrar sjelf (*Vorläuf. Nachricht. p. 44*), efter att hafva meddelat resultatet af sina första hybridicerings-försök: utom af dessa, har jag af andra vexter, genom en sådan onaturlig korsning, erhållit frö, som efter deras yttre utseende varit fullt utbildade; *men emedan jag icke med full säkerhet kan förneka att egna pollenkorn jemväl fungerat*, så vill jag icke vidare derom uttala mig. Äfven Darwin har fäst uppmärksamhet på, att icke heller Gärtners försök utelöto möjligheten af en sådan tydning.

Vill man genom experiment söka afgöra frågan om hybridernes förmåga att genom frö fortplanta sig, så maste det väl vara tydligt, att experimentets bevisande kraft för ett positivt resultat maste hvila på förutsättningen, att befruktning på annan väg blifvit på det sorgfälligaste omöjliggjord. Att detta i många fall är förenadt med stora svarigheter, torde väl allmänt kunna erkännas. Man kan borttaga ståndarne på en blomma, och man kan beströ dennas stigma i rikligaste mängd med en annan arts pollen: men om man icke derjemte skiljt den salunda preparerade blomman från beröring af insekter, så finnes naturligtvis möjligheten kvar, att pollenkorn af samma art kunnat tillföras den castrerade blomman. Om man är viss på, att flygande insekter (humlor och bi m. fl.) blifvit behörigen utestängde, så kan man likväl svarligen vara säker på att jemväl hafva utestängt alla dessa krypande, stundom microscopiska insekter, som man så ofta finner i blommornes inre, nästan närhelst man undersöker dem, och ofta redan innan de äro fullt utslagne. Det förekommer mig, som man af sjelfva redogörelserne för de gjorda korsnings-försöken kunde hafva nagon befogenhet att sluta, det nödig försigtighet i nämnde afseende näppeligen kunde anses alltid iakttagen.

Om man erkänner att en bastard, som uppkommit efter en första korsning emellan 2:ne olika arter, oftast, om icke alltid, är steril, men man samtidigt antager att sådan bastards aflöda i sednare led kan blifva fertil, så torde ett sådant antagande väl böra grundas på aldeles oafvisliga facta. Att det

Darwinska beviset (jfr. Darwin pag. 245 och följ.) härför lem-
 nar mycket öfrigt att önska, torde väl vara tydligt nog för
 en hvar, som vill göra sig mödan att nogare granska detsamma.
 Det förekommer mig som man i första rummet kunde hafva
 rätt att fråga: huru kan en hybrid, som är steril, ändock få
 någon afköda. Menas dermed de nya individer, som kunna
 frambringas genom afläggare, sättqvistar o. s. v., så skall jag
 nedanför söka visa, att det tyckes i andra fall tillhöra nya
 stånd, som frambringas på detta sätt, att de reproducera mo-
 dervexten med bibehållande af dess egendomligheter: en sätt-
 qvist af en dielin vexts hanstånd, blir ett nytt hanstånd; och
 man känner icke att de nya stånd af *Cytissus Adami*, som till-
 kommit på analogt sätt, framkommit med fertila blommor.
 Huru ofta deraf frambringats nya stånd, och huru mycket än
 dessa blifvit kringspredda till olika localer. Menas ater en
 afköda genom frö, som kunde tänkas i särskilda fall komma
 till utveckling, så torde det väl synas mycket osannolikt, att
 om stamplantor, som hafva normalt utbildade fortplantnings-
 organer, vid korsning icke förmå frambringa en afköda, som
 äger normalt utbildade fortplantningsorgan, samma afköda dock
 med sina missbildade organer skulle förmå frambringa en ny
 generation med normalt utbildade delar. Om den första kors-
 ningsproducten är steril, till följe af någon ofullkomlighet i
 pistillen, så torde svarligen kunna antagas, att denna svarighet
 häfdes genom tillkomsten af till och med den fullkomligaste
 pollen; har hybriden af en första generation blott få fullt
 utvecklade ovula, så synes väl föga antagligt att en andra
 generation skulle förmå utveckla flera sadane. Är det vanli-
 gaste förhållandet, att den hybrida afködan endast bildar en
 impotent pollen, så kunde man visserligen tänka sig att en
 någorlunda utbildad pistill kunde befruktas vid en andra kors-
 ning med fullt utbildad pollen från den art, som lemmat be-
 fruktningsämnet till den första; men äfven i detta fall synes
 väl knapt något skäl förefinnas att antaga, det resultatet vid
 denna andra korsning skulle utfalla förmånligare än vid den
 första. Tänkte man sig dessutom denna operation alltjemt
 fortsatt, så torde man väl jemväl böra förutsätta att den
 ursprungliga modervextens andel uti den först bildade hybri-
 den, under de kommande generationerne, blefve alltjemt mindre,
 så att slutligen återstode en vext, som i allo öfverensstämde
 med den ursprunglige fadren. Och de hybrida bildningarne

skulle således icke tjena för det stora ändamål, för hvars utförande de blifvit tagna i anspråk af Darwin och hans efterföljare. Darwin säger (p. 255): Det har redan blifvit anmärkt, att graden af fertilitet, både vid en första korsning och hos derigenom uppkomne hybrider, vexlar mellan *ingen* och *fullkomlig* fertilitet. Det är öfverraskande i huru många olika afseenden denna gradation kan visas förekomma; men endast den yttersta contouren af facta kan här återgifvas. Om pollen från en art af en vextfamilj strös på stigmat till en art af annan familj, så verkar detta pollen icke mera än lika mycket oorganiskt stoft. Från denna fullkomliga sterilitet kan pollen från olika arter af samma släkte, tillförd stigmat af annan art, visa en fullständig gradation uti antalet af frambringade frö ända till fullkomlig fertilitet; och, som vi hafva sett i vissa abnorma fall, äfven till ett öfvermått af fertilitet, utöfver den som artens egna pollen frambringa. Så äfven hos de frambragte hybriderna; der finnas de som aldrig frambragt, och sannolikt aldrig skola frambringa, äfven med användande af pollen från endera stamplantan, ett enda fertilt frö: men i vissa fall kan ett första spar till fertilitet upptäckas deruti, att pollen från endera stamplantan förorsakar att hybridens blomma tidigare vissnar än den annars skulle hafva gjort; och det är väl bekant, att en blommas vissnande är ett tecken till begynnande befruktning. Från denna yttersta gräns af sterilitet hafva vi sig sjelf befruktande hybrider, frambringande ett större och större antal frö, ända upp till fullkomlig fertilitet.¹⁾

Ägde man rätt, att på detta sätt sammanfatta resultaten af de med korsning gjorda försöken hos vexterne, så skulle visserligen dessa med stor fördel kunna begagnas såsom stöd för de Darwinska åsigtene. Men likasom man svarligen numera torde kunna anse utvecklingen af färre frön hos vissa arter såsom någon öfvergång till de hybrida vexternes absoluta sterilitet, likasa torde man väl näppeligen kunna antaga att en

¹⁾ Gärtner (*Bastard Erz.* p. 619) erindrar derom, att man icke allenast stundom kallat ympade individer för *bastarder*, utan jemväl antagit att vid ympningen ympen likasom motsvarade pollenkornt, så att genom den olika ämnen och safter öfverfördes från ett individ till ett annat; genom blandningen af båda skulle sålunda kunna inverkas på form, färg och smak: hvadan äfven uttalats att bastardbefruktning stode i närmaste analogi med ympningen. Gärtner visar tillräckligt tydligt huru högst olika förhållandet är, och tillbakavisar på det bestämdaste hela denna tankegång. — Måhända hvilat ofvan anförde deduction af Darwin på ett dylikt antagande af ympers och oculagers analogi med hybrider.

blommas vissnande hos hybriden är ett första spår till fertilitet hos en steril vext, om också ett sådant vissnande hos den fertila kan vara ett tecken, att befruktningen försiggått. Redan af hvad som här ofvanför blifvit anfördt, efter Kölreuter och Gärtner, om de hybrida vexternes vanliga characterer (ofullkomligt utvecklade könsdelar, och hybridernes allmänna ofruchtbarhet) torde framgå, att resultatet af deras försök näppeligen af dem själfva torde kunna hafva uppfattats på liknande sätt. För mig vill det synas som deras åsigter i detta afseende ginge stick i stäf mot den Darwinska uppgiften.

Gärtner skiljer mycket bestämdt emellan hvad som föregår i den fria naturen och hvad som kan åstadkommas med konstens tillhjälp. Om det är visst, att genom kultur de naturliga villkoren för lifvet mer eller mindre förändras, så kunde det måhända antagas, att likasom konsten har i sin magt att i vissa riktningar öka livsverksamheten — framkalla luxurerande blad, blad med rikare färgprakt, större och olikfärgade blommor — så kunde man kanske ock tänka sig, att den under vissa förhållanden förmådde öka både de rena arternes benägenhet för korsning, och hos hybriderne framkalla fullkomligt utvecklade generationsorganer. Likasom genom vissa konstens tillgöranden blommans och äfven fruktens yttre delar kunna få en starkare utveckling, oftast på bekostnad af deras inre viktigare organer; så vore det måhända tänkbart att, genom andra konstgrepp, äfven fertiliteten skulle kunna ökas, pollenkornets hos hybriderne vanliga impotens kunna förändras, likasom conceptionsförmågan hos deras ofullkomligt utbildade ovula. Det gifves i själfva verket vissa kända faeta, som måhända kunde synas tala för ett sådant antagande.

Är det så, som man väl allmänt antagit, att fosforsyrade salter äro oundgängliga för utvecklingen af sädesarternes frö, så torde väl deraf kunna dragas den slutsats, att sterilitet och fertilitet bestämmas icke uteslutande af foecundations-processens normala fullbordande. Det antages vidare, att konsten har i sin magt, att genom på visst sätt företagen beskärning framkalla en förökad blomning, och genom safternes starkare tillströmning en ökad fruktsättning. Och om så är, så torde det måhända äfven kunna sägas, att fertiliteten kan ökas, förutsatt nemligen att foecundation beredt möjlighet dertill.

Å andra sidan är det väl ganska vanligt, att äfven från hermaphrodita vexters blommor på ett och samma träd en

stor mängd fruktämnen af falla eller vissna bort, under det ett relativt fatal utvecklas vidare. Mellan så kallade goda fruktar komma ofta flera eller färre dåliga. Men likasom hos träd yngre grenar afkastas och äldre vissna bort, så torde man väl ock kunna förutsätta möjligheten af att fruktämnen afkastas, der de i alltför rikligt mått utvecklats, utan afseende på att foecundation der försiggått. Det är väl icke heller så sällsynt, att utvecklade frukter kunna vara tomma (*Ulmus*, *Acer*). Hos liljevexter, som fortplantas genom nya lökar, hos *Allium*-arter och andra som fortplantas genom bulbiller, utbildas väl sällan frukter och frö, huru rikligt de ock må hafva blommat. Man torde af sådana förhållanden väl böra draga den slutsats, att sterilitet, absolut eller relativ, kan förefinnas äfven hos de rena arterne.

Redan Linné anmärkte, att vexter odlade under mer eller mindre abnormala förhållanden sällan satte frukter. Gärtner fäster jemväl uppmärksamhet derpå; och Darwin (p. 264) säger, att han har samlat en mängd facta, som antyda att djur och vexter, hvilka lifva under icke naturliga förhållanden, hafva benägenhet att få organerne för det reproductiva systemet väsendtligt förändrade. I allmänhet ser man väl ock vexterne i våra vexthus, och äfven de rikast blommande, sällan sätta frukter. Men samma Orchidé, som, här lemnad åt egna utvägar, icke sätter frukt, har jag sett med väl utbildad frukt, efter det dess egna pollenmassor med konst öfverförts till stigmat. Det kunde således synas, som vore det den mekaniska hjälpen af yttre förhållanden, och väl vanligast vind eller insekter, hvilken, enär den saknades i vexthuset, kunde antagas vara vållande till den der vanliga steriliteten.

Det förekommer mig, som man af dessa förhållanden visserligen vore berättigad sluta, att fertilitet, der den förefinnes enligt naturens ordning, kan ökas och minskas; men dermed är väl ännu icke bevisadt, att fertilitet kan med konstens tillhjälp förvärfvas, äfven der den enligt naturens ordning synes saknas. I hvad mån konsten skall lyckas, att i denna riktning förändra naturens ordning, derom skall jag icke tillata mig något omdöme: endast må det vara tillåtet anmärka, att hvad som sålunda åstadkommes genom konst lika litet här kan blifva bevisande för uppfattningen af hvad som föregår i naturen, som man af safternes abnormalt utbredning, vid kopp-

ling af olika träds grenar, är berättigad draga slutsatser om hvad som annars synes vara lag därför.

Om, och i hvad mån, bastardbildning förekommer och är allmän i den fria naturen, derom hafva visserligen olika åsigter blifvit uttalade. Och onekligen finnas förhållanden hos vexterne, som väl kunde anses befrämja deras bildning och förklara en deras allmännare förekomst.

Chr. K. Sprengel (*Ent. Geh. der Natur* p. 29—30), som mera än de fleste sysselsatt sig med befruktnings-inrättningarne hos vexterne, yttrar: »Om ett honträd af poppeln skall befruktas af ett nära befintligt hanträd, så måste detta bereda vida mera pollen än som kunde vara nödvändigt för samtliga de foeminina blommornes befruktning, ty vinden blaser icke alltid i den därför nödiga riktningen, och mycket pollen nedslås med regn. När de foeminina blommorne af en *Carex* skola befruktas af det från de ofvanför sittande maskulina nedfallande frömjölet, så faller största delen utanför: följaktligen måste vida mera pollen finnas än som är nödig för befruktningen, och detta bekräftas af erfarenheten. Hos tallen utkastas frömjölet och kringföres med vinden i sadane massor att, såsom folket tror, det stundom formligen regnat svafvel. Man skulle af dylika förhållanden hos många af de diclina vexterne väl vara böjd antaga, att hos dem korsning lättare skulle kunna uppkomma än hos de flesta andra vexter, och att, om det lage i naturens plan att på detta sätt mangfaldiga formerne, hybrider af dem företrädesvis borde förekomma. Dertill kommer att, enligt Gärtners erfarenhet, de flesta sadane vexter hafva en längre blomningstid, och i synnerhet de foeminina organerne en längre vidhallande conceptions-förmåga än de hermaphrodita vexterne; och dock, säger Gärtner, som väger andras och egen erfarenhet mot hvarandra (p. 123), är förhållandet det motsatta: überdies gelingt die Bastardverbindung bei diesen Gewächsen weniger leicht und seltener (ausser unter Varieteten) als bei den hermaphroditischen Gewächsen (p. 224). Med afseende på de hos *Salix*-arterne ofta antagna bastarderne yttrar han, att icke en enda, genom korsning med konst åstadkommen, hybrid vore honom här bekant: hvarigenom, enligt hans mening, det enda säkra beviset för deras bastard-natur vore lemnadt (p. 124).

Redan Linné antog, att insekter utförde en vigtig role vid särskilda vexters befruktning; och Chr. K. Sprengel har

sedan, uti ett vidlyftigt arbete derom, nedlagt resultaterne af mångåriga och, som det tyckes, med största noggranhet anställda observationer öfver insekternes tillgöranden vid blommornas befruktning. Han redogör på det nogaste för en stor mängd blommors olika structur; för sättet huru insekten placerar sig på blommor i olika ställning; huru blommans lysande färger och färgteckning likasom visa vägen för den besökande insekten till utfinnande af dess saftbehållare: huru vissa vexter äga saftblommor, andra icke, under det några hafva utseende af att vara saftblommor, men äro det icke på vanligt sätt; han anmärker huru särskilda blommor lämpa sig genom sin säregna byggnad för sådan befruktning, och särskilt har han på det nogaste beskrifvit den invecklade apparat för befruktningen, som Orchidé-blomman företer och huru väl den tjänar för sitt ändamål; han har äfven särskilt anmärkt (*Ent. Geh. p. 409*) huru insekter stundom bära på sina hufvud pollenmassor af orchideer, likasom till bevis för sin förmåga, att kunna från den ena blomman till den andra kringföra dessa pollenmassor: han fäster uppmärksamhet på, att vissa blommor synas omöjligen kunna befruktas af samma blommas egna pollen, och att dessa, som redan han kallar *dichogama*, erfordra insekternes biträde vid befruktning. Sprengel kände sålunda de hufvudsakliga förhållanden (och var väl den förste som redogjorde derför), hvilka i sådant afseende återopas hos nyare författare; han tillade sina observationer den största vikt, och förringade för visso icke insekternes betydelse för vexternes lif. Sjelfva titeln på hans arbete: *Das entdeckte Geheimniss der Natur im Bau und in der Befruchtung der Blumen* torde väl kunna återopas såsom bevis härför. Men redan det förhållandet, att han på det nogaste redogör för huru blomman har sin för hvarje art bestämda architectonik, hos några tydligen afpassad för *visst* slag af insekter, hos andra lämpad för besök af flera olika insekter, under det att andra blommor icke äga den nectar-afsöndring, som utgör lockbetet, och således icke heller besökas af insecterne; äfvensom de här och hvar förekommande uttalanden i hans för sin tid ovanliga arbete torde tillräckligen antyda, att han i dessa förhållanden såg bevis för en öfver allt herskande regelbundenhet och en bestämd plan i skapelsen; och med denna uppfattning skulle det väl icke hafva stått rätt väl tillsamman, att anse naturens fastställda ordning kunna förändras genom hybridiseringar.

Hvad särskildt vidkommer Orchideerne, så anmärker redan Sprengel, att minsta delen af dem i naturen sätta frukt. Gärtner synes icke blott hysa tvifvel, huruvida vissa former af Orchideer, som antagits vara hybrider, verkligen tillkommit genom korsning (p. 117); utan han anför Orchideer, jemte Apocyneer och Aselepiadeer bland de vexter, hos hvilka en hybrid befruktning nästan torde anses såsom omöjlig. Och vore det verkligen så, att hybrid-bildning underlättades genom insekter, som öfverförde den ena artens pollen till andra arters pistiller, så borde man väl företrädesvis hos Orchideer vänta hybrida bildningar, hvilka genom sina rotnölar borde fortleva och såhunda väl upptagas såsom variationer i de olika ländernes Floror. Men detta är så långt ifrån förhållandet, att det torde vara få vextfamiljer, der man antagit så få variationer; endast hos ett par arter uppräknar Koch i Flora Germanica några få variant former; och de arter som nu upptagas i den svenska floran, de voro kända redan af Linné, med undantag af några få, sällsynta och på aflägsne lokaler förekommande arter.

Huru nära således det synes ligga till hands, att anse insekter krypande eller flygande från den ena blomman till den andra, och bärande än spridda frömjöls-korn än hela pollinarier från blomman till blomman — såsom medel för korsning och frambringandet af hybrider i den fria naturen, så synes detta dock icke bekräftas af redan vunnen erfarenhet.

På grund af sina undersökningar om bastarders tillkomst i den fria naturen (utan medverkan af konst) anser Gärtner sig kunna antaga:

1:o Att bastard-befruktning förekommer endast hos en eller annan blomman af mycket få vexter.

2:o Att endast få, der förekommande, vexter kunna utan tvekan antagas såsom hybrider; att de flesta, som bastarder ansedda, äro det icke; de utgöras antingen af skildja arter, eller af varieteter.

3:o Bastarderne kunna icke föranleda någon ändring i naturens normala förhållanden, eller någon förvirring med afseende på rena arter, enär de icke hafva bestånd; och bastard-befruktning måste ligga under för den genom stam-arterne åstadkomna.

4:o Hybrid-bildning ligger icke i naturens plan, enär den endast tillfälligtvis och sällan förekommer.

5:o Om en bildning af nya arter pågår i naturen, så kan den aldrig ske genom bastard-bildning; enär sträfvandet att återgå till artens urtyp är omisskänneligt.

6:o Den genetiska härkomsten af i naturen uppkomne bastarder kan endast hypotetiskt bestämmas efter utseendet, emedan icke könet hos endera stam-arten, utan artens typiska öfvermakt ger präglet åt bastardens form, och vid korsning (ömsesidig) fullkomligt lika typer uppkomma (Jfr. *Gärtner Bastard Erzeug.* p. 599).

e) *Variabilitetens betydelse för uppkomsten af nya arter.*

I det föregående har jag sökt visa, att många olika former, som förekomma hos vexterne, och af hvilka de flesta ofta upptagas under en gemensam benämning af variationer, utgöra bildningar af mycket olika beskaffenhet och väl äfven hafva olika betydelse. Att sammansla dem alla, och uppsumera dem i ett enda *facit*, för att genom dettas storlek få bevis för formernes föränderlighet och arternes obestämdhet, torde icke böra anses utgöra en tillfredsställande bevis-föring för ett sådant resultat.

Ingen lär väl hålla före att vissa abnorma bildningar, som utan tvifvel äro rena sjukdomsformer, kunna utgöra något uppslag till en ny art. Galläplebildningen och andra af parasiter förorsakade utvexter framkallas tydligen genom ett i vexten infördt främmande ämne, som oskadliggöres genom ett rikare tillströmmande af vextens egna safter, och ett deraf föranledt hopande af abnorma delar.

En stor del af de vexter, som vi odla i trädgårdar och på åkern, mer eller mindre förändrade ifrån deras vilda stamplanter, äro jemväl, om icke egentliga sjukdomsformer, dock ett slags abnorma eller patologiska tillstånd, som framkallats genom kultur, och äga bestånd så länge de odlas under mer eller mindre onaturliga förhållanden. Linné uttalade, utan all tvekan, att likasom de flesta variationer uppkommit genom kultur, så lemna också odlingsförsök, medelst frö, det säkraste medel att pröfva deras betydelse. Likasom vexter odlade i rikare jordmän utbildade sig i luxurierande former, så antog han att kulturformerne återgingo, när de såddes i magrare jord. Men när han uttalade detta såsom allmän regel, så medgaf han, att en viss benägenhet till ärftlighet äfven hos kultur-

formerne kunde äga rum, och han fordrade således att de generation efter generation borde utsas på den magrare jorden. Samtidigt protesterade han på det bestämdaste emot en redan på hans tid uttalad förmodan, att de vanliga sädesarterne voro olika kulturformer, som på magrare jord degenerade, hvete till korn, och äfven korn till hafre. Det förekommer mig som man väl kunde hafva skäl betvifla, att hvad Linné sålunda uttalat blifvit vederlagdt af sednare tiders erfarenhet, eller att andra genealogier, som man nu ofta brukar med några penn- drag uppgöra, hvilat på säkrare grund än de af Linné tillbakavisade ¹⁾).

Att rent monströsa bildningar än mindre böra anses hafva någon betydelse sasom förbildningar till nya arter, derom torde väl icke heller några olika meningar förefinnas.

Att i den fria naturen hybrider tillfälligtvis kunna uppstå, kan väl icke bestridas; men att både korsningar der äro sällsynta, och att de på sadant sätt uppkomne hybriderne hafva ringa betydelse för uppkomsten af bestående former, synes mig framgå af de mäns yttranden, som på grund af den rikaste erfarenhet hafva företrädesvis haft rätt att uttala en bestämd mening i denna mycket omskrifna fråga.

Att i konstens verkstäder korsningar i många fall kunna astadkommas, och hybrider uppstå, må därför icke nekas. Här kan konsten sätta i stället mycket som brister i naturen, både vid valet af bäst utbildade organer och sammanförandet af de nödiga delarne vid tjenligaste tid. Men icke bevisar väl denna konstens förmåga att frambringa resultat, som synas stå i strid med naturliga förhållanden, i sadane fall mera, än då den kan förma safterne inom stympade och koplade vexter att utbreda sig i riktningar, som äro motsatta de naturliga.

Relativt till frambringandet af artens naturliga afköda, huru sällsynta äro icke de former, som kunna förmodas vara hybrider! Från de tusental af frö, som under en lång följd af år utdelats ifrån de botaniske trädgårdarne, huru många plan- tor hafva väl uppspirat, som med fog kunnat anses vara af

¹⁾ »Wenn wir es nicht aus der Erfahrung wüssten, so würden wir mit gleichem Recht annehmen dürfen, dass aus der Kaulquappe ein Fisch als ein Frosch hervorgehen werde, und ein in der Amöben periode gelebt habender Vertreter der Transmutationstheorie würde es mit aller chemischen, histologischen, physiologischen und philosophischen Erkenntniss der Amoebe nicht angesehen haben, ob sie einen Eichbaum oder einen Columbus zu ihren Descendeuten haben werde» *Wigand Darwinismus II* p. 224.

hybrid art, ehuru korsningar väl kunnat väntas lätt nog ske emellan de många närsläktade arter, som på rabatterne stått jemte hvarandra! Och om man, inom vissa släkten, ifrån formernes yttre utseende ofta dragit slutsatser om hos dem uppkomne hybrider, manne bevisen därför äro höjde öfver hvarje tvifvel? Släktet *Salix* har ansetts tillhöra dem, hos hvilka hybrida bildningar ofta skulle anträffas i naturen; och likväl har Gärtner derom särskildt anmärkt, att det här icke ens med konst lyckats att frambringa en verkligt hybrid form.

Man ser ofta hänvisas till hybrid uppkomst vid försöken att tyda genealogierne för våra vanliga fruktträds talrika former. Så uppgifves, att de många olika äpplesorterne icke härstamma ifrån en enda art, utan från 3, 4 eller 5 olika *Pyrus*-arter, hvilka hybridiserat med hvarandra. Om körsbären uttalas det vara säkert, att de härstamma från 2:ne, väl skiljda arter: *Prunus avium* och *Pr. Cerasus*, hvilka sins emellan bildat en mängd hybrider. Om *plommon* och *krikon* säges det att äfven mellan dessa hybridisering i stor skala försiggått. Då det icke är vanligt, att hybridisering ökar den fruktbarhet, som man vid odling af fruktträd väl gerna vill framkalla, hafva dessa uppgifter föranledt mig efterse hvad kände auktoriteter äfven i detta afseende uppgifva. Om päronets otalige variationer säger Wildenow (*Baumzucht*), att de skilja sig ifrån hvarandra både i form och smak; men att vid uppdragning från frö öfvergå de alla till stamarten (det vilda päronet), och att de endast äro genom klimat och jordmån frambragte kulturformer. Om äppleträdet säger han, att trädet kan förökas genom frö, men att varieteterna endast fortplantas genom ympar och oculager. Om *Prunus Cerasus* uttalar han: Likasom af andra odlade vexter finnes deraf en mängd variationer, som endast fortplantas genom ympar och oculager; och samma uppgift förekommer om *Prunus Avium*. Om *plommon* och *krikon* återkomma samma uppgifter endast med den skillnad, att de jemväl uppgifvas kunna fortplantas genom rotskott. I motsats härtill omnämner han, att *Mirabellen* kan uppdragas ifrån frö, och han ifrågasätter derföre, huruvida den kunde utgöra en särskild art. Ingenstädes yttrar han någon antydning om hybridiseringar. Gärtner återkommer på flera ställen till de motsatta förhållanden, som ympning och hybridisering visa hos *Pomaceer* och *Drupaceer*. Under det man har en rik erfarenhet om huru lätt icke blott varieteter, utan äfven arter

och till och med former af olika släkten låta ympa sig ömse-
sidigt, så uppgifver han att oaktadt den nära släktskap, som
finnes emellan päronet och äpplet, dessa dock hvarken från
ena eller andra sidan kunna korsas. Såsom ett undantag från
det af honom uppgifna förhållandet påminner han om ett
exempel på lyckad korsning emellan persikan och mandeln
(anfördt af Knight).

Men utan att sjelf vidare vilja inlåta mig på ett allmänt
omdöme rörande hybridernes förmåga, att bilda uppslag till
nya arter, skall jag tillåta mig anföra ett par yttranden af
dem, som i denna fråga torde hafva ägt den rikaste erfarenhet
att aberopa, helst man stundom ser just denna erfarenhet äbe-
ropas såsom stöd för en aldeles motsatt åsigt. Kölreuter säger:
»Äfven den fullt sterile bastarden framkommer till alla delars
utbildning lika fullkomlig, som den normalt bildade aflödan,
endast ett felas honom, men detta enda är en af de förnämsta,
och kanske den förnämsta egenskapen, nemligen *fruktbarhet*.
Huru skulle icke tänkaren häpna om han erfor, att af de
50,000 frö, som skulle komma till utbildning på en enda vext,
icke ett enda vore grobart, eller att af mera än 1,000 blom-
mor icke en enda skulle förmå utbilda en frukt. För natur-
forskaren är detta förhållande för visso ett af de underbaraste
som naturen företer. Men det oväntade ligger icke så mycket
deruti, att en hybrid kan uppstå genom föreningen af elemen-
ter, som naturen icke ämnat för hvarandra, utan fastmera der-
uti, att denna vext, som fått lika fullkomlighet i andra delar,
just brister i de organer, för hvilkas utbildning hela det före-
gående vextens lif synes försiggå Betraktar man denna
brist med afseende på sina följder, så skall man med glädje
förnimma, att sjelfva ofullkomligheten här antyder en fullkom-
lighet. Hvilken förvånande förvirring skulle icke en hos ba-
starden nedlagd, alltjemt sig bibehållande fruktbarhet fram-
bringa i naturen? Hvilken utomordentlig mängd af ofullkom-
lighet skulle den icke föda af sig, och hvilka svåra följder
skulle den icke medföra?» (*Kölreuter Fortsetz. p. 7*).

Gärtner, den andra stora auctoriteten på detta område,
yttrar sig, på ett af de många ställen, der han återkommer
till denna fråga, på följande sätt: »Ofta har man till förkla-
ring af vexternes släkten och rikedomen på arter framställt
den åsigt, att naturen betjenat sig och alljemt betjenar sig af
hybriditeten för frambringandet af släkten och arter, och att

sakunda den hybrida afkomman icke vore endast tillfällig. utan ett allmänt medel att så väl vidmakthålla vextriket, som äfven att vidare utveckla och fortbilda detsamma. Men i motsats härtill följer det af mina undersökningar öfver fertiliteten af äfven de fruktbaraste hybrider, att deras uppkomst är tillfällig, eller med konst astadkommen, och följaktligen att nämnde åsigt är en ohållbar hypotes. Den stora olikheten och obeständigheten i fruktbarhet hos bastarder af icke blott nära beslägtade arter, utan äfven af en och samma art vid olika tider, och till och med hos de samtidigt tillkomne, äfvensom bastard-artens successiva aftagande och utslocknande, likasom slutligen den prepotenta inverkingen af stam-arternes befruktningsämne, hvarigenom hybriderne, äfven om de vore fruktbara, måste återgå till stamarterne, bevisar att hybridismen icke ens förmår vidmakthålla sin egen form, än mindre kan bidra till vextrikets fortbildning, och följaktligen icke kan vara medel för naturens ändamål, helst då, i motsats härtill, vi se de rena arterne både bibehålla och förnya sin fruktbarehetsförmåga i alljemt nya generationer. Och detta allt vederlägges icke deraf, att några få fruktbara bastarder, om man fortfar att *med konst* befrukta dem med eget pollen, understundom och smaningom tilltaga i fruktbarhet. Öfverlemnade åt sig sjelfve skola de dö bort, enär de sjelfve icke förmå fullgöra en befruktning» (*Gärtner Bastard-erzeug.* p. 417—18 ¹⁾).

Med afscende på sådane förändringar i artens yttre form, som torde kunna anses utgöra förändringar inom dess normala formkrets, några beroende af vextens förmåga att adaptera sina delars form, deras beklädnad, och i viss mån äfven deras verksamhet efter olika förhållanden på olika localer o. s. v., andra af alders olikheter, pubertets-förhållanden m. m., så torde visserligen sadane förändringar icke kunna anses utgöra något bevis för artens tendens att utbilda sig till nya arter.

Hvad slutligen angår de individuella olikheter, som öfverallt förekomma inom artens formkrets, större eller mindre, tydligare framträdande hos några, knapt märkbara hos andra.

¹⁾ *Naudin* har redogjort för en series af försök öfver hybrida formers permanens; dervid han kommit till det resultat, att den hybrida formen försvinner successivt, för att alltmera öfvergå till en af stamarternes typiska former. Se *Annales des Science. Nat. Ser. IV vol. 9.*

Många nyare författare kunde jemväl citeras för olika meningar; men jag har här, som i vissa andra frågor, med flit undvikit sådane observationer, der en förutfattad mening möjligen lätt ger åt resultatet en alltför subjectiv tydning.

så torde väl icke heller dessa lemna något bevis för att dessa variationer äro begynnande varieteter, som smaningom utbildas till arter i naturen. Vanligast anses dessa individuella olikheter af så ringa betydelse, att de icke ens anmärkas i botanisternes arbeten. Stundom äro dock dessa olikheter mera i ögonfallande, med mera skarpt utpreglade olikheter hos delar, som ofta begagnas för art-diagnostiken; hvarföre ock sådane variationer lätt nog kunna tagas såsom egna arter. De förekomma sällan och mera enstaka i den fria naturen, och jag har derföre serskilt anfört några exempel derpå, som jag trott mig böra upptaga bland »abnorma bildningar». Det torde vara sådane former, som företrädesvis gerna uppställas såsom egne varieteter. Till hvad ofvanför om dem blifvit anfördt anser jag mig derföre här böra tillägga några uppgifter om sådane formers uppkomst och stabilitet, hvilka i någon mån torde kunna bidraga till bedömandet af deras betydelse för bildandet af nya arter.

Enligt Loudon (*Arboret Brit.*) har man om *hängasken* följande uppgifter: Det vilda stamträd, hvarifrån alla nu odlade exemplar torde härstamma, fanns ännu i behåll, ehuru mycket stympadt, år 1835, och finnes måhända ännu i dag. Det upptäcktes omkring medlet af 1700-talet, stående på ett öppet fält, tillhörande en prestgård nära Dimpole i Cambridge-shire. Innehafvaren af denna prestgård, år 1835, uppgaf att hans företrädare, som uppnått 90 års ålder, hade som barn sett trädet redan då äga samma form, som det under hans tid sedermera ägde; hvaraf torde kunna slutas, att det, redan då man först fäste uppmärksamhet derpå, måste ägt en hög ålder. Vid hvilken tid ymper af trädet först började tagas, kan icke bestämdt uppgifvas, men man kände, år 1835, odlade exemplar af omkring 50 års ålder. Wildenow uppgaf att frö, som i ymnighet utvecklades af hängasken, lemnade plantor, öfverensstämmande med den allmänna asken. Om på det fält, der det första exemplaret anträffades, (hvilket sedermera blifvit inhägnadt till trädgård) icke heller den egendomliga formen lemnat i unga exemplar någon afköda, så torde dessa förhållanden snarare tjena som bevis för den ifrågavarande formens *natur af monstrositet, än begynnande art*.

De öfverallt odlade exemplaren af *blodboken* uppgifvas härstamma från ett träd, som först observerades under sednare hälften af förra århundradet, hvilket ännu lär finnas i behåll

uti en skog vid Sonderhausen i Thüringen. Den på annat ställe i denna skrift omtalade erfarenhet, som vid frösädd vunnits i Lunds botaniska trädgård, öfverensstämmer med uppgifter från andra ställen. Ett enda exemplar af en *blodek*, angifves förekomma i Lauchnerskogen vid Gotha.

Robinia pseudacacia, som härstammar ifrån Nord-Amerika, bär i vildt tillstånd vid bladbasen 2:ne taggar ("*stipulae spinosae*"). hvilka saknas hos några af de allmänt odlade formerne. Det uppgifves såsom fullt säkert, att dessa nu allmänt odlade träd utan taggar härstamma ifrån ett enda exemplar, som 1803 uppgick vid frösädd hos Hr Descemet i St. Denis. De efter frö, tagna från dessa taggfria träd, uppgångna plantorne, har man funnit återtaga den vilda stamformens characterer.

Hos vexter, som hafva sammansatta blad, känner man flera variationer med enkla blad. Bland arter, som normalt hafva 3:ne småblad, omtalas en form med enkla blad: *Fragaria vesca monophylla*. Den framkom, enligt uppgift, hos Duchesne 1761 vid frösädd af vanlig "*Fragaria vesca*". Plantor, uppdragna ifrån frö af den enkelbladiga varieteten, återtaga, i öfvervägande antal, den 3-bladiga stamformen.

Af *Asken* känner man sedan lång tid tillbaka en form med enkla blad, hvilken af Willdenow beskrefs såsom egen art: *Fraxinus simplicifolia*. Samma form synes af andra författare vara upptagen såsom *Fr. heterophylla Vahl*. Såsom skäl för sin åsigt anför Willdenow, att han från tillförlitlig person hört, att arten fortplantades genom frö med bibehållande af sina enkla blad, äfvensom att den härstammade ifrån Amerika. Men man har sedermera flera uppgifter (*Loudon arb. p. 1228*), som synas antyda, att den enbladiga formen härstammar ifrån England, der den förekommer här och hvar i skogen, och derjemte i kultur i gamla exemplar. Enligt vittnesbörd af *Mc. Nab* skall från frö af den enbladiga formen i Edinburgs botaniska trädgård hafva uppdragits plantor med vanliga pinnerade blad. Jemväl uppgifves att i Poppelsdorf, vid Bonn, ur frö af vanlig ask, hemtade ifrån skogen, uppgått flera exemplar af den enbladiga formen. Omkring 1,000 af de ur sadant frö uppgångna plantorne omplanterades sedermera, och när dessa uppnått omkring 8 fots höjd, anmärktes att 20 af de nybildade träden hade enkla blad, ungefär lika många hade de flesta bladen 3-bladiga, men derjemte några blad som voro flerbladiga. Det uppgifves vidare alldeles bestämt af Persoon

(i *Synopsis*), att han sjelf sett den enbladiga formen uppkomma ur frö af vanlig ask. Emot Decandolle, som uppgifvit att *Fr. heterophylla* skulle derjemte hafva några särskiljande characterer uti frukternes form, anmärker Al. Braun att de i Carlsruhes botaniska trädgård befintliga exemplar af *Fr. exc. simplicifolia* visade frukten fullkomligt öfverensstämmande med den hos vanlig ask.

Hos arter med enkla blad förekomma stundom former, som afvika från de vanliga genom bladens starkare laciniering på ett eller annat sätt. Man känner numera icke så få sådane, ofta förekommande i kultur. Såsom exempel må nämnas: *Betula dalecarlica* L. fil., *Alnus glutinosa laciniata*, *Alnus incana pinnatifida*, *Corylus avellana laciniata*, *Fagus sylvatica laciniata*, *Vitis vinifera laciniosa*, m. fl. Och såsom närmast motsvarande dessa torde kunna nämnas *Sambucus nigra laciniata*, *Cytisus laburnum quercifolius* m. fl. Att sådane former jemväl äro tillfälliga företeelser, som ursprungligen förekommit här eller der i den fria naturen, och sedan blifvit med konst fortplantade, torde vara mycket sannolikt. När *Betula dalecarlica* först beskrefs kände man, så vidt uppgifves, endast ett exemplar deraf, förekommande vid Ornäs i Dalarne. Man känner nu några flera exemplar från spridda andra ställen. I kultur förökas den genom ympning. Vid frösädd, säger Al. Braun, antaga fröplantorne den vanliga bladformen. De olika formerne af *Alnus* förekomma jemväl på några få localiteter; vid Lesjöfors, fordom det enda kända vextstället för *Alnus incana pinnatifida*, skall denna form numera vara försvunnen. Om bokens flera varieteter med olika blad säger Loudon, att de äro mycket benägne att återgå till den normala formen. *Sambucus laciniata* beskrefs af A. I. Retzius 1783 i tredje fasc. af *Observationes Botanicae* såsom egen art, utan uppgift om dess hemland. Uti 6:te fasc. af samma arbete återkallar han sin förra uppfattning derom, med förklaring att han 3:ne gånger repeterat frösädd, hvarvid de uppkomna plantorne haft stamartens enkelt pinnerade blad, och att han fäfanget under 5 år afväktat dessa blads förändring; utaf mera än 1,000 sädde frö af *S. laciniata* erhöles icke ett enda exemplar, som hade moderformens blad.

Jag har med flit valt dessa exempel nästan uteslutande från buskar och träd, enär dessa mindre lätt förvexlas med andra stand, och kunna under sin vidare utveckling följas

under många år. De torde ock utgöra tillräckligt framstående varieteter, hvardera af den art de tillhöra, och lemna exempel på variationer i olika hänseenden. Man torde således måhända vara berättigad antaga att de förhållanden, som med afseende på dem förekomma, jemväl böra förefinnas hos analoga former af andra arter. Om nu de valda exemplen visa, att sådane variationer uppkommit af frö, likasom tillfälligtvis och enstaka bland många andra stånd, som i naturen icke afvika från de normala formerne; att de afvikande stånden i allmänhet fortfara att tillvexa på det för variationen egendomliga sättet; att de genom oculager och sticklingar kunna genom kultur fortplantas till nya stånd, men att vid frösädd stundom icke en enda planta, stundom några få bibehålla variationens form, under det i kanske de flesta fall alla, i andra det vida öfvervägande antalet plantor återtaga artens normala former; om slutligen man ingenstädes anmärkt, att de nya generationerne af ur frö uppkomna plantor visa någon benägenhet att ytterligare utbilda den uppkomna variationens characterer, eller ombilda den i nya riktningar — så finnes visserligen i alla dessa förhållanden mycket ringa stöd för den åsigt, att variationer äro begynnelsen till varieteter, och att varieteterna successivt öfvergå till arter. Fastmera äro, hos några, de omnämnda variationerne af så ringa stabilitet, att på sjelfva det varierande moderståndet tidtals nya skott sägas framkomma, som enligt uppgift återtaga artens normala former (*Cytisus laburnum quercifolia*, *Fagus sylvatica asplenifolia*, *Sambucus laciniata* o. s. v.)

Det gifves måhända flera andra slags variationer än de ofvan uppräknade, om hvilka alla dock den gamla satsen torde gälla, att de måste pröfvas genom odling, medelst frö utsädd på olika localer. Om *Syringa chinensis* har man länge tviflat huruvida den vore egen art; den öfverensstämmer i några characterer med *Syringa vulgaris*, uti andra med *Syringa persica*. Wildenow säger, att den näppeligen torde vara en varietet af någondera; snarare ville han betrakta den såsom en hybrid af dessa. Om, tillägger han, den satte mogna frö skulle frågan härom lätteligen kunna afgöras. Tillägget innebär väl ett erkännande af att det är genom uppdragning från frö, och väl endast på detta sätt, som i sådane fall de tvifvelaktiga formernes natur kan afgöras.

Näppeligen torde någonstädes verkliga variationer visa större olikheter än som, hos de dioika vexterne, individer af olika kön stundom kunna förete. Om nu dessa sinsemellan så olika individer onekligen tillhöra samma art, ja framkomma af frö ifrån samma modervext, så torde det väl kunna antagas att äfven i andra hänseenden olikheter, större eller mindre, böra väntas förekomma inom artens normala formkrets, och detta jemväl hos individer, som utbildas från frö af samma modervext. Äro de stora olikheter, som ständ af olika kön kunna förete hos de dioika vexterne, icke antydande någon artens tendens till variering, eller något första steg till bildandet af en ny art, så borde väl än mindre andra olikheter, som finnas mellan de olika individerne, kunna utan vidare anses förete giltiga bevis för ett sådant antagande. Det gäller i detta hänseende, som vid fråga om så många andra vexternes förhållanden, att det hvarken är de synliga förändringarnes storlek, eller theoretiska stadganden, utan den erfarenhet, som kan vinnas i naturen, hvilken bör fälla utslaget.

V. Artens lif i dess förhållande till individernes; och organerne därför. Anordningar i naturen för artens bestånd under individernes på hvarandra följande generationer. Stabiliteten i naturen.

Hos dioika vexter hafva icke blott stånden sina individuella olikheter, utan han- och honstånd hafva dessutom hvardera sina särskildta organer, hvilka båda äro lika oumbärliga för artens lif. Om det ena ståndet ensamt förefunnnes, skulle dessa vexter sakna ettdera af de organ, som utan undantag förekomma hos de hermaphrodita, och hvilka allmänt erkännas vara oumbärliga för artens fortplantning. Hos de dioika vexterne måste organer från de båda slags stånden samverka för att frambringa yngeldugliga frö; de olika stånden kunna således icke betraktas såsom variationer eller individuella företeelser, eftersom naturen sjelf stämplat dem såsom oumbärliga, såsom supplerande hvarandra uti artens lif, det de gemensamt uppbära.

Hos Florideerne finnas fortplantningsorgan af 3:ne olika slag, hvardera utbildade på särskildta individer. Man kan må-

hända hafva olika meningar om dessa organs betydelse och functioner; men huru som helst de må tolkas, så torde det kunna anses fullt säkert, att dessa 3:ne slag organ normalt utvecklas hos hvarje art, och att de hvar för sig framkomma på olika stånd. Hos många, och kanske de flesta, Florideernes arter äro de olika organ bärande Individerne så lika hvarandra, att man af utseendet i öfrigt näppeligen torde finna någon olikhet dem emellan; men hos några få (arter af *Hypnea*, *Gigartina*) förefinnas vissa mindre olikheter äfven i de olika ståndens utseende. Att de olika stånd, som bära hvart sitt slag af organer, blott framställa individuella olikheter i vanlig mening, eller att de utgöra ett eget slag af variationer, torde icke gerna kunna antagas, enär de antagligen förekomma hos hvarje art, och hvardera under en för arten bestämd form. De torde således böra antagas såsom särskilda former för ett och samma lif, men hvars organ här äro fördelade på olika individer.

Om det hos sådane vexter synes vara genom naturens egna anordningar bestämdt, att vissa för artens lif oundgängliga organ fördelas på olika stånd, och dessa stånd nödvändigtvis sammanhöra, såsom samverkande för ett gemensamt mål, så har man väl i dessa vexter fullgiltiga bevis för den uppfattning, att en bestämd skillnad måste förefinnas, emellan det *individuella lifvet*, som fortgår hos de olika stånden oberoende af hvarandra, och *artens lif*, hvars organ äro fördelade på de olika individerne.

Det är tillräckligen känt att hos träd, och hos perennerade vexter i allmänhet, blomster och blommor framkomma först vid en bestämd tid (pubertets-perioden); och att de sedan framkomma år efter år; äfvensom att någon erfarenhet torde antyda, att fertiliteten hos gamla träd minskas, och att måhända slutligen fortplantningsorganerne upphöra att utvecklas. Hos *Agave*, *Fourcroya* m. fl. kan individet fortleva i många år innan blomningen inträder. Dioika träd kunna förekomma allmänt odlade i vissa länder, och der utveckla sig till träd af hög ålder, ehuru der representerade endast uti ettdera könet. Om således fortplantningsorganerne för Arten både under vissa och långa perioder i individets lif kunna saknas, om hos de dioika träden de i vissa fall aldrig fungera, utan att det individuella lifvets utveckling i någon mån af sådane

förhållanden synes hämmad, så torde det väl kunna antagas att nämnde organer icke hafva någon function att fullgöra i individets eget lif.

Om, å andra sidan, hos de annuella vexterne äfven det frodigaste individuella lif afslutas, så snart fortplantningsorganerne äro färdigbildade, om hos de bienna vexterne ett *två-årigt*, om hos *Agave* ett *mångårigt* lif jemväl afslutas med frukt- och fröbildningen; om hos perenna örter, buskar och träd vissa grenar utbildas på eget sätt, och genom särskilda karakterer skilja sig från dem, som afse ståndets individuella utbildning (föryngring); om det är på dessa säregna grenar, som blommor och frukter komma till utveckling; om dessa grenar efter en enda eller flera, år efter år framkommande, fruktsättningar dö bort eller afkastas; männe icke alla dessa, hos olika arter olika förhållanden, hvardera på sitt sätt lemna antydningar om en viss motsättning emellan individets lif och artens, och huru det förras utveckling och fortvaro i vissa fall (hos de blott en gång blommande), genom naturens egna bestämmelser offras för artlifvets fordringar?

Om den ändamålsenlighet, som Linné antog öfver allt kunna spåras i naturens skapelser, verkligen förefinnes, men blommor och frö icke synas hafva någon function att fullgöra för individernes lif; om de likväl utbildas hos hvarje art, utan känt undantag; om med afseende på mångfald i form och rikedom, naturen ingenstädes synes mera hafva slösat, ingenstädes synes hafva nedlagt mera konstfärdighet — om ett sådant uttryck kan tillåtas — än på alla blomningen tillhörande delars utveckling, och, så vidt vi om det dermed afsedda ändamål förmå dömma, på deras lämplighet derför; så måste väl tillvaron af dessa organ tyda på ett både allmänt och viktigt ändamål, och på ett ändamål som måste antagas vara af till och med mera vikt än tillgodoseendet af det individuella lifvets bestånd. Det förekommer mig, som skulle dessa förhållanden nödvändigtvis tyda på ett särskildt artens lif, till hvars uppehållande hvarje individ har i sin mån att bidraga, och detta stundom med uppoffring af hvad som för det individuella lifvet kunde vara mera förmånligt.

Om det vore så, som i nyare skrifter så ofta framhålles, att en ständig strid pågår emellan de för sin tillvaro kämpande individerne, och att, för att kunna bestå i denna strid, alla det individuella lifvets krafter måste anlitas; att hvarje

tillfällig förändring, som åt det ena individet beredde ett företräde framför andra, icke blott medförde en för tillfället tillkämpad seger, utan jemväl beredde en stabilitet åt förändringen; om således tillfölje af en opportunitetslag, gällande i naturen, endast det för det individuella lifvet nyttiga borde blifva fortlefvande, och det vore i detta syfte som ett föränderligt lif iklädde sig nya former, så låge det för visso nära till hands att fråga: hvarför utbildas hos alla högre växter blommor och frön, och hos de lägre sporangier och sporer, vexlande i form och complicering hos olika grupper, men, så vidt känt är, hos hvarje art under någon form förekommande? För ståndets bestånd i den antagna striden måste dessa organ anses icke blott vara fullkomligt umbärliga, utan fastmera i vissa fall (hos de blott en gång blommande) måhända bidragande till det egna ståndets undergång¹⁾.

Redan det förhållandet, att hos de dioika växterne några frö utvecklas till hanstånd, andra till honstånd, antyder tillräckligt att i fröet är nedlagd en möjlighet till frambringandet af i viss mån olika stånd. Efter korsning emellan olika arter, afvika hybriderne vanligen ifrån båda stamplantorne, stundom i olika grad enligt Kölreuters uppgift, hvilket och i vissa fall bekräftas af Gärtner. — Om således olikheter af större betydelse (olika kön) kunna finnas hos plantor, framkomne från frö af samma stånd, så torde det måhända ock vara sannolikt, att många af de mindre olikheter, som olika individer af samma art förete, kunna redan i embryot finnas i anlag, om ock de i många fall på den nya vexten blifva märkbara långt sednare.

Men blifva individerne vid uppdragning ifrån frö mer eller mindre olika, så torde det måhända kunna förmodas, det frö af varieteter skola lemna en afkö, som ofta åter närmar

¹⁾ Skall en strid för tillvaron antagas, så måste den förutsättas pågå individ mot individ; den måste utkämpas på detta sätt, antingen individerne tillhöra samma art, eller olika arter. Efter traktuggning i skogen, är det stundom individ af samma art, stundom blandade individ af fur och gran, som utkämpa striden, och det låter väl tänka sig att den utkämpades nägonstädes emellan han och honstånd af samma art (*Taxus*). Den sednare kunde icke gälla artens fördel, då följderna icke för den kunde vara förmanliga. Pågår striden mellan individerne, så äro fortplantningsorganerna för stridens utgång utan all betydelse.

sig den normala formen. I alla händelser har en lång erfarenhet lärt, att så är förhållandet. Den kopparröda färgen ger onekligen åt *Blod-boken* ett mycket egendomligt utseende. För många år tillbaka utlades på en särskild rabatt i Lunds botaniska trädgård en mängd ollon, alla insamlade från det enda exemplar af blodboken, som då här förefans. Då efter några år de uppgångna plantorne granskades, visade sig att under det några bibehållit moderståndets färg, det vida öfvervägande antalet återgått till utseende af en vanlig bokplanta, medan några kunde sägas medlande mellan båda. Och enahanda torde väl förhållandet vara med de fleste andra varieteter: flera eller färre repetera modervextens egendomlighet, de flesta återtaga artens normala utseende. Genom att gallra bort de individer, som synas mindre återgifva den form odlaren önskar fortplantad, kan således äfven genom frö vissa former bibehållas. Uti den fria naturen, der denna sednare process icke eger rum, skola dock den normala formens talrikare individ småningom vinna öfverhand, och sålunda skall en der uppkommen variant form, efter flera eller färre generationer, åter vara försvunnen. Darwin säger: som flera varieteter af hvete säs tillhoppa, och det deraf blandade fröet åter säs, så skola några af varieteterne — de som bäst passa för jord och klimat, eller de som hafva den ymnigaste affödan — öfvervinna de andra, lemna allt mera frö, och följaktligen efter få år hafva undanträngt de andra varieteterne. Vill man bibehålla ett blandsäde af äfven så föga afvikande variationer som hos sockerärterne, så måste de för hvarje år odlas hvar för sig, och utsädesfröet sedan blandas i den proportion som vederbör; i annat fall skola de vekare racerne ständigt mera aftaga i antal och försvinna slutligen alldeles.

Jag skall icke citera flera exempel för det väl länge kända förhållandet, att variationer äro benägna att återgå till artens normala utseende vid fortplantning medelst frö; och allt sedan Linnés tid har väl detta temligen allmänt varit antaget. Om således å ena sidan variationer stundom uppstå vid artens normala fortplantning genom frö, men å andra sidan de varianta formerne synas benägna att åter försvinna vid nya individers uppkomst på samma sätt; så torde fortplantning genom frö icke lemna något medel för frambringandet af nya, i naturen bestående arter: *individerne förändras men arten blir till lif och karakterer oförändrad.*

I skärande motsats till det förhållandet, att nya generationer af individer, som framkomma genom frö, stundom äro, eller kunna vara mer eller mindre afvikande ifrån moderståndet, står den jemväl länge antagna egenheten, att nya individ, som uppkomma på annat sätt (genom sättqvistar, rotnölar, rotskott, oculager, ympar o. s. v.) bibehålla moderståndets egendomligheter oförändrade. Hoffman Bang uppger att om grenar sammankoplas af olika variationer af samma art, och båda matas af samma moderstånd, så bibehålla båda grenarne hvardera sina race-egenskaper. Det är också vanligt, att ädlare fruktsorter genom ympar och oculager på vilda stammar förökas med bibehållande af sina egenskaper.

Kerria Japonica infördes till England redan år 1700: men den då införda vexten var en form med dubbla blommor. Den fortplantades sedan genom rotskott, och blef så allmän i England, att den fanns äfven i den minsta trädgård. Under mera än 100 år, och i rikligaste mängd fortplantad på nämnde sätt, bibehöll den altjemt sina dubbla blommor. Med enkla blommor infördes den först långt sednare, och blommade med sådane först i April 1826. (*Loudon Arboret II p. 722*).

Flera odlade vexter (Pisang, Ananas) utbilda sällan, som det synes, några frö, men de fortplantas lätt på annat sätt, med bibehållande af ståndets egenheter. Linné anmärkte om den såsom hybrid antagna *Veronia spuria*, att den fortplantades genom sättqvistar. Likasom Willdenow uppgifver om många odlade variationer af buskar och träd, att de ofta återgå till sina stamarter, om man söker fortplanta dem genom frö, så omnämner han att de mest olika slag af variationer kunna fortplantas genom rotskott, sticklingar o. s. v. Blad af olika form och laciniering, blad af olika färg (*Hibiscus Syriacus*), blommor med olika färg, blomster med endast sterila blommor (*Hydrangea hortensis*), frukter af olika färg och smak o. s. v., bibehållas, när de fortplantas på detta sätt.

Den mycket egendomliga hybrida form, som under namn af *Cytisus Adami* blifvit sedan 1826 spridd till de flesta botaniska trädgårdar, förökes jemväl genom förädlade exemplar. Det egendomliga hos moderståndet, att hufvudsakligen utveckla sig såsom *Cyt. Laburnum*, med tidtals framkommande grenar eller blomster som likna *C. purpureus*, bibehålles genom detta förökningssätt, under det dess hybrida natur synes bevisad genom ständig sterilitet. Om en så beskaffad moder-

ståndets egendomlighet, som endast periodvis synes återkomma. bibehålles uti de nya stånd, som tillkomma genom hybridens inympning på nya stammar, så torde detta utgöra ett mycket talande bevis för den stränga ärfthigheten af moderståndets egendomlighet hos de stånd eller grenar, som utvecklas af modervextens fränskiljda delar ¹⁾).

Framför allt synas mig de dioika vexterne i detta afseende vara mycket bevisande. Före Linné synes man hafva föreställt sig, att hos Pilarne samma stånd kunde bära det ena året masculina, det andra året fæminina blommor; Linné förklarade detta vara dikt (*Gen. Pl. Ed. II p. 472*). Längre sedan anmärkte El. Fries om flera *Salix*-arter, som då i Skåne förekommo allmänt planterade, att ettdera könet der saknades af flera arter. Sålunda uppgaf Fries, att honståndet saknades af *Salix amygdalina* och *S. fragilis*; hanståndet deremot af *S. purpurea*, *S. undulata*; *S. mollissima* och *S. lanceolata*. Alla dessa arter odlades icke blott vid vägar och gärdesgårdar, utan äfven på träskartade localer och på sandfält i närheten af hafvet. En gång hit införde, fortlefva de der och förökas. — Det har också uppgifvits om Tärpilen, att alla de stånd som förefinnas i Europa och äfven derifrån öfverflyttats till andra localer (St. Helena, o. s. v.), skulle alla härstamma från en qvist, som utplanterades af Pope; och att alla dessa träd utgöras af honplanter. Willdenow anmärker om flera allmänt odlade *Populus*-arter, att han endast sett ettdera könets blommor; om *Pop. græca* uppgifver Loudon det vara osäkert huruvida hanståndet finnes i England. Om *Pop. canadensis* har uppgifvits att endast honståndet finnes i Frankrike. Af *Pop. fastigiata* finnes hanståndet öfver allt i England, men både der och på andra ställen har man förgäfvets eftersökt honståndet, som deremot förefinnes i Lombardiet. Af *P. balsamifera* finnes hanståndet i England o. s. v. Sådane exempel synas antyda, att vid för-

¹⁾ Jag har vid ofvanstående uppgifter om *Cytisus Adami* följt andras observationer, hvilka, så vidt jag minnes, öfverensstämma med hvad jag själf fordom sett. Exemplar, som nu finnas i Lunds bot. trädgård, synes mycket litet erindra om *C. purpureus*, när man fränser en något rödaktig skiftning i blommornes färg. Blomstret, likasom bladens form och nervering, erindra om *C. alpinus*, eller den mera närstående former. På samma stam har jag sett några racemi med rödaktiga blommor, som snart affalla, andra med gula blommor som efterlemnna fruktanlag. Jag har antagit att de förra tillhöra hybriderna, men att de sednare utvecklats från grenskott af den stam, hvarpå hybriderna inympats. Af de rödaktiga blommorne äro många monströsa bildade med tendens att öfvergå till fyllda.

ökning medelst sättqvistar, rotskott o. s. v. de nya stånden strängt bibehålla moderplantans kön.

Schimper, hvars både noggrannhet och rika erfarenhet om allt som berör mossornes lif ingen torde bestrida, yttrar (*Rech. sur les Mousses p. 55*) att hermaphrodita och monoiska mossor normalt utbilda frukter, under det dioiska ofta icke fructificera. Ehuru både han sjelf under 10 år och andra bryologer sökt efter fruktbärande exemplar af den i Rhendalen och tillgränsande bergstrakter mycket allmänna *Hypnum abietinum*, man dock icke lyckats der öfverkomma ett exemplar i frukt; oakadt der förekommande stånd voro rikligen försedda med honblommor. Då deremot vid Kristiania Schimper påträffade en tufva med hanblommor, ansåg han sig nästan på förhand viss om att honplantorne der skulle bära frukter, hvilket han också snart fann bekräftadt. Om således den i Rhendalen allmänna honplantan der icke kan fortplantas genom sporer, men dess allmänna förekomst nogsamt bevisar, att den der fortplantas på annat sätt; och enär det om mossorne i allmänhet är känt, att de äro rikligen försedda med andra fortplantningsmedel, som äro mer eller mindre tydligt analoga med högre vexters fortplantning genom delning, så torde det af detta och af andra sådane väl konstaterade förhållanden tydligt framgå, att en ståndets oföränderlighet torde allmänt förefinnas hos vexterne; att ståndets egenskaper ärfvas vid fortplantningssätt, som avvägbringas genom ståndets på ett eller annat sätt verkställda delning; och att denna ärftlighet sträcker sig ända derhän, att icke ens olika kön kunna uppkomma hos de dioiska vexterne, när nya stånd frambringas genom sådant förökningssätt.

Hvad jag här framhållit, det följer väl af hvad man redan längesedan antagit, att nemligen knoppen och embryot äro väsendtligen olika; att genom förökning medelst knoppar individerne likasom fortsättas eller förgrenas; genom embryot bildas en ny vext ¹⁾. Är den gamla satsen riktig, så torde deraf

¹⁾ Linné skiljde strängt emellan fortplantning genom frö (*»generation»*) och förökning genom lökar, oculager, särskildta skott; Om detta sednare fortplantningssätt säger han, att det snarare bildar ett fortsatt lif eller utgör en livets förgrening, än en ny generation (*Anim. compos. p. 7*). En fylld blomma eller en monströs fortplantas icke genom frö, utan genom nedlagde grenar eller rötter (*Phil. Bot. n:o 150*). Gemma nihil aliud est nisi herba coarctata — — Semina vero sunt plantulae distinctae . . . hinc crescit planta per gemmas uti Polypus, per semina vero uti per ova animalia; hinc gemma planta nova dici nequit sed continuata; semen autem omnino nova seu propa-

följa ytterligare flera consequenser, hvilka synas mig hafva icke ringa betydelse för flera af de frågor, som i denna skrift blifvit berörde. Hafva hos de dioika vexterne stånd af ettdera könet icke förmåga, att vid bildandet af nya stånd (genom rotskott, eller på annat sätt tillkommen delning) utbilda dessa till stånd af andra könet, så torde vextens egen förmåga att under den antagna striden för tillvaron ombilda sig till nya och i striden bättre bestående former vara mycket tvifvelaktig. Det kan nemligen icke gerna förnekas, att ombildningen af ett kön, som finnes i öfverflöd, till ett annat som saknas, måste betraktas såsom en förändring, hvilken man väl skulle kunnat vänta lättast böra genomföras, och som i alla händelser vore den naturligaste, för så vidt som här afsåges bildandet af delar, som otvifvelaktigt ligga inom artens normala formkrets. För mig vill det synas som vore detta från de dioika vexterne hämtade bevis för vextens oförmåga, att sjelf vid behof kunna ombilda sina delar, på det bestämdaste talande emot den Darwinska uppfattningen i nämnda afseende.

Om, enligt hvad här blifvit påpekadt, det gifves 2:ne olika sätt, hvarpå vexterne förökas; om för hvardera finnas särskilda delar eller organ, och resultatet blir ett annat, allt eftersom de nya individerne bildas på det ena eller andra sättet; så torde det väl kunna antagas, att de olika förökningssätten afse olika ändamål, och hafva hvardera sin särskilda betydelse för vextens lif. I det ena fallet är det en moderståndets redan anlagda del, som på ett eller annat sätt skiljes derifrån, för att bilda ett eget stånd — en knopp, som hos olika växter kan framkomma på många olika delar af vexten (såsom rotskott, lökar, stoloner, bulbillar o. s. v.); i det andra fallet är det en på bestämdt ställe tillkommen, och genom samverkan af organ, som synas endast för denna function blifvit bildade, frambragdt del (*embryo, spora*), hvilken äfven genom sin egen ställning (*radiculans* riktning inom fröet) oftast antyder, att den icke är afsedd att utvecklas på det egna moderståndet. Om de nya stånd, som tillkomma genom en ståndets på ett eller annat sätt genomförda delning, bibehålla alla stam-stån-

gata (*Gemm. arb. p. 4*). Ännu under den post-Linneiska tiden uttalades: *Genus individuum continuant, semina speciem propagant* (*Link Philos. Bot. p. 208*); och det var i tvifvelaktiga fall, såsom jag ofta vågat åberopa, för de flesta botanister intill den nyaste tiden, fortplantningens resultat som ansågs afgörande för bestämmandet af hvad som borde anses såsom variation eller egen art.

dets ¹⁾ egendomligheter af tillfällig variation (Blodboken, persiljehyllen), eller af hybrid natur (*Cytisus Adami*); om de bibehålla samma kön (Pilar, Poplar), äfvensom på samma sätt ombildade blommor (*Kerria japonica*); så förökas härigenom endast vexten sådan den är hos moderståndet: individernes antal förökes med bibehållande af deras individuella egendomligheter. Men om, då vexten fortplantas genom frö, de individuella egendomligheterne än bibehållas hos några af de nya individerna, än förändras hos andra; om endast genom sådan fortplantning alla de särskilda modificationer, som tillhöra artens formkrets (han- och honstånd m. fl.), kunna återbildas; om hos de dioika vexterne fröbildningen icke kan åstadkommas utan efter en befruktning, dervid organer från olika stånd måste medverka — så måste väl i alla dessa förhållanden ligga bevis för, att fröbildningen är afsedd för ett särskildt utanför individets lif liggande ändamål — *för bibehållande af artens lif i de olika former, som tillhöra dess formkrets*. När individerne på sitt sätt mångfaldigas i nya stånd, så vidmakthålles det egendomliga hos individet; när arten fortplantas genom sina organer, så icke blott återbildas de olika former, som tillhöra artens formkrets, utan de återkomma ock i sina normala former. Sa synes på detta sätt vara sörjdt både för bibehållande af en viss bildningens frihet hos de särskildta individerne, och för artens permanens inom de gränser, som för hvarje art blifvit bestämda.

Det förekommer mig som man af dessa naturens egna anordningar vore berättigad antaga, att likasom ståndet hos vexterne har sitt lif, sin uppkomst och utveckling, sin fortvaro och sitt mångfaldigande genom vissa förökningssätt, så har äfven arten sitt lif och sina organer därför, sin uppkomst en gång i tiden och sin utbredning (till olika localer), samt sitt fortplantningssätt genom egna organer. Om artens lif är i viss mån bundet vid individernas, så framstår det dock åtminstone periodiskt genom egna organer, som tillkomma uteslutande för fullgörande af artlifvets functioner.

¹⁾ Gärtner har uti sitt ofta citerade arbete upptagit frågan huruvida oculager, ympar m. fl. framkalla förändringar, analoga med dem som uppkomma genom korsning, och har ansett sig kunna derpå lemna ett bestämdt nekande svar. Han framhåller deras egenskap att fortplanta moderståndets alla characterer, utan att nämnbart inverka på den stam, till hvilken de blifvit öfverflyttade. De matas af den, med bibehållande af sina särskilda egenskaper.

Det är visserligen vanligt att anhängarne af de Darwinska åsikterne taga för bevisandet af dess satser ofta sin tillhjälp till den långa tid, hvarunder nutidens vexter kunnat, steg för steg, ifrån få former — eller från ett enda grundämne — småningom utbilda sig till den stora mångfald, som nu förefinnes; och att der denna tid icke räcker till, anlitas ofta det paleontologiska materialet, samt i nödfall äfven de geologiska händernes ofullständighet. Men om man, när det gäller att framställa jordens bildningshistoria, söker förklaringen för det förflutna i hvad som nu pågår, under förutsättning af utvecklingens fortskridande alltjemt på enahanda sätt, så kunde det måhända väl anses berättigadt, att, när det gäller bevisföring för ett efter bestämda lagar fortgående vextlif, äfven draga slutsatser om det som fordom varit ifrån hvad nu detta vextlif själf uppenbarar. Under denna förutsättning skall jag tillåta mig fästa uppmärksamhet på några dess förhållanden.

Man har länge vetat, att det gifves träd som hafva en mycket hög ålder, hvilka, för så vidt känt är, icke afvika i andra afscenden från yngre träd af samma slag. När de började sitt lif funnos visserligen inga häfdetecknare, som angifvit deras födelseår; men man kan vanligen genom räknande af årsringarne på det nogaste bestämma ett träds ålder: och der ett träds storlek gör en noggran räkning omöjlig, torde dock tillnärmelsevis man kunna uppskatta åldren af sådana mycket gamla träd. Man antager sålunda att det finnes träd af *Wellingtonia*, som äro 2—3,000 år gamla; och hos några andra träd har man uppskattat åldern till 5—6,000 år. Om nu, såsom af det ofvan anförda synes framgå, standet bibehåller sina individuella egendomligheter så länge detsamma eger bestånd, så har man väl äfven rättighet antaga, att dessa vextlifvets åldringar icke utgöra något undantag ifrån den allmänna regeln. Man synes således hafva ett positivt bevis för att arten, sådan den nu är representerad i dessa gamla träd, icke undergått någon förändring under de perioder af 2—3,000, ja måhända af 5—6,000 år, under hvilka dessa träd lefvat. Om nu de yngre plantor, som bestå jemte de gamla af flera af dessa arter, om de plantor af *Wellingtonia* (*Sequoia gigantea*), som nu uppdragas genom frö öfverallt i Europas trädgårdar, icke antyda någon afart från de gamla moderständen, så synas väl dessa förhållanden kunna åberopas såsom directa bevis för artens oföränderlighet under mycket långa tidsperioder.

Det har uppgifvits, att när den Kaliforniska *Wellingtonia* först upptäcktes af norra Amerikas inflyttade befolkning, förefunnos deraf icke så få träd, stående tillhopa i grupper. Dessa grupper voro antagligen öfverlevvor af skogar, som förut funnits i större utsträckning, likasom Osw. Heer, efter undersökningar af en förgången arctisk floras paleontologiska lemnigar, trott sig kunna antaga, att flera arter, som ännu förekomma lefvande på särskilda mera inkränkta localer, fordom haft en stor utsträckning inom flera den arctiska florans områden. Om de qvarstående träden af *Wellingtonia*, så vidt känt är, sins emellan öfverensstämma, så torde det vara antagligt att de i en förtutgången tid deraf bestående större skogarne jemväl bestodo af sins emellan öfverensstämmande träd; och det torde väl då äfven kunna antagas att de utvecklats ur frö från sina stamfäder af samma art, hvilka åter i sina årsringar hade bevis för en icke mindre lång lefnadstid. Så får man i dessa förhållanden för visso antydanden om *artens oföränderlighet* under mycket långa tidsperioder.

VI. Vexternes daning för särskildta ändamål; olika arters för att kunna lefva under olika yttre förhållanden; för att kunna fullgöra lifvets functioner på för dem afsedt sätt.

På talrika ställen uttalar sig Linné med beundran och hänförelse öfver skapelsens mångfald och rikedom, och framför allt öfver den ändamålsenlighet, som städse stämplar naturens olika bildningar. Under denna synpunkt har han i flera uppsatser sökt framställa natur-företeelsernes allmänna sammanhang, och i *Oeconomia naturæ* uttalas att de 3:ne naturrikerna hafva hvardera sin uppgift, att de äro beroende af och tillkomna det ena för det andra: den oorganiska naturen med sina olika materiella beståndsdelar, vexlingar af land och vatten, samt andra olikheter i fysiskt hänseende, beroende af ländernes läge, form och höjd öfver hafvet m. m., sålunda beredande de locala omvexlingar, som passa för vextrikets på olika sätt danade arter; vextriket, som för sin näring är hänvisadt till den oorganiska naturen, skall icke blott bereda prydnad och omvexling åt landskapet, och efter olika vexters olika art lefva sitt eget lif, utan jemväl bereda underhåll och skydd åt

djurrikets talrika skaror, hvilka i sin ordning äro hänvisade att lefva af vextlifvets producter. Efter lifvets slut återgå vexters och djurs materiella lemningar till beståndsdelar af den oorganiska naturen, för att sedan gifva näring åt nytt lif. Linné antog att hvarje organiskt väsende hade sin uppgift att fylla i naturen, och att hvar och ett derföre fått sitt egenomliga lif, och sin för dettas fordringar mest passande daning.

Enligt denna uppfattning måste det väl antagas ligga i sjelfva vextlifvets ändamål, att vexten vore danad på annat sätt än djuret. Skall vextriket kunna underhålla hela djurriket, så måste vexten icke blott kunna tillfredsställa de stora och många olika kraf, som på den ställas ifrån consumenternas sida, utan den måste derjemte hafva ett öfverskott, tillräckligt att vidmagthålla dess eget lif. Det händer hos oss ofta att träd, ja att hela skogar mista sin nyfödda grönska, i det deras späda blad förstöras af en nattfrost eller fullständigt uppätas af insektlarver; men snart framkomna nya generationer af knoppar och blad, att ersätta det förlorade. Stympar man ett träd, så framskjuta nya knoppar på ställen, der de annars icke skulle hafva framkommit, bildande nya grenar på den återstående stamdelen. Så har vexten i sin förmåga att bilda nya knoppar ett väl sällan sinande medel att ersätta hvad den på ett eller annat sätt förlorar. Den har dertill i många fall ett relativt till djurens långt lif, och en förmåga af ständig tillvext, så länge lifvet finnes kvar. Olika vextarter utveckla olika beståndsdelar, och de få derigenom olika användanden; vexter, som icke äro tjenlige för högre djurs föda, nära ofta skaror af insekter; arter af *Urtica* och *Scrophularia*, säger Linné, som stå orörde af hvarje högre djur, tjena uteslutande, som det synes, till föda för flera slag insekter. Och menniskan, som alltmåra sätter sig i besittning af olika vexters olika produkter, för att tillgodose det complicerade samhällets alltjemt stigande kraf, hon torde nog ofta fått lära sig inse, att vextrikets produkter icke kunna sammansättas i konstens deglar, icke heller att den ena vextens produkter fullt kunna ersätta den andras.

Bundet vid torfvan, måste vextlifvet nära sig med de beståndsdelar, det der påträffar; blifva dessa der otillräcklige, har vexten förmåga att utsträcka sina rötter i olika riktningar; och det är väl känt, att roten stundom kan förete en utomordentlig tillvext åt det håll, der dess behof kunna bäst till-

fredsställas; rötter, som banat sig väg till draineringsrör, kunna inom dem uppnå en förvånande utveckling.

Vissa vexter trivas på en undergrund af kalk, andra på granit; torfmossarne nära andra arter än sanden; och många exempel kunna anföras på vexter, som tydligen äro danade för att lefva under säregna förhållanden. På sandfält, ännu icke upptagne af andra vexter, ser man *Carex arenaria* skjuta sina under ytan krypande rhizomer i lång utsträckning, och i nästan raka linier, antydda genom de här och hvar framkommande nya stånden; hvarje sådant nytt stånd kan blifva utgångspunkt för nya rhizomer, och så allt vidare. Flera andra vexter »binda sanden» hvardera på sitt sätt. *Cirsium arvense* skjuter på liknande sätt sina rhizomer djupt nere i åkerns mylla. Och på bottnen af kärr och stränder utbreda sig andra vexter på motsvarande sätt.

Rundt kring oceanens ofta träskartade stränder inom tropikerne förekomma ett eget slags skogar, *Mangrove-skogarne* (olika arter af *Rhizophora*, *Avicennia* m. fl.), hvilka, säger Lindley (*Veg. Kingd. p. 727*) hafva en vigtig uppgift i naturens ekonomi, i det de ärligen från oceanen inkräkta nya sträckor af land. Detta sker dels genom rötternes successiva utbredning, dels genom fröna, som gro medan de ännu finnas kvar inom frukten. Ifrån stammens nedre del, något ofvanom vattenytan, sträcka sig rötterne bågformigt utåt, för att på en ny plats nedtränga i mudden, och der gifva upphof till ett nytt stånd. Dessa nya stånd fortfara att vaxa på samma sätt, genom framskjutande af nya rötter, tills de uppnått en höjd af omkring 15 fot, hvarefter rötterne utbreda sig mindre, men kronan i stället starkt utvecklas, sträckande grenarne utåt i alla riktningar. Ifrån grenarne och de inom frukten groende fröna nedsändas rötter, som småningom blifva till nya stammar. Så utvecklas Mangrove-bältet till en labyrinth af hvarandra korsande stammar, grenar och rötter. Om Avicennierne uppgifver Lindley, att deras bågformiga rötter ofta sträcka sig 6 fot öfver vattnet, innan de sänka sig ned deri; och att deras nakna, sparris-liket uppskjutande skott hafva ett mycket egendomligt utseende.

Det är hos oss väl bekant att *Sphagnum*-arterne företrädesvis trivas i grundare kärr, som tidtals fyllas med vatten, tidtals nästan uttorkas. Vid kärrets uttorkande skulle de sakna det för dem, som det synes, oundgängliga vattnet, om de icke

fatt en bygnad, som väl kan sägas afvikande ifrån alla andra vexters, och hvarigenom de förmå att likasom en tvättsvamp uppsupa vatten ifrån vextens nedersta, i torfven rotade delar.

Vextens lif är icke endast beroende af de beståndsdelar, den hämtar från jorden, och af de locala förhållandena på den plats, der den kommit till utveckling. Den behöfver ljus och värme, regn och dagg och olika beståndsdelar från den atmosfär, som omgifver den. Och dess ofvanom jorden befintliga delar äro bygda efter dessa olika behof. Vexten kan icke, såsom flyttfogeln, byta sitt hem efter årstidernes växling, den kan icke, såsom djuret, fly till sin hala, och i dess skygd afvakta en blidare väderlek, snöstormens eller orkanens öfvergang. Sa måste vextlifvet äfven efter olika för vexten skadliga förhållanden ikläda sig annan gestalt, och efter olika arters känslighet för dessa yttre förhållanden antaga mer eller mindre olika former. Ut i sin afhandling *Gemmae arborum* anmärker Linné, att knopparne hos träden i kallare länder äro täckte med säregna *hybernacula*, som saknas hos träd inom varmare länder. En jemförelse torde ock visa, att trädens knoppar i kallare länder äro mera slutne och täckte med en mer eller mindre rik utstyrsel af knoppfjäll, ludd o. s. v., likasom de hafva en längre hvilotid. Under mildare luftstreck äro knopparne än nästan öppne, än täckte med enkla stipelpar hos vexter med alternerande blad, än med äldre bladpar hos vexter med motsittande blad; och vegetationen fortgår här med kort hvilotid. Sjelfva löfven på buskar och träd äro oftast ettåriga, och affalla före vintern i kallare länder, under det i varmare trakter många buskar och träd stå alljemt gröna med perennerande blad. Dock är det väl känt, att i dessa afseenden olikheter förekomma. Äfven i det högnordiska landskapet finnas både buskvexter med perennerande blad, som det synes väl skyddade under ett rikt täcke af snö, och träd med perennerande barr, måhända skyddade genom egendomlig structur. Buskvexter ifrån södern, som uthärda vårt klimat, bibehålla här sin utstyrsel af sempervirenta blad (*Buxus*, *Aucuba*, *Vinea*); och vexten ändrar icke sin natur, äfven om bladen under en strängare vinter skulle frysa bort. Det uppgifves att de hos oss vanliga frukt-träden, öfverflyttade till länder inom tropikerne, bära der ymnigt blad, men sällan frukt. Odlas de för sina frukter, brukar man (*i Ost-Indien*) blotta rötterne; bladen affalla då, och vegetationen afstadnar, likasom hos oss under vintren.

Likasom nordiska vexter skyddas emot vintrens köld genom särskilda anordningar¹⁾, så torde det väl kunna förmodas att den i varmare trakter ofta långvariga torkan skulle menligt inverka på vissa vexter, såvida icke äfven här naturens anordningar beredt dem ett särskildt skydd. Medelhafsregionens många lökvexter hafva i allmänhet en mycket kort vegetationstid; blad och blommor framkomma mycket tidigt på våren, men både blommor och blad vissna snart och äfven frukten är vanligen fullbildad redan vid midsommartiden. Men nere i jorden fortgår lifvet i löken, och här utbildas anlaget till det kommande årets blad och blommor, som derefter vid den nya vegetationstiden hastigt framskjuta. Det är väl till följe af detta utvecklingssätt, som sådane vexter fördraga äfven vintrens köld i det södra Sverige; de pryda öfverallt rabatterne i våra trädgårdar, under det att andra medelhafsregionens vexter uppdragas i våra vexthus.

Jag har med dessa nära till hands liggande exempel endast velat antyda, huruledes många vexter, som trifvas och i den fria naturen endast förekomma under mera säregna locala förhållanden, synas genom särskilda anordningar vara lämpade för det lif, som de föra. Det är i sådane fall stundom talrika arter af olika slags vexter, stundom särskilda arter, som hafva förmågan utveckla sig på den säregna lokalen, under det andra och ofta närstående arter icke sålunda förekomma. — *Lobelia Dortmanna* förekommer vexande på botten i våra sjöar, under det många andra *Lobelia*-arter pryda rabatterne i våra trädgårdar.

Om i de anförda exemplen hela vextens lif tyckes vara afpassadt för dess förekomst på särskilda localer, så torde ock kunna visas huru i andra fall olika vexter tyckas danade för att fullgöra vissa lifvets functioner på egendomligt sätt, hvarigenom de mer eller mindre afvika från andra vexter. Jag skall tillåta mig några få exempel äfven i detta afseende.

Uti en särskild afhandling *Somnus Plantarum* redogjorde Linné för vissa egendomliga företeelser hos vexterne, som kanske närmast framkallas under ljusets inflytande. Han sammanförde dem under benämningen *vexternes sömn*, ehuru han sjelf anmärker, att benämningen är mindre passande. Han

¹⁾ Uti Kjellmans arbete: *Polarvexternes lif* lemnas nya bidrag till kännedomen om naturens anordningar i detta afseende; till hvilket arbete här ock må hänvisas.

säger: Har man en sommarnatt genomvandrat ängar och skogar, trädgårdar eller vexthus, bör man hafva märkt de olika utseenden som vexterne förete, i det bladen då hafva en helt annan ställning än om dagen, sänka eller höja sig, stå upprätta eller sammandraga sig på olika sätt hos olika arter; dessa förändringar kunna icke härledas från nattens kyla, emedan samma förändringar visa sig i vexthusen som i den fria naturen; bladen sluta sig äfven der tillsammans på sitt bestämda sätt och öppna sig åter vid solens första strålar; och de göra det antingen fönstren stå stängda eller öppna. Han säger vidare, att förändringen framträder tydligast hos växter med sammansatta blad; och han redogör derefter för 10 olika sätt, hvarpå 40 af honom observerade olika arter ställa sina blad under sömnen mer eller mindre olika. Arter af samma familj (*Sida*, *Malva*, *Hibiscus*) kunna förhålla sig olika, under det arter af mycket olika familjer kunna förhålla sig lika. De Candolle (*Phys. Veget. p. 854*), som efter Linné redogör för bladens olika ställningar under sömnen, ger därför en förklaring, som väl näppeligen kan anses förklara fenomenet annorlunda, än att det åstadkommes under inflytande af ljusets olika inverkan; och därför talar jemväl det förhållandet, att vid solförmörkelse man kan få se Leguminosernes blad sluta sig tilltillsamman under dagen, lika väl som vid nattens inträde. I allmänhet antaga väl vexternes blad den ställning, att bladets öfversida vänder sig mot ljuset; och bladskifvan utbreder sig oftast horisontelt; på växter med större bladskifva (t. ex. Vinrankan), när de spalieras mot en mur, kan man få se bladskifvan antaga en vertical ställning, med bladets öfversida utåt vänd. Det synes således väl antagligt, att äfven bladens ställning under sömnen närmast föranledes af ljuset. Det kunde väl ock ifrågasättas, huruvida icke bladets olika ställningar hade till uppgift att underlätta bladets olika functioner under dag och natt; men redan Linné observerade, att hos några Leguminoser är det bladets öfversida, hos andra dess undersida, som under natten tryckes intill det motsvarande parblad, hvilket icke synes stå väl tillsammans med en sådan förmodan. Linné gaf också sjelf en antydning om, att möjligen ett annat ändamål vore afsedt med den under natten antagna bladställningen. Han berättar nemligen om *Lotus Ornithopodioides* att, då denna vext första gången blommade i Upsala bot. trädgård, Linné, som under dagen sett 2:ne blommor utslagne,

förgäfvcs eftersökte desamma på aftonen; men att blommorne följande dag åter voro synlige. En nogare undersökning om aftonen visade da att de förkomna blommorne befunnos dolda af de på egendomligt sätt sammanslutna bladen, deraf det ena likasom ett tak låg öfver de andra. Hos *Cassia* intogo de sofvande bladen sin egendomliga ställning genom att sjelfmant böja sig på ett sätt, som man om dagen med konst knapt kan astadkomma utan bladets sönderslitning. Huru olika dessa bladställningar kunna förekomma, så lämpa de sig väl att afföra den på bladets yta bildade daggen, hvilket också af Linné om flera antydes. Och denna tydning star väl tillsammans med bladställningens förändringar vid de tider, da daggen bildas och da den upphör.

Det torde nemligen icke kunna betvivlas, att daggbildningen utgör en kanske alltför mycket obeaktad factor för vexterens lif, serdeles på vissa ställen (i alpiska trakter, och kanske mest i varmare länder, der regn mera sällan förekommer). När man hos vissa vexter, t. ex. en *Funkia*, ser huru bladets »nerver», hvilka bilda mindre rännor på bladets öfre yta, alla utmynna i den stora ränna, hvilken från medelnerven fortsättes på bladstjelnens inre sida till den axila knopp, hvarifran bladen utgå, så frestas man antaga att hela denna anordning tillkommit för vattnets afledning till bestämdt ställe. Hos *Ravenala* (l'arbre du Voyageur) sluter sig en liknande ränna tillhopa till en rörformig vattenreservoir, som städse innehåller drickbart vatten; och hos flera Bromeliaceer ser man de till rännor formade bladens nedre delar ofta fyllda med vatten. Liknande anordningar paträffas hos många andra vexter, och man kunde lätt nog tro att regn och dagg för bestämdt ändamål föras ned till bladens axiller, som äro utgangspunkten för nya knoppar.¹⁾ Hos *Tillandsia usneoides*, som är omtalad för att kunna lefva till och med upphängd på ett jernstaket (på de Vestindiska öarne), försvinna rötterne tidigt, men hela vexten är beklädd med egendomligt bildade fjäll, hvilka utomordentligt lätt uppsupa vatten, som derifrån, jemte deri upplösta ämnen, ingå i bladväfnaden.

Framför alla andra vextliffvets företeelser synas mig de som på ett eller annat sätt stå i samband med artens fortplantning genom egna, uteslutande för detta ändamål danade organer kunna förtjena uppmärksamhet. Det torde väl kunna

¹⁾ Uti en afhandling (*Die Anpassungen der Pflanzen an Regen und Thau*) af Doc. Lundström, redogöres för flera olika slag af anordningar, till hvilka jag här här endast skall hänvisa.

sägas, att ingenstädes inom vextverlden naturen använt en motsvarande rikedom på olika former och olika utvägar, hvilka synas tillkomme för bestända ändamål och hvardera på sitt sätt motsvara sin uppgift. Den oändliga nyanceringen i blomstrets och blommans former, de förändringar såväl hos viktigare organer som accessoriske bildningar, hvilka förekomma i olika vexters blommor — huru betydelselösa de än stundom kunde förekomma — alla synas de hafva sin betydelse och antyda utan tvifvel olikheter i det sätt, hvarpå olika vexter förbereda nya generationer, nya representanter af det lif som danat dem. Linné använde i rikaste mått alla dessa modifikationer i blommans structur vid karakteriserandet af vexternes släkten; och just emedan öfverensstämmelser i detta afseende hos olika arter antydde öfverensstämmelse i fullgörandet af vextliffvets viktigaste function, blefvo äfven de af honom uppställda släktena »naturliga».

Öfver sjelfva sättet huru blommans bildning — med sina för hvarje slägte säregna modificationer — lämpade sig för visst ändamål, derom uttalades väl först en bestämd mening i Chr. K. Sprengels för sin tid onekligen utmärkta, men dock länge allt för mycket förbisedda arbete: *Das entdeckte Geheimniss der Natur im Bau und in der Befruchtung der Blumen*, Berlin 1793. Om ock här och hvar förekomma sökta tolkningar och kanske öfverdrifter i flera fall med afseende på insekters outhärlighet för befruktningsens fullgörande, så finnas dock en sådan mängd detaljerade observationer, att man icke gerna kan betvifla de allmänna slutsatser, som han anser sig deraf kunna draga. Sprengel hade observerat, att vid beröring med vatten Pollen-kornet brast och utkastade dervid sitt innehåll. Han drog deraf slutsatsen, att under blomningen ståndaren nödvändigtvis borde vara skyddad både för regn och dagg; och dermed ansåg han jemväl förklaradt, hvarföre blomman både är tillsluten under den tid daggen faller, och hvarföre den öppnas förr eller sednare på morgonen; han anmärkte att den vidöppna blomman af samma skäl vore mer eller mindre lutande eller hängande; men att den upprätta ofta hade formen af ett rör, som genom kransar af hår eller fjäll på olika sätt kunde hållas slutet. Framför allt fäste Sprengel uppmärksamhet på nectar-afsöndringen i blomman, såsom ett utmärkt lockbete för många olika slag af insekter, och huruledes nectariet vore placeradt på sådant sätt, att den besökande

insekten måste, för att åtkomma nectarn, nödvändigt beröra såväl ståndare som pistiller, och sålunda på ett eller annat sätt bidraga till pollens öfverförande till stigmat. Sprengel skiljde således noga emellan saftblommor och sådane som saknade nectarier; han hade jemväl anmärkt, att vissa blommor hade utseende af att vara saftblommor, men likväl saknade nectar-afsöndring, hvilken dock hos dessa stundom ersattes af annan inrättning. Sprengel trodde sig vidare hafva observerat att sjelfva blommans teckning med sina olika färger hade sin betydelse, att den likasom för insekten angaf sättet, huru den på blomman borde placera sig, hvarigenom dess dubbla uppgift också bäst tillgodosågs. Han visade, att jemväl bland de hermaphrodita blommorne ståndarnes öppnande i vissa blommor icke inföll samtidigt med den i samma blomma varande pistillens mogenhet för befruktningen; att följaktligen pistillen i en blomma måste befruktas af pollen ifrån en annan; och att i sådane fall det vore insekternes uppgift, att vara öfverförare af pollen ifrån den ena blomman till den andra. Det kan icke här vara platsen att anföra särskilda observationer, för hvilka Sprengel i detalj redogör. Öfverallt i hans omfattande arbete framskyntar åsigten att hvarje, och äfven den till utseendet obetydligaste egendomlighet i blommans struktur har sitt bestämda ändamal. Sprengels observationer hafva i nyare tid blifvit af flera fullföljde.

På den tid Sprengel gjorde sina observationer hade man ingen aning om pollenets utbildning och olika former hos olika vexter, lika litet som man kände pistillens inre struktur och den ledande cellväfvens tillvaro och utsträckning — olikheter, hvarigenom andra modificationer i foecundationens fullgörande uppstå hos olika vexter.

Och det är icke nog med de egendomligheter, som förekomma i olika blommor och de vid foecundationen egentligen fungerande organerne; de utgöra i många fall endast en del af de anordningar, som stå i samband med foecundationen. Om hos de dioika vexterne de fungerande organerne utbildas på särskildta individer, så kunde det nästan sägas, att dessa individer redan från sin första tillkomst voro danade för sin uppgift. Man har observerat att hos Palmer, hvilkas öfre stamdel blifvit på längden genomskuren, blomster funnits anlagda icke blott för de närmaste åren, utan till och med de, som skolat framkomma på 7:de året derefter, funnits i anlag.

Hos *Tragopogon*, *Taraxacum* m. fl. öppnar och sluter sig blomstret hvarje dag, så länge befruktningen ännu icke är afslutad; men derefter förblifver blomstret slutet o. s. v.

Skall foecundationen hos vattenvexterne försigga ofvanom vattenytan,¹⁾ så är lätt begripligt, att hos dem egna anordningar torde vara behöfliga. I allmänhet synas de tillväxa med stor hastighet och medhinna derigenom, äfven då de vaxa på djupare vatten, att uppnå vattenytan vid blomningstiden. *Utricularierne* förekomma i kärren, som det synes utan fäste af rötter, utbredande sig öfver botten-slammet; men smaningom utbildas hos dem en adparat af egendomliga blåsor, med hvilkas tillhjälp vexten lyfter sig i vattnet och skjuter sin stängel med blommor upp öfver vattenytan. Efter blomningen foregår en förändring i flyt-adparaten, och vexten sjunker åter ned i vattnet.

Lobelia Dortmanna, som vexer på grundare vatten kring våra sjöar, har sin rosett af tumslånga blad nere vid botten; men skjuter vid blomningstiden sin spensliga stängel af en fots längd, eller mycket längre (efter vattnets djup), upp öfver ytan, och utvecklar der sina blommor.

Det har ofta blifvit omtaladt — i vetenskapliga arbeten och i poetiska utgjutelser — huru hos *Vallisneria spiralis* den foeminina blommans stängel förlänges efter vattnets djup tills den nar vattenytan, och huru den, spiralformigt vridande sig, kan sammandragas och förlängas i den mån vattnet faller eller stiger; huru deremot det masculina blomstret på en kort stängel sjelf qvarsitter nere vid roten; under det de särskilda blommorne lossna hvar för sig, och flyta upp till vattenytan, der de samlas kring den foeminina blomman. Sedan denna här blifvit befruktad, drager dess spiralvridna stjeln sig åter tillhopa, och frukten fulländar sin utveckling under vattnet. Om ock det är antagligt, att de masculina blommornes uppflytande till vattenytan och deras sammanförning kring den foeminina stängeln på ytan hvilande blomma åstadkommes genom egna mekaniska anordningar, lika väl som den foeminina stjelnens förkortning eller förlängning medelst spiran, så torde man väl dock hafva svårt antaga, att hela denna complex af anord-

¹⁾ Man känner numera, att flera phanerogama vexter blomma under vattnet; och hos stora grupper af de Cryptogama vexterne är det med tillhjälp af vattnet, som de foecunderande organerne förmå närma sig de foeminina organerne.

ningar tillkommit genom någon slump, eller successivt utbildats genom tillfälliga anledningar. Det egendomliga uti den foeminina blomstängelns förhållanden skulle varit utan ändamål, om icke den motsvarats af anordningarne med de masculina blommorne; och anordningarne med dessa sednare skulle blifvit fruktlösa, utan de förras tillvaro. För det opartiska omdömet torde badas tillvaro och för hvarandra passande säregna daning tyda på, och måhända kunna anses såsom bevis för en bestämd plan för deras utbildningssätt och samverkan.

Om man med Linné säger, att hvarje art med sin formkrets och sitt särskildta lif blifvit ursprungligen danad på sitt säregna sätt, afpassadt efter de förhållanden under hvilka vexten var afsedd att lefva, eller man med Darwin antager, att vexten har en förmåga att ombildas under yttre förhållandens påtryckning på det sätt som passar för olika lefnads-sätt, eller den anses själf ega förmåga att utbilda sina delar på olika sätt, så torde måhända både det Linneiska och det Darwinska antagandet kunna anses förklara vextformernes mångfald, för så vidt man endast afser att antyda sättet, huru formerne kunde tänkas hafva uppstått. Men vill man förklara icke blott sättet huru formerne kunde tänkas hafva tillkommit, utan äfven *hvarjeföre* de tillkommit danade på olika sätt, så förekommer det mig som skulle teorien om *descent with modification* icke lemna något synnerligen tillfredsställande svar. Det synes mig ligga nära till hands att fråga: hvarjeföre denna oändliga mångfald i blommans structur och i sättet hvarpå nya generationer tillkomma, om dermed endast afsågs att bilda nya kämpar i den allmänna striden för tillvaron. Man skulle tycka att ett sådant mål lättare skulle vinnas genom förenkling af blommans structur, och förenkling af sättet hvarpå organerna fungera. Men, för så vidt man känner ordningen för organismernes framkomst på jorden, synas denna antyda att utvecklingen fortgått ifrån lägre och enklare till högre och mera complicerade former; blommor med enklare structur föregingo dem med mera sammansatt: hos dioika och andra relativt lägre vexter öfverföres pollen i rykande massor med tillhjälp af vinden; om hos många relativt högre stående vexter pollen måste öfverföras med tillhjälp af insekter, så måste väl detta anses för en complicering, som i hög grad måste försvåra foccundationens fullgörande. Om man anser korsningar och hybrider såsom medel för nya

arters framkomst, hvarföre denna mångfald i de fungerande organernes structur, som långt ifrån att befordra hybriders uppkomst, måhända på goda skäl snarast kunde anses tillkommen för att hindra deras bildning. Linné fann ett svar på dessa frågor i skapelsens afsedda mångfald och rikedom: i den åsyftade tillvaron af särskilda arter. danade för olika ändamål, och försedda med organer lämpade för de functioner de hade att fullgöra. Ingen fläck på jorden skulle vara utan sina vexter, och alla motsvarande de ändamål, för hvilka de tillkommit.

Enligt den Linneiska uppfattningen af arterne — såsom uttryck för olika lif — och af hela det naturliga systemet — såsom uttryck för större och mindre livvets olikheter hos olika grupper — blef artkännedom och system vigtiga delar af vetenskapen. Den Darwinska uppfattningen måste, så vidt jag förstår, nödvändigtvis föra till ett ringaktande af båda; och redan nu torde af det moderna behandlingssättet tydligt nog framgå huru de uppskattas. Den olika uppfattningen i ett afseende synes således medföra äfven andra, som icke kunna vara likgiltiga.

Af den Linneiska uppfattningen om arternes daning på olika sätt, både för att kunna lefva under olika förhållanden och för att kunna fullgöra livvets functioner på sitt bestämda sätt, torde nödvändigtvis följa, att olika vextarter tillkommit på olika tider. De örter, som nu trifvas i skogarne, kunna icke gerna antagas hafva tillkommit förrän skogen sjelf förefanns, den må hafva bestått af samma slags träd som nu eller af andra; de parasitiske vexterne böra väl icke antagas hafva tillkommit förrän deras när-planter redan funnos till. Det kan väl icke heller antagas att de vexter, som för foecundationens fullgörande erfordra insekters biträde, tillkommit förrän äfven dessa fått sin tillvaro. På den nyfödda jorden måste länge de yttre förhållanden saknats, som gjorde ett mångskiftande vextlif möjligt. Det har redan ofvanför blifvit anmärkt, att Linné på olika ställen yttrar sig i något olika ordalag om tiden för arternes framkomst. Han säger, att arterne tillkommit *ab initio, in primordio*, utan bestämdt angifvande om detta *initium* afser den särskilda artens uppkomst, eller möjligen vextrikets, eller särskilda skapelse-perioders. Måhända har han med flit begagnat dessa obestämda uttryck, för att icke gifva anstöt åt sin tids vanliga föreställningar.

VII. Olika arters större eller mindre inbördes öfverensstämmelser; arternes deraf beroende närmare eller fjärmare släktskap; betydelsen af systemets grupper.

Det har ofta blifvit anmärkt, att naturens arter hvarken äro åtskiljde genom karakterer af särskildt slag, eller genom gränser, som äro dragne på bestämda afstånd ifrån hvarandra. Likasom det gifves släkten, inom hvilka arterne äro hvarandra mycket lika, så gifves det andra, inom hvilka de äro mera olikformiga. Och motsvarande förhållanden förekomma med afseende på släktena inom familjerne, i det dessa än hafva hvardera sin egendomliga utstyrsel, än kunna vara hvarandra mycket lika. Dessa olikheter måste utan tvifvel förekomma mycket anmärkningsvärda för hvarje reflecterande systematiker; och man har sökt genom olika hypoteser förklara deras tillkomst. Så antog Linnés omnämnda hypotes, att ett slägte af hvarje ordning ursprungligen blifvit skapadt, och att arterne tillkommit genom korsningar mellan mer och mindre olika stamfäder; och i en uppsats om vexterens perfectibilitet uttalade sig jemväl E. Fries för den mening, att släktena ursprungligen tillkommit, och att arterne sedermera utvecklade sig i olika former, till följd af en hos organismen nedlagd förmåga af perfectibilitet. Det har ofvanför blifvit anmärkt, huru väl de Darwinska åsikterne lämpa sig för att förklara alla de olika gradationer af öfverensstämmelser och olikheter, som systemets olika grupper erbjuda. Men det har också blifvit påpekadt, att Darwins antaganden i flera riktningar synas stå i strid med i naturen observerade förhållanden; och att således nämnde åsikter torde böra förkastas, huru förledande de ock kunde förekomma. Om man — med förbi-seende af nämnde Linnés hypotes — accepterar Linnés lära om i naturen bestämda och bestående arter hos vexterne, så torde det böra efterses, i hvad mån det från denna ståndpunkt, och på grund af hvad naturen sjelf synes angifva, kan vara möjligt att finna en förklaringsgrund för vissa af de förhållanden, som de nämnde hypoteserne på annat sätt sökt tyda.

Linné antog att släktena, lika väl som arterne, voro i naturen bestämda, för så vidt som de utgjorde sammanfattningar af de arter, hos hvilka vextllifvets vigtigaste functioner

fullgjordes på enahanda sätt; han grundade följaktligen släktenas karakterer på de organer och delar, som han antog hafva den största betydelse i vexternes lif; och i *Phil. Bot.* redogjorde han omständligt för de olika fructificationsdelarnes större och mindre vigt i sadant afseende. Då fructificationsdelarne voro öfverensstämmande, ansåg han olikheter i habitus hafva ringa betydelse för antydandet af olika släkten. I stället för att han i tidigare arbeten upptog flera, mest på habituella characterer grundade, Tournefortska släkten (*Persicaria*, *Bistorta*, *Polygonum* och *Helxine*), så sammanfördes dessa i sednare arbeten. — Antager man med Chr. C. Sprengel att blomans och blomdelarnes olika daning hos olika vexter antyder en egenhet i fullgörandet af vextlifvets vigtigaste function — den som afser artens fortplantning och vidmagthallande — så måste väl ock följa att vexternes släkten, grundade efter Linneanska principer, så till vida måste betraktas såsom i naturen fastställda, som det är naturen sjelf som åt alla arter inom släktet gifvit en daning, hvilken mer eller mindre afviker från arters af andra släkten. Far man derjemte antaga, att öfverensstämmelse i en vigtigare function har större betydelse, än öfverensstämmelse i en, eller kanske flera mindre viktiga, så har man väl icke så ringa skäl för antagandet att det gifves naturliga släkten, och att de Linneanska bestämningarne hade till mål att framställa dessa, om ock dervid manget misstag kunnat blifva begånget.

Allt efter som släktena i samtliga eller färre af fructifikationsdelarne voro öfverensstämmande eller mera afvikande, måste man väl tänka sig släktena närma sig eller fjerma sig ifrån hvarandra, och bilda sålunda systemets högre grupper, som blifva naturliga grupper i den mån vetenskapen förmår uppspåra öfverensstämmelserne och skilja de betydelsefullare från de mindre viktiga.

Under det således enligt Linnés uppfattning Genera, så väl som systemets alla högre grupper, skulle uteslutande grundas på fortplantningsorganernes beskaffenhet och organisation, bygde han deremot art-diagnostiken på characterer af annan art — hemtade från de delar, som betinga vextens allmänna utseende och deribland främst från dem, som tjena för nutritionen; och han gick i detta afseende så långt, att han stundom icke ens antog såsom skiljda arter sådana former, som, öfverensstämmande i habitus, sinsemellan afveko i fruktens yttre

form (*Medicago*-arterne). Men, utom de för diagnostiken valde charactererne, sökte han äfven angifva både biologiska egenomligheter och de yttre förhållanden, under hvilka vexten lefde. Uti den *Skånska resan* yttras (p. 100): »Skugga fordras af många vexter så oungämeligt, som andra önska öppet fält. De örter som växa i skuggan blomma alla mestadelen om vartiden, bevaras genom de tätt växande löfträn från solens brännande hetta och om hösten äfven skyggas ifrån frost; så att skuggörterne rätt så snart brännas af de kalla höstnätter som någonsin de indianske vexter, det jag med förundran sett i Upsala trädgård äfven på Lappska örten *Ierja* (*Sonchus alpinus*) och andra. I skuggan under de täta och löfrika trän blir alltid en lös mylla, som jämt hålles i sin fuktighet, hvilket till största delen härrörer af de myckna löfven, som ärligen nedfalla, täcka jorden att hon ej får evaporera, hvarigenom sker att andra örter förqvävas, då skuggörterne här allenast och endast trifvas» — —. Linné redogör också (i *Flora Svecica*) mera omständligt för de yttre locala förhållanden, under hvilka hvarje art förekommer, jemte det han redogör för dess utbredning o. s. v. äfvensom för af honom anmärkte biologiska förhållanden. Han antog för visso att dessa biologiska egenomligheter tillhörde arten, att de bidrogo att characterisera den, ehuru han icke använde dem i diagnoserne.

Jag har i det föregående sökt visa, att man hos många vexter tydligt nog kan spåra, att de blifvit danade för att lefva på särskilda localer, under olika yttre förhållanden, der det måste antagas att lifvets functioner fullgöras i någon mån på olika sätt. Det är ofta vexter af olika familjer, som lefva jemte hvarandra på dessa särskilda localer, likasom de af Linné uppräknade skuggvexterne tillhöra olika familjer. Om så är förhållandet, så följer väl att localens egenomlighet icke inverkar på fortplantningsorganernas beskaffenhet, hvarefter både släkten och systemets högre grupper bestämmas. *Lobelia Dortmanna* har characteren af en *Lobelia*, fastän den lefver på annat sätt än många andra *Lobelier*. Den nordiska *Nigritella*-arten antages vara samma art, som förekommer på södra Tysklands alpiska ängar; om befruktningen hos den försiggår med tillhjälp af insekter, så är det väl dock möjligt, att det är andra arter som biträda, ehuru befruktnings-organerne på de olika localerne äro desamma. Om i den täta löfskogen vissa vexter trifvas, under det andra der skulle förqvävas så tyder

väl detta på egendomligheter som äro gemensamma för skuggvexterne, och som väl äfven kunna anses antydda genom deras habituella olikheter från andra arter af de släkten, som de tillhöra.

Under benämningen saftplantor (*Succulenta*) sammanfattar man ofta vexter af mycket olika familjer, som, ehuru vexande på de torraste och regnfattigaste localer, likaväl utmärka sig genom sin stora saftrikedom. Cacteerne, som väl alla kunna sägas tillhöra dessa vexter, förekomma nästan uteslutande inom det tropiska Amerika, (i största antal i Mexiko och Södra Amerika). Linné kände deraf några och tjugo arter; 1822 uppgaf Schouw deras antal till 40—50; och nu uppgifver man ända till 1000 arter. Denna stora mängd arter synas danade efter några få typer, i det några stå upprätta som pelare, andra greniga som kandelabrar, andra melonlika; många med väldiga dimensioner; Opuntierne äro ledade, andra äro krypande eller uppstigande vid något stöd; de flesta äro mer eller mindre taggiga, taggarne knippevis utgående från utstaende kanter, ribbor eller koniska upphöjningar; endast *Pereskia*-arterne hafva bladlika delar och äfven dessa äro köttiga. Blommorne äro hos olika släkten af familjen i viss man olika, men lätt nog skiljda till character från alla andra familjer. Närmast komma *Mesembryanthemum*-formerne, hvilka i stort antal (300 arter) förekomma i Afrika, hufvudsakligen i dess södra del, (derifrån man jemväl uppgifver en art af *Rhipsalis* (Cactus-form). Få landskap, säger Humboldt, göra på främlingen större intryck än dessa torra slätter, tätt betäckta med sina egendomliga cactus-former. Af den gamla världens continenter är det endast Afrika, som har några motsvarande former, arter af *Euphorbia* och *Cacalia*, som kunna sägas representera den nya världens Cacteer.

Den redan af Humboldt antydda likheten med Euphorbier torde väl kunna förekomma förvånande för dem, som endast känna detta stora släktes Europeiska former. Men man odlar numera i vexthusen tulrika arter af *Euphorbia*, som stundom äro så lika vissa Cactus-former, att man har svårt att skilja dem före blomningen; men blommorne visa sig så fullkomligt öfverensstämma med de vanliga Euphorbierne, att äfven nuiden sammanför dem inom samma släkte. Likasom hos Cacteerne gifves det både pelarlika och kandelaberlika, melonformade och Opuntielika, krypande och trädlika former, ofta

försedda med utstående kanter, ribbor eller koniska upphöjningar, och många med taggar. Man känner sådane arter från Arabien och Nubien. från Senegal och Canariska öarne, några få från Ostindien, och många från Caplandet, der de uppgifvas förekomma på torra och klippiga localer.

På Caplandets torra slätter förekommer jemväl en annan form af succulenta vexter, de flesta hänfödda till släktet *Stapelia*, några till ett par andra närstående släkten. Man känner omkring 100 arter, alla bladlösa, med köttiga, greniga, fyrkantiga stammar af ofta fingers tjocklek, från hvilkas utstående kanter radade spetsiga taggar utgå. Men blommorne förete ingen likhet hvarken med Cacteer eller Euphorbier; man har utan tvekan hänfört dem till Asclepiadeerne. De nu nämnda 3:ne slag af succulenta vexter, som så väsendtligen öfverensstämma i yttre utseende, hänföras i systemet hvardera till sin plats af de 3 stora afdelningar, hvori man ofta fördelat de Dicotyledona vexterne.

Det förekommer mig, som man kunde vara berättigad att, med stöd af hvad dessa succulenta vexter lära oss, draga en och annan slutsats rörande några af de frågor, som i våra dagar ofta utgöra föremål för den vetenskapliga discussionen.

Om vexter af mycket olika familjer lefva tillsammans på säregna localer och der antaga ett från andra vexter af samma familjer afvikande utseende; och om detta utseende får samma allmänna prägel hos alla de vexter af olika familjer, som på den säregna lokalen förekomma; så torde det väl böra antagas att de samtliga blifvit bildade på ett sätt, som motsvarade det lifs fordringar, som de der skulle föra. De danades för detta lif icke blott genom sin egendomliga architectonik, utan jemväl genom de hos dem utvecklade delarnes säregna struktur, som utan tvifvel är fullt afpassad för nutritionens behof under de gifna förhållandena.

Om de vexter, som lefva under dessa egendomliga förhållanden, som der trivas och utvecklas stundom i väldiga dimensioner och i en stor rikedom af arter, tillhöra mycket olika familjer, och hvardera af dessa familjer, eller släkten, eller grupper af arter inom ett släkte, bibehålla sin familj- eller slägtcharacter oförändrad, så synes man väl berättigad antaga, att de locala förhållanden, som i så hög grad sätta sin prägel på yttre form och inre struktur hos de delar som tjena för nutritionen, lemna deremot organerne för fortplantningen

oberörde. De succulenta Euphorbia-arterne torde näppeligen kunna sägas afvika i blommans delar från andra Euphorbia-arter, som förekomma under andra locala förhållanden.

Får man utsträcka consequenserne äfven till andra vexter, så torde det böra antagas att likasom blomman, och de olika delar som tjena för fortplantningen, gestaltas och modifieras olika efter de olika sätt, hvarpå fecundation och fortplantning fullgöres hos olika vexter, så gestaltas och modifieras vextens allmänna architectonik och de delar som tjena för vextens nutrition (närmare eller fjärrare) efter de olika yttre förhållanden, för hvilka vexten är danad att lefva. Så få de skuggiga skogarne sina vexter, de öppna soliga fälten sina, med former och delar afpassade för det lif de der skola föra.

Om olika arter af samma slägte äro danade för att lefva under mycket olika locala förhållanden, så kunde det måhända också antagas, att sådana arters yttre gestalt skulle förekomma mera varierad, och arterne sålunda blifva lättare och tydligare åtskilde; der åter talrika arter förekomma under enahanda eller snarlika förhållanden, borde man ock kunna vänta att sådana arter skola visa större öfverensstämmelser sins emellan. De af Linné till en enda art hopförde många arter af slägtet *Medicago*, som förekomma i medelhafsregionen, borde således ock kunna väntas sins emellan mycket öfverensstämmande, lika väl som de talrika Cactus-arterne blifva mycket likformiga, och Florideerne, som lefva under egendomliga förhållanden i hafven, få samtliga samma, från alla andra vexters mycket afvikande, färg.

Om man nu med Linné antager, att slägtet, likasom systemets högre grupper äro bestämda genom mer eller mindre egendomlighet i fortplantningsorganerne, men arter, som deri öfverensstämma, kunna vara danade för att lefva under olika locala förhållanden, så blir väl ock förklarligt, hvarföre stundom någon viss afdelning af ett slägte (*Acaciæ aphyllæ*), stundom samtliga slägtets arter (*Stapelia*), stundom hela eller den öfvervägande delen af en familj (*Cactæe*, *Florideæ*) får en från andra arter, andra släkten eller andra familjer afvikande prägel.

Jag har för visso icke föreställt mig, att dessa antydningar skulle innebära någon förklaring, hvarför olika vexter antaga olika former för sina delar; jag har endast velat antyda huru man kunde föreställa sig uppkomsten af de likheter och olikheter, som så ofta förefinnas hos både sins emellan besläg-

tade former och hos arter, som icke stå i något släktskapsförhållande till hvarandra, och hvilken betydelse för systemet dessa likheter (i olika gradationer) kunde äga. Linnés hypotes sökte förklaringen för likheten emellan arter af samma släkte uti antagna korsningar mellan samma modervext och olika fäder. Och Darwin fann förklaringen i en vextens förmåga af variering, och ett successivt bortfallande af mellanformer, hvarigenom alla de gradationer i likheter och olikheter, som synas genomgå hela systemet skulle uppkomma. För min del har jag vågat tro, att man icke har befogenhet att tillgripa dessa förklaringar, som enligt min uppfattning tillbakavisas af i naturen förekommande förhållanden; de likheter och gradationer af likheter, som vi påträffa i naturen, synas mig nödvändigtvis skola uppstå, till följe af olika vexters daning för olika ändamål. Grundar man (med Linné) både släkten och det naturliga systemets högre grupper på öfverensstämmelser i de delar, som afse fortplantningen; men arterne inom de sålunda gifna grupperne på öfverensstämmelser i de delar, som afse nutritionen, så torde det ligga i sjelfva systemets mekanism, att de många synbara likheter och olikheter af olika slag och i olika gradationer, som man öfverallt påträffar i det naturliga systemet, måste uppkomma. Likasom det gifves olikheter, som endast antyda olika åldrar och olika kön, så gifves det särskilda karakterer för arterne, och särskilda för släktena. Släktkarakteren kan stå fast oförändrad, utan afseende på de större eller mindre olikheter, som förekomma emellan släktets arter. Om arter af olika släkten blifvit danade för att lefva under samma eller snarlika förhållanden, så skola dessa i många fall sannolikt sätta sin liknande prägel på arterne, huru olika samma vexter kunna vara i de delar, som bestämma dess släktskap och plats i systemet.

Uti den stora, i många afseenden oändligt skiftande grupp af vexter, som sammanfattas under namn af Phanerogamer, öfverensstämma alla deruti, att hos dem fortplantningen försiggår på annat sätt än hos de grupper, som länge sammanfattades under namn af Cryptogamer. Skulle man ock kunna uppspåra en Phanerogam vext, som i andra afseenden huru mycket som helst närmade sig en Cryptogam, det borde dock icke kunna ifrågasättas, att den utgjorde en medlande länk emellan båda, så vidt fortplantningen hos den fullgjordes på samma sätt som hos andra Phanerogamer. Cryptogamerne

skilja sig ifrån dessa genom fortplantnings-organerne, utan allt afseende på utbildningen af de delar, som tjena för nutritionen. Det torde vara lika oriktigt att anse något släktskapsförhållande existera emellan en *Nitella* och en *Bryopsis*, som mellan en *Oxalis* och en *Marsilea*; eller att i deras likheter se en analogi, som kunde äga någon som helst systematisk betydelse. Vill man i de anförda exemplen finna någon öfverensstämmelse, så finnes den i delar, hvarpå systemet icke bygger sina grupper; deremot äro de nämnde släktena sins emellan mycket afvikande just i de karakterer, som för den systematiska grupperingen hafva någon betydelse.

Menyanthes trifoliata har en gang kallats *Trifolium aquaticum*; man sammanförde nemligen da de till *Trifolium* räknade arterne på grund af en öfverensstämmelse i bladform. Det var en *analogi*, som man väl nu mera icke anser hafva någon som helst systematisk betydelse. Så länge man grundade Algernes systematik på arternes olika form och yttre habitus (Lamouroux—Greville), omfattade de antagna släktena mycket likformiga arter. Sedermera fann man att dessa likformiga arter stundom sins emellan högst betydligt afveko i inre structur. Kützing, som bygde Algsystemet i väsendtlig mån på den inre structuren, nödgades ofta skilja de på habitus grundade släktenas arter i nya olika släkten. När slutligen man var i tillfälle att jemföra sins emellan de sålunda bildade släktenas fructificationsorganer, måste man åter antaga andra släkten och andra grupperingar, i hvilka än förut åtskiljda arter sammanfördes, än förut sammanförda åtskiljdes. Så beror den systematiska grupperingen väsendtligen på den grundval, som därför väljes. Åtskiljas arter på grund af olika fructification, som förut kunnat sammanföras inom samma släkte på grund af likhet i habitus, så kunna dessa former möjligen anföras såsom bevis för analogier inom naturens olika grupper; men en sådan analogi är för visso beroende på en egendomlighet, som för naturens system näppeligen har någon betydelse.

VIII. Undret i Naturen.

Försöken att tyda den organiska naturens stora gåta kunna spåras långt tillbaka i tiden; men ännu, i den dag som är, torde det väl kunna sägas, att denna gåta är olöst. Den moderna

naturforskningen redogör allt nogare för organismernes yttre och inre byggnad; för deras utvecklings ordning och successiva förändringar; den har lyckats finna förklaringen för många lifvets fenomen, och den har uppdagat många af de medel, hvaraf lifvet betjenar sig för utförandet af sina skapelser; men har den väl dermed lyckats tyda sjelfva lifvets väsende?

Öfver sättet huru organismerne tillkommit, huru vid skapelseakterne tillgått, hafva olika hypoteser blifvit framstälde. En af nutidens tongifvande naturforskare har redogjort för och karakteriserat några af de olika hypoteserne derom på följande sätt:

Några tro att organismerne tillkommit i utbildadt tillstånd: det är Undret i ursprunglig och naiv form. Oken uttalade hypotesen, att icke blott de lägsta djuren uppkommit i tillstånd af ägg, utan äfven att de högre uppstått såsom kolossala ägg, ur hvilkas skal de såsom fullt utbildade framkrupit: det är Undret i bizarr och anstötlig form.

Åter andra låta organismerne hafva tillkommit såsom foster: det är Undret i blyg form, som söker undandraga sig närgångna blickar. Åsigten må hafva värde i deras ögon, hvilka söka undvika antagandet af ett öfvernaturligt ingripande, i plumpare form, och heldre förlägga det till regioner, dit föreställningen mindre följer med och ser mindre klart.

Sträfvandet för våra dagars naturforskning är tydligt nog, att borttaga Undret i hvarje form. Linnés hypotes om arternes tillkomst var väl endast ett misslyckadt försök, gående i denna riktning; och en och annan naturforskare torde väl ännu finnas, som anser Darwinismens antaganden knappast vara något mera.

Huruvida det skall lyckas naturforskningen att borttaga *Undret* i hvarje form, torde vara förmätet att vilja förutsäga. Visst är, att naturen ännu torde visa sig vara full af Under, så snart man gör något försök att förklara det inneboende lifvets uppkomst och väsende.

Menniskan har ifrån sin första tillkomst på jorden intill den tid som nu är, under »kampen för tillvaron» förändrat sin ställning till en förundransvärd grad. Hon hade i begynnelsen få behof, och de tillfredsställes med mycket enkla medel; hon känner nu en mångfald af behof, för hvars tillfreds-

ställande icke blott finnas millioner af arbetare, som hvardera hafva sina verktyg, utan jemväl dessa complicerade machiner af olika slag och som förrätta de mest olika arbeten. Men äfven de mest complicerade och fulländade af dessa hafva väl allt hittills haft den egenheten, att de stå orörligt stilla, om icke en särskild kraft i dem inblaser den lefvande andan. Kraften kan lånas ifrån vind och vatten, ifrån ljus och värme, ifrån electricitet eller magnetism; men det har väl ännu icke lyckats mekanikern att sjelf skapa den. Männen icke i motsats härtill redan den gamla satsen »*omne vivunt ex ovo*» i sig innebär, att organismen är något mera än en sammansättning af vissa materiella bestandsdelar? Organismen frambringas icke genom sammanförandet af materiella bestandsdelar¹⁾. Äfven i äggets enklaste form, såsom en enkel organisk bläsa, finnes deri en lefvande kraft, som vi kalla lif, hvilket näppeligen torde kunna ersättas genom vanliga kemiska eller fysiska krafter. Så står man väl redan här inför det första undret: *lifvets under*.

Det är tillräckligen känt, att hos vissa lågt stående vexter — många af de gröna Algerne — äggen utgöras af oändligt små sporidier, närmast liknande en enkel (äggformig) bläsa, som under sin första tid äro försedda med rörliga cilier, med hvilkas tillhjälp de synas hafva förmågan att uppsöka en lämplig plats för vidare utveckling. Sedan de uppnått denna, sätta de sig fast, förändra form och utveckla sig vidare. Hos de högre Cryptogamerne sker utvecklingen från en mycket enkel spora. Hos de phanerogama vexterne utgöres embryot jemväl af en liten enkel kropp, derpå man dock ofta kan urskilja anlag till blifvande delar. Men huru kommer det sig, kunde man väl vilja fråga, att dessa enkla första anlag börja utveckla sig, till mera sammansatta vexter, med stundom mycket stora dimensioner? Är icke hela detta ständiga tillvexande jemväl ett under, som för visso icke låter förklara sig deraf, att det ringa första anlaget omgifves af de för utvecklingen nödiga ämnena. Man skulle således väl här kunna tala om ett *utvecklingens under*.

Antingen den vext, som sålunda framkommer, blir en enkel träd, med den ena cellen nästan fullkomligt lik den

¹⁾ »Die absolut neue Bildung pflanzlicher oder thierischer Organismen, das zusammentreten unorganischer Materie zu einer Pflanze oder einem Thiere (oder dem Keime der ersten Zelle eines Organismus) ist bisher der Beobachtung unzugänglich gewesen». *Hofmeister Allgem. Morph.* p. 556.

andra, eller den blir ett sammansatt träd med olika formade delar; antingen den fortsätter att vexa på detta sätt under kortare tid eller under längre, så inträder förr eller sednare en period, då den upphör att fortbildas på det sätt, hvar på den allt dittills utvecklats; hos alla högre vexter framträda delar, som äro mera eller mindre afvikande från dem, samma vext förut utvecklat. Hvarföre, kunde man vilja fråga, fortgår icke utvecklingen alltjemt på enahanda sätt; hvarför framträda vid pubertets-perioden, som hos träden kan inträffa efter många års föregående utveckling, nya delar af alldeles eget slag, som synas fullkomligt umbärliga för individets eget lif, men som hafva den största betydelse för den art, som individet tillhör? Tillkomma icke dessa delar på ett sätt, som icke låter förklara sig af vextens föregående lif? De tillkomma väl för fullgörandet af ett nytt under: *fortplantningens under*.

De gröna Algers sporidier äro ofta, äfven när de härstamma från mycket olika arter, hvarandra så lika, att äfven med nutidens bästa optiska instrument man stundom torde hafva svårt att finna några olikheter dem emellan; enahanda är förhållandet med sporerne hos många af de Cryptogama vexterne; och det torde väl äfven vara möjligt att uppsöka embryoner hos Phanerogamerne, som, churu tagne af frö tillhörande olika vextfamiljer, dock kunde vara hvarandra mycket lika. Hvarföre, kunde man väl hafva skäl fråga, utveckla sig de sinsemellan så lika sporidierne, sporerne och embryonerne, till så olika slag af vexter, och hvarföre till vexter, som öfverensstämma med modervexten? Man hänvisar ofta, såsom förklaring derför, till en *ärflighetens lag*, likasom vore det underbara undanröjdt genom hänvisandet till en allmän lag, som väl endast sjelf torde kunna förklaras såsom ett under. Det är medelst detta som arterne vidmagthållas i naturen: *Arternes under*.

Man har trott sig kunna förklara mångfalden i naturen genom antagandet af successiva förändringar under yttre förhållandens påträngande inflytande. Nutidens fullkomligare vexter skulle leda sitt ursprung från enklare stamfäder, hvilka i sin ordning skulle hafva uppkommit från än enklare, tills man vid stantallans urgrund i den oformade protoplasma-klumpen funne det gemensamma urämnet. Men manne man på detta sätt skulle lyckas eliminera undret i naturen? Huru, kunde man väl vilja fråga, uppkom denna första protoplasmaklump?

Man hade fordom att tillgå den så kallade *Priestleyska gröna materien* till förklaring af de små organismer, som utvecklas i vatten och på fuktiga ställen; men den är längesedan utmönstrad ur vetenskapen, likasom andra föreställningar om en nutida organisms uppkomst genom *generatio aequivoca*. Och vidare kunde man väl vilja veta, huru och hvarföre denna första protoplasmaklump iklädde sig organisk form; genom hvilken strid för tillvaron den utbildades i särskilda former o. s. v. Näppeligen torde Descendenstheorien förmå eliminera undret sasom öfverflödigt för tydandet af organismernes tillkomst. Undret torde nog stå qvar, om ock förlagdt till annan plats — »dit föreställningen följer mindre med och ser mindre klart».

De som antaga Variabiliteten i naturen sasom grund för nya formers uppkomst, och anse varietet och art endast sasom gradationer, hafva till stöd för sin åsigt vanligen åberopat förhållandet hos vissa släkten, inom hvilka det synes vara förenadt med stora svarigheter, att skilja emellan närstående arters, som det antagits, i hvarandra öfvergående former. Man har sagt, att formerne inom sådane släkten »are in a state of *unstable equilibrium*»; och man antager väl, att arterne i dessa släkten ännu icke satt sig, icke fått sin inbördes begränsning genom svagare formers bortfallande, hvarigenom de under kampen för tillvaron segrande formerne först finge sitt utseende af skiljda arter. Då inom många släkten — och väl äfven inom det vida öfvervägande antalet — arterna tydligt nog äro åtskiljde, så skulle icke dessa för närvarande vara i det tillstånd af *unstable equilibrium*, hvarunder formerne mangfaldigades; men dessa antagas väl antingen förut hafva varit, eller framdeles kunna öfvergå till ett liknande stadium. Man får på detta sätt visserligen en förklaring för de olikheter, som arterne förete inom olika släkten; man eliminerar måhända undret af arters olikhet inom olika släkten, men manne icke undrets hydra skjuter fram ett eller flera nya hufvuden på andra ställen? Eller hvarföre händer, att ett slägte, som förut haft skarpt skiljda arter, och i enlighet med ärftlighetens lag alltjemnt bör framkomma i sina lagbestämda former, periodvis öfvergår till motsatsen häraf? Hvilka medel använder naturen för att framkalla en sådan förändring? Hvarföre har det ena slägtet sitt *aequilibrium* på en tid, det andra på en annan? Vore det de yttre omständigheterna, som

vållade förändringen, hvarföre skulle icke dessa yttre omständigheter inverka på andra samtidigt lefvande släkten?

Kan man således ännu svårligen undgå antagandet, att organismerna tillkommit genom ett öfvernaturligt ingripande, och om detta antages i ett fall, eller i några, det väl med lika lätthet kan antagas i många, så torde det i sjelfva verket vara för vetenskapen fördelaktigast, att antaga det oundvikliga »Undret» i ursprunglig och naiv form. Den gåta, som erkännes otydd, torde lättare finna en riktig tydning, än den som redan antages tydd, men tydningens oriktighet döljes.

Innehåll:

I.	Linnés åsigt om arternes tillkomst: hans hypotes om sättet, huru vid skapelsen tillgått.....	pag. 3.
II.	Naturens arter uppfattade på olika sätt i botanisternes systemer.....	” 12.
III.	Arten uppfattad såsom uttryck för ett särskildt, för den egendomligt lif; karakteriserad genom yttre och inre bildning, genom biologiska förhållanden, förekomst på vissa lokaler och deraf beroende utbredning m. m. (Striden för tillvaron).....	” 23.
IV.	Artens förändringar i yttre form, framkallade af olika anledningar; förändringarnes olika betydelse. (Variabiliteten i naturen).....	” 39.
	a) Artens normala förändringar, oberoende af yttre inverkan de orsaker — olikheter i yttre form som måste anses tillhöra artens normala formkrets.....	” 46.
	b) Normala förändringar i yttre form, föranledda af eller stående i samband med yttre förhållanden. Artens förmåga af adaptering.....	” 53.
	c) Olikheter i artens yttre form, hvilka städse förekomma hos olika individer, likasom tillhörande artens normala formkrets.....	” 59.
	d) Abnorma förändringar i yttre form, föranledda af olika anledningar. Olikheter som mera eller mindre ligga utanför artens normala formkrets.....	” 64.
	e) Variabilitetens betydelse för uppkomsten af nya arter.....	” 90.
V.	Artens lif i dess förhållande till individernes, och organerne därför; anordningar i naturen för artens bestånd under individernes på hvarandra följande generationer. (Stabiliteten i naturen).....	” 99.
VI.	Vexternes daning för särskildta ändamål; olika arters för att kunna lefva under olika yttre förhållanden; för att kunna fullgöra lifvets functioner på för dem afsedt vis..	” 110.
VII.	Olika arters större eller mindre inbördes öfverensstämmelser; arternes deraf beroende närmare eller fjärmare släktskap; betydelsen af systemets grupper.....	” 122.
VIII.	Undret i Naturen.....	” 129.

HYDROGRAFISK-KEMISKA IAKTTAGELSER

UNDER

DEN SVENSKA EXPEDITIONEN TILL GRÖNLAND

1883

AF

AXEL HAMBERG.

II.

MED 4 TAFLOR.

MEDDELADT DEN 11 FEBRUARI 1885.

STOCKHOLM, 1885.

KONGL. BOKTRYCKERIET.
P. A. NORSTEDT & SÖNER.

INNEHÅLL.

	Sid.
1. Om variationer i förhållandet mellan hafsvattnets klorider och sulfater	5.
2. Om kväfgasen i hafsvattnet	14.
3. Om kolsyran i hafsvattnet.....	31.
4. En apparat för bestämning af kväfgasen och kolsyran i hafsvattnet.....	50.

Materialet till dessa iakttagelser har samlats under den af Dr. O. DICKSON bekostade och af Frih. A. E. NORDENSKIÖLD ledda expeditionen med Sofia till Grönland 1883.

De observationer, för hvilka i föregående afdelning (se Bih. Bd 9. N:o 16) redogörelse lemnats, hafva nästan samtliga blifvit gjorda ombord; de undersökningar, som här meddelas, äro deremot i allmänhet utförda efter hemkomsten till Stockholm under vintern 1883—1884 på Stockholms Högskolas kemiska laboratorium och under hösten 1884 på min fars laboratorium. De gasanalyser, för hvilka FRANKLAND-WARD-MAC LEOD's gasanalysapparat har anlitats, äro gjorda på Karolinska Institutet sommaren 1884.

Med anledning häraf står jag i tacksamhetsskuld till Prof. OTTO PETTERSSON, numera aflidne Prof. STEN STENBERG, dennes efterträdare Grefve K. A. MÖRNER samt Prof. N. P. HAMBERG.

Det är min pligt att särskildt tacka Frih. NORDENSKIÖLD, som satt mig i tillfälle att göra dessa iakttagelser, samt Prof. PETTERSSON, som under arbetets fortgång städse bistått mig med råd och upplysningar.

1. Om variationer i förhållandet mellan hafsvattnets klorider och sulfater.

Att förhållandet mellan hafssaltets olika beståndsdelar måste vara underkastadt vexlingar, bör a priori kunna antagas; man känner ju, att de massor af flodvatten, som tillföras oceanen, hafva en helt annan sammansättning än hafsvattnet; man vet ju, att hafsbotten med sina djurlemningar innehåller i vatten ej olösliga ämnen, och det har ju för ej länge sedan påvisats, att hafsisen med afseende på rationstalet mellan de ingående beståndsdelarna skiljer sig mycket från hafsvattnet. Och likväl har man knappast förr än på den allra sista tiden förmått iakttaga några lagbundna variationer, åtminstone ej i det egentliga, öppna hafvet. Det ämne, som på ett ställe i riklig mängd upptages, afsöndras och förbrukas på ett annat, och den ständiga cirkulationen tyckes utjemna alla lokala ojämnheter eller åtminstone göra dem så obetydliga, att den noggrannaste kemiska analys har svårt att upptäcka dem.

Hvarje kemist, som sysselsatt sig med hafsvattenanalyser, har alltid bland ett flertal bestämningar — om än aldrig så noggranna — funnit några, som i viss mån afvikit från de öfriga. Afvikningarna hafva visserligen i hans ögon varit så stora, att de ej nöjaktigt kunnat förklaras såsom analytiska fel, men å andra sidan så enstaka och oregelbundna, att de ej kunnat gifva uppslag till någon tillfredsställande teoretisk tolkning. Ju mer analysen har fullkomnats, inom desto trängre gränser hafva dessa problematiska vexlingar i hafsvattnets sammansättning blifvit inneslutna.

SCHMELCK, en af den norska nordhafs-expeditionens kemister, säger om sina undersökningar bland annat: »Den Antagelse, at Havet i hele sin Dybde er en ensartet Blanding, hvori den nøiagtigste kemiske Analyse neppe kan paavise nogen Forskjellighed, bekræftes ved de her foreliggende Under-

sögelser i endnu höiere Grad end ved de tidligere»¹⁾. Men på flere ställen i sin afhandling klagar han öfver oregelbundenheter, som icke på ett tillfredsställande sätt kunna förklaras såsom observationsfel.

I hufvudsakligen samma anda uttalar sig DITTMAR i det nyligen utkomna första bandet af Challengerexpeditionens vetenskapliga arbeten. Vid studiet af sina talrika bestämningar utbrister han: — — »we often meet with fluctuations which are to great to be taken as arising from analytical errors, and consequently must correspond to differences in the actual composition. I have taken great pains in trying to explain these differences by natural causes, but have not been very successful. The final results of my inquiries may be summed up as follows:

From my analyses (which I do not pretend exhaust the subject), it would appear that the composition of sea-water salt is independent of latitude and longitude whence the sample is taken. Nor can we trace any influence of the depth, from which the sample comes, if we confine ourselves to the ratio to one another of chlorine, sulphuric acid, magnesia, potash and *bromine*. I emphasise the bromine because, while present in very small proportion it is taken up preferably by seaplants, and consequently must be presumed to be more liable than any of the major components to at least temporary local diminution»²⁾.

Det är endast med afseende på variationerna i kalkmängden, som han tror sig hafva kommit till något bestämdt resultat, i det han med afgörande siffror påvisar, att rationstalet mellan kalk och klor är störst i de djupaste lagren.

Under Frih. NORDENSKIÖLD'S expedition med Sofia 1883 var jag, såsom förut är nämnt, i tillfälle att insamla åtskilliga vattenprof, tagna på skilda håll och skilda djup vid Grönlands kuster.

För att vid bearbetningen af detta material om möjligt lemna några bidrag till lösningen af den tvistiga frågan om variationerna i hafsvattnets sammansättning har jag koncentre-

¹⁾ Den Norske Nordhavs-Expedition 1876—78. IX. Chemi: 1. Om Sövandets faste Bestanddele af LUDVIG SCHMELCK, s. 14. Christiania 1882.

²⁾ Report on the Scientific Results of the Voyage of H. M. S. CHALLENGER etc. Vol. 1. Part. 1. Report on researches into the composition of ocean-water by W. DITTMAR, s. 204. London 1884.

rat min uppmärksamhet på jämförelsen mellan de två af hafsvattnets beståndsdelar, som kunna säkrast bestämmas — klor och svafvelsyra. Jag valde dessa båda ämnen äfven af en annan orsak.

D:r PETTERSSON ¹⁾ hade nemligen iakttagit en egendomlig egenskap hos hafsisen att qvarhålla vissa af hafssaltets beståndsdelar och frigifva andra. Han hade i detta fall särskildt studerat förhållandet mellan svafvelsyra och klor, och talet $\frac{\text{SO}_3 \cdot 100}{\text{Cl}}$ (d. v. s: svafvelsyremängden, om klormängden sättes lika med 100), som hos hafsvatten ligger omkring 11,5, kan hos vatten af smält is uppgå till 60 å 70. Emedan den intressantaste delen af det material, som jag hade till mitt förfogande, var samlad utanför Grönlands östra kust dels i den isbetäckta ostgrönländska polarströmmen, dels i den isfria varma Atlanten öster derom, så väntade jag mig att för dessa hvarandra så närbelägna, men så olika områden kunna påvisa en tydlig skilnad i halten af svafvelsyra relativt till mängden af klor.

För att erhålla en noggrann bestämning på förhållandet mellan svafvelsyra och klor i ett hafsvatten fordras naturligen, att så väl svafvelsyrehalten som klorhalten med den största omsorg fastställas. Jag har vid de af mig gjorda analyserna i detta afseende uppjudit min bästa förmåga.

Kloren i hafsvattnet bestämdes på vanligt sätt genom titrering med silfverniträt. För att visa, huru stora relativa fel jag kan hafva gjort mig skyldig till vid hvarje titrering, kunna följande kontrollbestämningar anföras:

Proc. Cl.	Proc. Cl.	Differens.
1,9470	1,9475	0,0005
1,9484	1,9496	0,0012
1,9470	1,9475	0,0005
1,9463	1,9469	0,0006
1,9395	1,9407	0,0012

Mediumdifferensen öfverstiger ej 0,05 proc. af den bestämda quantiteten.

Alla klorbestämningar, som legat till grund för efterföljande beräkningar, hafva blifvit gjorda omedelbart före svafvelsyrebestämningarna.

¹⁾ Vega-Expeditionens Vetenskapliga Iakttagelser. B. 2. Sthlm 1883. On the properties of water and ice by OTTO PETTERSSON, sid. 301.

Vid fastställandet af svafvelsyrans mängd i de olika vattenena har jag tillvägagått på följande sätt:

Omkring 150—200 gr. hafsvatten invägdes, omkring 15—20 droppar svafvelsyrefri saltsyra tillsattes, blandningen upphettades nära på till kokning och fälades med klorbarium.

Det är känt, att bariumsulfat är en fällning, som endast med den största svårighet låter befria sig från klorbarium. För att undvika ett skadligt öfverskott ¹⁾ häraf fann jag mig därför nödsakad att såsom fällningsmedel använda en klorbariumlösning af känd halt samt att af denna ur en byrett tillsätta en beräknad mängd.

Den fälda vätskan fick svalna, och, såsom SCHMELCK förskrifver, företogs filtreringen efter 12, vanligen efter 15 timmars förlopp. Genom att filtrera och pröfva några droppar af det blifvande filtratet förvissade jag mig om, huruvida all svafvelsyra var utfäld eller ej. Var detta ej förhållandet, tillsattes naturligen en liten qvantitet klorbarium på nytt till den ej fullständigt fälda vätskan, som derefter åter lemnadas att stå minst 12 timmar. Var filtratet deremot svafvelsyrefritt, fortsattes filtreringen.

Att fullständigt befria en ur hafsvatten med klorbarium fäld bariumsulfatfällning från klorider är svårare, än mången torde föreställa sig. Att det vatten, hvarmed fällningen tvättats, ej gifver någon reaktion på klor, är intet bevis på sulfatets renhet. Jag plägade därför, sedan jag genom oupphörliga dekanteringar först med kallt, sedan med hett destilleradt vatten kommit till ett klorfritt filtrat, slamma upp fällningen uti hett vatten och låta den stå dermed på ett varmt ställe under flere timmar. Efter ny dekantering bragtes den på filtertrum, glödgades och vägdes.

Efter hvarje bestämning ansåg jag mig nödsakad att pröfva:

1) om den ej kunde vara för hög genom inblandning af klorider i sulfatet;

2) om den ej kunde vara för låg, derigenom att någon del af sulfatet gått igenom filtret.

För att öfvertyga mig om, huru förhållandet kunde vara i förstnämnda afseende, utlakades den vägda och kontrollvägda fällningen med hett vatten, och vätskan pröfvades på klor.

¹⁾ Det gamla försigtighetsmättet att droppvis tillsätta fällningsmedel, tills den sista droppen ej gifver någon fällning, synes mig i praktiken outförbart.

Det inträffade ej sällan, att sulfatet befans orent trots ofvannämnda försigtighetsmått vid uttvättningen och tillsatsen af fällningsmedlet. Alla bestämningar, grundande sig på i någon mån klorhaltiga fällningar, kasserades.

Hvad nu den andra felkällan beträffar, så synes det kanske vara själfklart, att man bör observera, huruvida fällningen går igenom filtret eller ej. Men för att iakttaga detta fordras särskilda försigtighetsmått, ty det är här ej fråga om så grofva fel, som kunna betecknas med »grumligt filtrat».

Såsom bekant är bariumsulfat, som fälls i köld, så finfördeladt, att det har benägenhet att genomtränga filtrerpapperets porer. SCHMELCK har visat, att bariumsulfat är något lösligare i hett än i kallt hafsvatten, och det är derföre, som han föreskrifvit, att fällningen bör ske i värme, men filtreringen vid »vanlig» rumstemperatur. Den del af fällningen, som i förevarande fall afsätter sig i köld, är mycket ringa och kan ej gifva anledning — så vidt man kan se — till ett grumligt filtrat. Men den fordrar i första rummet, att man använder väl synade filtra, fullkomligt fria från alla skönjbara hål, samt i andra rummet, att man efter slutad filtrering tillvaratager filtrat och tvättvatten i ett rent blanknudet glaskärl, låter det stå i 8 till 10 timmar för att erhålla upplysning om, huruvida ej en mycket tunn, men dock skönjbar vit fällning afsatt sig på kärlets botten. Alla bestämningar, på hvilkas filtrat något dylikt kunde iakttagas, kasserades.

Mängden af sålunda kasserade bestämningar uppgick till ett ganska betydligt antal, och en stor mängd material och mycket arbete förslösades sålunda utan att lemna något direkt resultat.

Den noggrannhet, till hvilken jag, genom iakttagandet af dessa försigtighetsmått, kunde komma, belyses af nedanstående kontrollbestämningar.

Proc. SO ₃	Proc. SO ₃	Differens.
0,2215	0,2210	0,0005
0,2166	0,2161	0,0005
0,2233	0,2230	0,0003
0,1922	0,1918	0,0004
0,2063	0,2059	0,0004

Mediumskilnaden mellan två omsorgsfullt gjorda bestämningar är 0,2 proc. af den erhållna kvantiteten.

I följande tabell har jag samlat alla svafvelsyrebestämningarne jemte klorhalter och deraf beräknade värden på $\frac{\text{SO}_3 \cdot 100}{\text{Cl}}$ för de respektive vattnena, af hvilka de flesta (N:o 12—20) förskrifva sig från den ostgrönländska polarströmmen och (N:o 4—11) hafvet derutanför, några (N:o 21—23) från Baffin bay,

N:o	Vattenprof N:o	N. Lat.	Long. från Greenwich.	Djup.	Temperatur.	Proc. Cl.	Proc. SO ₃ .	$\frac{\text{SO}_3 \cdot 100}{\text{Cl.}}$	Anmärk- ningar.
1	—	13° 13'	55° 35' O.	0	+ 24°	1,996	0,2291	11,48	
2	—	} Utanför Scrabster i norra Skott- land. {		0	+ 11°	1,926	0,2215	11,50	
3	—			0	+ 11°	1,926	0,2210	11,48	
4	39			100	+ 7°,2	1,948	0,2237	11,48	
5	36	65° 51'	33° 5'	0	+ 3°,5	1,878	0,2160	11,50	
6	31	65° 25'	37° 15'	0	+ 4°,7	1,888	0,2166	11,47	
7	31	65° 25'	37° 15'	0	+ 4°,7	1,888	0,2161	11,45	
8	32	65° 25'	37° 15'	50	+ 5°,5	1,915	0,2196	11,47	
9	22	60° 46'	41° 42'	0	+ 7°	1,918	0,2208	11,52	
10	23	60° 46'	41° 42'	1350	+ 3°,7	1,941	0,2233	11,51	
11	23	60° 46'	41° 42'	1350	+ 3°,7	1,941	0,2230	11,49	
12	35	66° 18'	34° 50'	0	— 0°,7	1,627	0,1866	11,47	} Bland drifisen i den ost- grönländska polarström- men.
13	28	65° 30'	37° 21'	0	— 0°,5	1,610	0,1850	11,19	
14	25	63° 10'	40° 35'	0	— 0°,8	1,669	0,1922	11,52	
15	25	63° 10'	40° 35'	0	— 0°,8	1,669	0,1918	11,50	
16	26	63° 10'	40° 35'	100	— 0°,7	1,709	0,1959	11,46	
17	27	63° 10'	40° 35'	400	+ 0°,2	1,795	0,2063	11,49	
18	27	63° 10'	40° 35'	400	+ 0°,2	1,795	0,2059	11,47	
19	15	59° 43'	43° 16'	0	+ 0°,1	1,782	0,2049	11,50	Bland isen.
20	16	59° 43'	43° 16'	100	0°,0	1,819	0,2125	11,49	
21	135	74° 0'	64° 30'	0	+ 1°,5	1,648	0,1896	11,50	} Bland isen.
22	127	75°	?	0	+ 1°,9	1,561	0,1797	11,51	
23	129	} Melville bay {		600	0°,?	1,895	0,2179	11,50	
24	54	66° 45'	54° 30'	0	+ 0°,9	1,855	0,2124	11,45	
25	53	65° 15'	53° 30'	125	+ 0°,2	1,862	0,2134	11,46	
26	99 & 102	} Arsukfjordens innersta del. {		0	ung. 5°,5	0,1695	0,0541	11,52	
27	110	} Arsukfjorden {		0	+ 7°,3	1,056	0,1198	11,35	
28	98	} utanför Ivigtut. {		550	+ 1°,7	1,886	0,2159	11,45	

två (N:o 24 och 25) från vestkusten af Grönland, tre (N:o 26—28) från Arsukfjorden samt ett (N:o 2 och 3) från Skottlands norra kust. Alla dessa vattenprof äro upphemtade under Sofia-expeditionen sommaren 1883. För egendomlighetens skull har jag i tabellen äfven upptagit bestämningarna på ett till min förfogan stäldt vatten, som tillhört Vegaexpeditionens samlingar, och af densamma tagits i Arabiska viken den 2 Januari 1880.

Vid betraktandet af ofvanstående tabell skulle man vara nästan frestad att anse den såsom ett nytt bevis på hafsvattnets oföränderliga sammansättning. Om man undantager en bestämning på ett fjordytvatten, hvilken utfallit särdeles lågt, ligga alla de öfriga värdena på $\frac{\text{SO}_3 \cdot 100}{\text{Cl}}$ mellan 11,52 och 11,45, och dock äro de bestämda på vatten af högst olika temperatur, salthalt, djup, latitud och longitud. Medeltalet för alla bestämningarna utom (26 och 27) dem för Arsukfjordens ytvatten är

11,485.

FORCHHAMMER¹⁾, som gjort mer än 150 bestämningar, har i medeltal för världshafvet erhållit 11,89; hans tal variera för öfrigt högst betydligt samt kunna numera på grund af den metod han använt näppeligen anses tillförlitliga.

SCHMELCK har af 31 bestämningar, som ligga mellan 11,643 och 11,136, i medeltal för det norska nordhafvet erhållit 11,46.

DITTMAR har af 77 bestämningar på vatten från skilda delar af världshafvet erhållit såsom maximum 11,748, minimum 11,370 samt i medeltal 11,576.

Det torde af ofvanstående framgå, att de af mig gjorda bestämningarna ligga inom ovanligt trånga gränser. Det borde derföre ej hafva förvånat någon, om jag hade instämt i det yttrande af SCHMELCK, som anförts i uppsatsens början. Men med anledning af Prof. PETERSSONS och Hr FORSBERGS²⁾ undersökningar om hafsens sammansättning vill jag tillåta mig följande spekulationer, särdeles som en vigtig del af det material jag undersökt är tagen i af is alldeles uppfyllda trakter. Prof. PETERSSON säger om isbildningen bland annat:

»The formation of sea-ice is chemically a selective process. Some of the elements of the salt water are more fit

¹⁾ Om Sövandets Bestanddele og deres Fordeling i Havet af G. FORCHHAMMER i Inbydelseskraft till Kjöbenhavns Universitets Fest etc. Kjöbenhavn 1859.

²⁾ Öfvers. K. Vet.-Akad. Förhandl. 1884. No 6. S. 53. Om hafsens salthalt af G. E. FORSBERG.

than others to enter into the solid state by freezing, those, which are rejected by the ice, will be preponderating in the brine and vice versa. Taking the relation $\text{Cl}:\text{SO}_3$ as standard of comparison, we may characterize the most striking feature of the freezing process thus: that the ice is richer in sulphates, the brine in chlorides».

Enligt detta borde isbildningen i hafvet vara i stånd till att rubba det konstanta förhållandet mellan klorider och sulfater i hafsvattnet. Under vintertiden skulle således hafssaltet i polartrakterna genom sulfaternas afsöndring blifva allt rikare på klorider, under sommaren deremot, då issmältningen pågår, skulle ytvattnet erhålla en jemförelsevis hög procent af svafvelsyra. *Genom isvattnets låga specifika vikt bör denna sulfatrikedom strängt hålla sig till ytlagren.*

Här nedan äro samlade de få observationer, som möjligen kunna gifva något direkt vittnesbörd om sanningen eller falskheten af detta antagande.

Djup.	Temp.	$\frac{\text{SO}_3 \cdot 100}{\text{Cl.}}$
Den ostgrönländska polarströmmen på $63^\circ 10'$ l. n. $40^\circ 35'$ l. v.		
0	— $0^\circ,8$	11,52
0	— $0^\circ,8$	11,50
100	— $0^\circ,7$	11,46
400	+ $0^\circ,2$	11,49
400	+ $0^\circ,2$	11,47
Den ostgrönländska polarströmmen på $59^\circ 43'$ l. n. $43^\circ 16'$ l. v.		
0	+ $0^\circ,1$	11,50
100	$0^\circ,0$	11,49.
Mellville bay på 75° l. n.		
0	+ $1^\circ,9$	11,51
600	$0^\circ?$	11,50.

Differenserna äro visserligen små, men öfverensstämmelsen med teorien är så till vida fullständig, att den relativa svafvelsyrehalten städse funnits något högre i de ytvatten, som tagits bland drifis, än i de underliggande djupvattnena.

Flertalet af de i tabellen på sid. 10 upptagna värdena på $\frac{\text{SO}_3 \cdot 100}{\text{Cl}}$ gifva, fördelade på fyra följande grupper, vidstående medeltal:

- 1) För bestämningarna N:o 1—3, 5—7 och 9, gjorda på *ytvatten af temp. högre än +2°*, är medeltalet..... 11,486.
- 2) För bestämningarna N:o 4, 8, 10 och 11, gjorda på *djupvatten af temp. högre än +2°*, är medeltalet... 11,488.
- 3) För bestämningarna N:o 12—15, 19, 21 och 22, gjorda på *ytvatten, som tagits bland drifis*, är medeltalet 11,499.
- 4) För bestämningarna N:o 16—18, 20 och 23, gjorda på *djupvatten, som tagits under isbetäckt yta*, är medeltalet..... 11,482.

Skilnaden mellan de två första af dessa medeltal är så obetydlig, att den kan lemnas utan afseende. Deremot är medeltalet för grupp 3 jemförelsevis högt, under det att motsatta förhållandet tyckes ega rum med grupp 4. Att skilnaden mellan dessa båda sista medeltal bör hafva en viss trovärdighet, synes mig framgå deraf, att medelfelet för hvarje enkel bestämning knappast kan sättas högre än $\pm 0,015$.

Det bör framhållas att *medeltalet för de ytvatten, som tagits bland drifis, är det högsta af alla*. Fem af de sju bestämningar, som ligga till grund för detta medeltal, äro gjorda på vatten från den ostgrönländska polarströmmen. Det bör naturligen ej väcka någon förvåning, att man finner en hög relativ svafvelsyrehalt i den sydligare delen af denna ström, der åtminstone under sommaren massor af is smältas.

De differenser i värdena på $\frac{\text{SO}_3 \cdot 100}{\text{Cl}}$, hvilka legat till grund för ofvanstående tillämpning på hafsvattnet af Prof. PETTERSSONS åsigter om hafsisen, torde i mångas ögon vara alltför obetydliga. Jag ansåg dem först också sjelf alldeles värdelösa. Men såsom det följande torde visa, har man knappast rätt att vänta sig större.

Differensernas storlek är naturligen beroende på den större eller mindre halten af svafvelsyra i isvattnet. Att af förhandenvarande isvattenanalyser uppställa något antagligt medetal, torde vara omöjligt. Men utan tvifvel äro de ismassor, som ligga packade i den ostgrönländska polarströmmen, att anse såsom *gammal hafsis*. De kunna följaktligen (enligt PETTERSSON) ej hafva någon synnerligen hög klorhalt (0,015—0,001 proc.

(Cl.), och om deras svafvelsyrehalt relativt till klormängden äfven kan kallas nära nog kolossal (den ligger ungefär mellan 15 och 80), så är likväl den absoluta svafvelsyrehalten så liten, att till och med en jemförelsevis stor mängd isvatten endast i ringa grad förmår höja relationen mellan svafvelsyra och klor i hafsvattnet. Detta kan illustreras af följande exempel:

1) Antag ett hafsvatten, till sin sammansättning sådant som medeltalen för grupp 4; d. v. s. det har

klorhalten	svafvelsyrehalten	och $\frac{\text{SO}_3 \cdot 100}{\text{Cl}} =$
1,8084 proc.,	0,20770 proc.	11,482.

2) Antag vidare, att detta vatten genom issmältning bliver utspädt och erhåller en sådan sammansättning, som angifves af medeltalen för grupp 3; d. v. s. det har

klorhalten	svafvelsyrehalten	och $\frac{\text{SO}_3 \cdot 100}{\text{Cl}} =$
1,6523 proc.,	0,18997 proc.	11,499.

3) Om man nu till sist antager, att det isvatten, som åstadkommit denna utspädning, är af klorhalten

0,005 proc.,

så följer deraf, att det måste vara af svafvelsyrehalten

0,00287 proc.

och hafva förhållandet mellan svafvelsyra och klor (om Cl = 100)

57,41.

Om isvattnets klorhalt hade antagits vara större, skulle rationstalet blifvit mindre och tvärt om.

Det framgår emellertid utan gensägelse, att det fordras ett isvatten af mycket hög svafvelsyrehalt för att framkalla en jemförelsevis obetydlig höjning af den relativa svafvelsyremängden i hafsvattnet. Man torde således knappast få vänta sig differenser större än dem jag erhållit. Det återstår att genom en till ytterlighet skärpt bestämningsmetod visa dem tydligare, än mina siffror mäktat.

2. Om kväfgasen i hafsvattnet.

Det hade länge rådt den villfarelsen, att lufthalten i hafvets djupare delar skulle vara ofantligt stor och i någon mån

motsvara det enorma tryck, som derstädes råder. Men för ett dylikt antagande hafva alla nyare undersökningar på detta område ej lemnat något stöd.

Redan JACOBSEN, den tyska Pommerania-expeditionens kemist, har i detta afseende kommit till ett i hufvudsak riktigt resultat, i det han uttryckligen säger: »Ich glaube — —, über den Luftgehalt des Meerwassers in der Tiefe den Satz aufstellen zu können, dass die Summe von Sauerstoff und Stickstoff nahezu gleich ist derjenigen Menge dieser Gase, welche dass Wasser bei seiner wirklichen Tiefentemperatur an der Meeresoberfläche aus der Atmosphäre aufnehmen würde, weniger der etwa verbrauchten Sauerstoffmenge» ¹⁾.

Den enda anmärkning, som mot denna lag skulle kunna göras, är, att ett djupvattens temperatur möjligen kan ändra sig, utan att motsvarande förändringar i lufthalten inträffa. Derföre är den form riktigare, som TORNÖE med följande ord gifver åt i hufvudsak samma regel: »Den rimligste Slutning af de senere Tiders Observationer over disse Gjenstande vil være den, at en Vandprøve, så længe den befinder sig under Overfladen, uforandret vil beholde den samme Luftmængde eller rigtigere Kvælstofmængde, som den havde absorberet, da den siste Gang befandt sig i Overfladen udsat for Luftens frie Indvirkning» ²⁾.

TORNÖE fäster särskildt uppmärksamheten på hafsvattnets qväfvehalt. Syreprocenten ($= \frac{O \cdot 100}{O + N}$) är i de djupare lagren städse något reducerad, emedan den af ett hafsvatten en gång absorberade syrequantiteten alltid till någon del förbrukas af oxiderbara organiska ämnen och de lefvande hafsdjuren. Qväfvet är deremot fullkomligt indifferent.

Den qväfvemängd, som hafsvattnet absorberar ur luften, är mest beroende af temperaturen. Derföre böra de djupvatten, som hafva befunnit sig i ytan och absorberat sin luft i varmare trakter, vara af en mindre qväfvehalt än de, som hafva ett polart ursprung. Med användande af denna sats har TORNÖE kommit till högst intressanta resultat angående cirkulationen i det norska nordhafvet.

¹⁾ Annalen der Chemie und Pharmacie. Bd 167. Ueber die Luft des Meerwassers; von OSCAR JACOBSEN, s. 22.

²⁾ Den Norske Nordhavs-Expedition 1876 — 1878. Chemi etc. af HERCULES TORNÖE, s. 72.

För att af en i ett hafsvatten observerad qväfvemängd kunna leta sig till den motsvarande temperaturen måste man känna qväfgasens absorptionskoefficient för hafsvatten vid olika temperaturer. Emedan TORNÖE på goda grunder misstänkte, att de af BUNSEN funna för destilleradt vatten gällande koefficienterna ej voro användbara på hafsvatten, beslöt han att undersöka hafsvattnets absorptionsförmåga i detta afseende. Beträffande den absorberade qväfvemängdens variation med temperaturen fann han, att den kunde uttryckas med formeln

$$N = 14,4 - 0,23 \cdot t^{\circ}.$$

N betyder cubikcentimeter (till 0° och 760 m.m. reducerade) qväfgas i en liter hafsvatten, absorberade vid 760 m.m.:s (fuktigt?) lufttryck och temperaturen t° .

Jag stod just i begrepp att använda denna formel vid tolkningen af det lilla material jag samlat under Frih. NORDESKIÖLD'S expedition, då det första bandet af Challenger-expeditionens arbeten utkom och gjorde mig osäker på riktigheten af den TORNÖESKA formeln.

De undersökningar öfver syrets och qväfvets absorptionskoefficienter, för hvilka DITTMAR¹⁾ derstädes redogör, gifva ett från TORNÖES ganska afvikande resultat. DITTMAR finner städse högre koefficienter än TORNÖE. Men ej nog dermed. DITTMAR har äfven gjort absorptioner på destilleradt vatten och funnit luftens absorptionskoefficienter för rent vatten *mycket* högre än dem, som BUNSEN iakttagit. Att skilnaderna mellan de olika observatörernas uppgifter verkligen äro betydande, torde inses, om man nämner, att der BUNSEN har talet 20,35, der har DITTMAR 24,40, och der TORNÖE har 14,40, der har DITTMAR 15,60.

Det bör kanske anmärkas, att ingen af dessa experimentatorer har använt fullt samma förfaringssätt. BUNSEN²⁾ har gått *syntetiskt* till väga. Han har framställt ren qväfgas genom att leda luft öfver glödande kopparfilspån. Med användande af sin absorptiometer och med iakttagande af gasens volymförminskning har han sedan undersökt, huru mycket af den sålunda framställda gasen rent vatten löser vid olika temperaturer. — TORNÖE har arbetat *analytiskt*, i det han mättadt hafsvatten vid vissa konstanta temperaturer med vanlig atmos-

¹⁾ Report on the Scientific Results of the Voyage of H. M. S. Challenger etc. Vol. I. Part. 1, s. 160. London 1884.

²⁾ Gasometrische Methoden von ROBERT BUNSEN, s. 192—209.

ferisk luft. Af detta vatten har han derpå enligt JACOBSENS metod kokat en viss mängd samt insmält och analyserat den urkokade gasen. — DITTMAR har försökt flera sätt, i början med ringa framgång. Han har likväl i hufvudsak arbetat identiskt med TORNÖE. Den väsendtligaste skilnaden torde vara, att han vid urkokningen använt en vigtig förbättring af den JACOBSENSKA apparaten.

Å ena sidan talar den omständigheten, att DITTMAR i allmänhet funnit *högre* värden än BUNSEN och TORNÖE, för riktigheten af hans bestämningar. Men å andra sidan har man *två* observatörer, hvilkas resultat, jemfördt med DITTMARS, gå i ungefär samma led, och af dessa är den ena en man, hvars undersökningar på detta område hafva ett nästan klassiskt anseende. Kort sagdt: när jag befann mig i valet mellan TORNÖES och DITTMARS uppgifter, kunde jag ej besluta mig för, hvilketdera jag skulle mest lita på. Jag beslöt derföre att sjelf pröfva, hvilken den trovärdigaste kunde vara. Men ju mer jag kom in i kritiken af BUNSENS, DITTMARS och TORNÖES bestämningar, desto mera blef jag öfvertygad om, att hela denna fråga kunde tariffa en revision. Bland annat trodde jag mig finna nödvändigheten af att undersöka icke blott temperaturens, utan äfven salthaltens inverkan på qväfvemängden.

De absorptionsförsök, för hvilka jag här vill redogöra, öfverensstämma med TORNÖES och DITTMARS nästan endast genom sin analytiska karakter. De närmare omständigheterna vid experimenten voro följande:

De vatten, som vid försöken användes, vore destilleradt vatten samt hafsvatten af salthalterna 1,7784, 2,6580 samt 3,5126 proc. Dessa salthalter förhålla sig till hvarandra ungefär såsom 2:3:4.

För urkokningen af gasen ur vätskan användes den apparat, som är afbildad på taflorna 3 och 4 och beskrifven i den fjerde afdelningen (sid. 50) af denna uppsats. Absorptionen af luften företogs i sjelfva urkokningsballongen (B), hvadan således all minskning eller ökning af den absorberade luftquantiteten genom vätskans förflyttning från ett kärl till ett annat fullständigt undveks.

Under absorptionen befann sig ballongen nedsänkt i ett temligen stort vattenbad (af 5—6 liters rymd), hvars temperatur hölls konstant. Vattenbadet var af glas, dess väggar voro väl isolerade genom flera lager af papp och bomullsvadd,

och temperaturen i det rum, der absorptionen företogs, hölls något så när öfverensstämmande med den önskade absorptions-temperaturen. Derföre visade det sig i allmänhet vara ringa svårighet att hålla fluktuationerna i vattenbadets temperatur inom 0,2 Celsiusgrader.

Den luft, som användes, togs från ett högt beläget hustak och leddes derifrån in i laboratorierummet. Den fick derpå passera genom en tvättflaska, innehållande syrsatt vatten, genom ett rör med bomull samt genom ett kulrör, som var nedsänkt i vattenbadet och innehöll vatten af samma slag och temperatur, som absorptionsvattnet. Till sist leddes denna luft i fina blåsor genom urkokningskärlet, der den vätska befann sig, som var undersökningens föremål. Luftens genom-sugning åstadkoms genom en vattenluftpump.

Emedan den luft, som kom i beröring med absorptionsvattnet, sålunda var af en mot dettas salthalt och temperatur svarande fuktighetsgrad, undveks all förändring i salthalt och volym hos den en gång afmätta och med afseende på sin klorhalt undersökta vätskan.

Den öfre delen af absorptionskärlet stod i förbindelse med en qvicksilfver-manometer, som angaf, huru mycket mindre trycket var i absorptionskärlet än utanför detsamma. Det torde vara onödigt att tillägga, att barometern observerades vid slutet af hvarje absorption, samt att den tryckskilnad, som manometern angaf, subtraherades från det aflästa barometerståndet.

Vid analysen af den urkokade gasen absorberades först kolsyran med kalilut, derefter syrgasen med pyrogallussyradt kali. Detta absorptionsmedel har efter CLOËS¹⁾ och BOUSSINGAULTS²⁾ undersökningar kommit i misskredit. De hafva nämligen visat, att, då pyrogallussyran på syrets bekostnad oxideras, bildas städse en liten quantitet koloxid, hvilken kan anslås till ungefär 0,4 proc. af syrgasens mängd. Uti närvarande fall torde detta fel vara af ringa betydelse. Emedan den af vatten ur luft absorberade syrgasen städse är ungefär hälften af qväfgasens volym, skulle således denna senare genom koloxidbildningen ökas med 0,2 proc., hvilken quantitet torde kunna lemnas utan afseende, särdeles som en liten gasrest väl alltid kvarstannar i det kokade vattnet.

¹⁾ Compt. Rend. Bd 57, s. 870.

²⁾ Compt. Rend. Bd 57, s. 885.

I nedanstående tabell har jag samlat resultaten af alla absorptionerna. De aflästa gasvolymerna äro reducerade till 0° och 760 m.m. samt till absorption vid 760 m.m. *tort* lufttryck. För kontrollens skull har jag i tabellen äfven uppsatt absorptionens varaktighet. I allmänhet har jag låtit absorptionerna vid 0°

[illegible]

räcka längre än de vid 10° och 20°, emedan vid 0° en mycket större luftmassa skall absorberas, och emedan det var ingen svårighet att hålla denna temperatur nästan absolut konstant.

För så vidt den använda metoden ej är behäftad med några större konstanta fel, torde ofvanstående tabell kunna gifva en temligen sanningsenlig föreställning om experimentens större eller mindre tillförlitlighet. Medelfelet för hvarje enkel bestämning uppgår till $\pm 0,0276$ cub.-cent. eller till ungefär 0,2 procent af den bestämda qvantiteten.

I nedanstående tabell har jag på ett öfverskådligare sätt uppställt medeltalen för vatten af samma salthalt och temperatur.

Tabell,

utvisande, huru många cub.-cent. qväfgas en liter vatten af nedanstående salthalter och temperaturer förmår lösa ur atmosfärisk luft vid 760 m.m. tort lufttryck.

	Vattnets sign.	Procent salt.	Cub.-cent. qväfgas i en liter vid 0°.	Diffe- rens.	Cub.-cent. qväfgas i en liter vid +10°.	Diffe- rens.	Cub.-cent. qväfgas i en liter vid + 20°.
	<i>a</i>	0,0000	19,139	3,995	15,144	2,516	12,628
Diff.		1,7784	2,426		1,690		1,309
	<i>b</i>	1,7784	16,713	3,259	13,454	2,135	11,319
Diff.		0,8796	0,981		0,725		0,569
	<i>c</i>	2,6580	15,732	3,003	12,729	1,979	10,750
Diff.		0,8546	0,893		0,683		0,515
	<i>d</i>	3,5126	14,839	2,793	12,046	1,811	10,235

Det synes af ofvanstående, huru betydlig skilnaden är mellan de qväfvemängder, som vatten af olika salthalt absorbera — en skilnad, som, så vidt jag vet, hittills ej blifvit framhållen. Visserligen är hafvets salthalt föga variabel, men äfven denna ringa variation är ej att förgäta. En skilnad af 0,2 i saltprocenten motsvarar t. ex. en skilnad af ungefär 0,15—0,2 c.c. i den absorberade qväfvemängden.

Qväfvemängdens variation med salthalten vid temp. 0° , $+10^{\circ}$ och $+20^{\circ}$ kan uttryckas genom följande interpolationsformler.

Vid temp.	absorberar vatten af salthalten s proc. vid 760 m.m. tort lufttryck ur atmosfären en qväfvemängd, som är =	Formel N:o
0°	$19,139 - 1,5078 \cdot s + 0,080762 \cdot s^2$	1
$+10^{\circ}$	$15,144 - 1,0204 \cdot s + 0,039412 \cdot s^2$	2
$+20^{\circ}$	$12,628 - 0,79254 \cdot s + 0,031681 \cdot s^2$	3

Vid uträkningen af dessa formler har jag undantagit bestämningarna för vattnet c , hvilka icke såsom de öfriga äro af flera enkla observationer beräknade medeltal. För detta vatten (salthalten = 2,658 proc.) gifva formlerna följande qväfvemängder:

Temp.	Beräknad qväfvemängd.	Observerad qväfvemängd.
0°	15,702	15,732
$+10^{\circ}$	12,710	12,729
$+20^{\circ}$	10,745	10,750.

I likhet med ofvanstående formler för qväfvemängdens beroende af salthalten kunna naturligen äfven formler beräknas för temperaturens inverkan. En sådan för destilleradt vatten gällande, ur observationerna direkt utletad formel skulle hafva utseendet:

$$N = 19,139 - 0,4735 \cdot t + 0,0074 \cdot t^2.$$

Vid några kalkyleringar med denna formel kom jag snart under fund med ett fel, som den hade: den är fullkomligt oduglig för extrapolation till och med för temperaturer, som endast äro obetydligt högre än $+20^{\circ}$, emedan den tredje termen växer alltför raskt. Från och med en temp. nära $+40^{\circ}$ ger formeln en med temperaturen *växande* qväfvehalt.

Men om man gör det antagandet, att qväfvemängden vid 100° är 0 c.c., samt beräknar en ny formel med en fjerde term, erhåller man

$N = 19,139 - 0,48616 \cdot t + 0,009301 \cdot t^2 - 0,00006353 \cdot t^3$,
hvilken för temperaturer öfver 20° ger temligen sannolika värden och för temperaturer mellan 0° och 20° värden, nästan identiska med dem, som den första formeln gifver.

Med tillhjelp af formlerna N:o 1, 2 och 3 samt med ofvan nämnda antagande ¹⁾ har jag för salthalterna 0, 1, 2, 3 och 3,5

¹⁾ Detta antagande stöder sig ej på någon observation. Men äfven ett temligen stort fel (t. ex. 2—3 c.c.) i det samma är af föga betydelse, om formeln ej begagnas för högre temperaturer än $+25^{\circ}$ — 30° .

proc. beräknat nedanstående formler för qväfvemängdens variation med temperaturen.

Vatten af salthalten.	absorberar vid 760 m.m. tort lufttryck och temperaturen t ur atmosfären en qväfvemängd, som är =	Formel N:o
0,0 proc.	$19,139 - 0,48616 \cdot t + 0,009301 \cdot t^2 - 0,00006353 \cdot t^3$	4
1,0 »	$17,712 - 0,42828 \cdot t + 0,0078736 \cdot t^2 - 0,00005362 \cdot t^3$	5
2,0 »	$16,446 - 0,38260 \cdot t + 0,0068794 \cdot t^2 - 0,00004698 \cdot t^3$	6
3,0 »	$15,342 - 0,34922 \cdot t + 0,006318 \cdot t^2 - 0,00004360 \cdot t^3$	7
3,5 »	$14,851 - 0,33720 \cdot t + 0,006200 \cdot t^2 - 0,00004313 \cdot t^3$	8

Dessa formler hafva legat till grund för den tabell, som här nedan meddelas. Qväfvemängderna för temperaturer under 0° äro erhållna genom att utleta de sannolikaste differenserna.

Tabell,

utvisande, huru många cub.-cent. qväfgas (reducerade till 0° och 760 m.m.) en liter vatten af nedanstående salthalter och temperaturer förmår lösa vid 760 m.m. tort lufttryck.

Temp.	Salt-halt = 0,0 proc.	Diff.	Salt-halt = 1,0 proc.	Diff.	Salt-halt = 2,0 proc.	Diff.	Salt-halt = 3,0 proc.	Diff.	Salt-halt = 3,5 proc.	Temp.
— 3°	20,69	1,63	19,06	1,40	17,66	1,21	16,45	0,52	15,93	— 3°
— 2°	20,15	1,55	18,60	1,36	17,24	1,17	16,07	0,52	15,55	— 2°
— 1°	19,64	1,49	18,15	1,31	16,84	1,14	15,70	0,51	15,19	— 1°
0°	19,14	1,43	17,71	1,26	16,45	1,11	15,34	0,49	14,85	0°
+ 1°	18,66	1,37	17,29	1,22	16,07	1,07	15,00	0,48	14,52	+ 1°
2°	18,20	1,31	16,89	1,18	15,71	1,04	14,67	0,47	14,20	2°
3°	17,76	1,26	16,50	1,14	15,36	1,01	14,35	0,46	13,89	3°
4°	17,34	1,22	16,12	1,10	15,02	0,98	14,04	0,44	13,60	4°
5°	16,93	1,17	15,76	1,06	14,70	0,95	13,75	0,43	13,32	5°
6°	16,54	1,13	15,41	1,02	14,39	0,92	13,47	0,43	13,04	6°
7°	16,17	1,09	15,08	0,99	14,09	0,90	13,19	0,41	12,78	7°
8°	15,81	1,05	14,76	0,96	13,80	0,87	12,93	0,40	12,53	8°
9°	15,47	1,01	14,46	0,93	13,53	0,85	12,68	0,39	12,29	9°
10°	15,14	0,98	14,16	0,90	13,26	0,82	12,44	0,38	12,06	10°
11°	14,83	0,95	13,88	0,87	13,01	0,80	12,21	0,38	11,83	11°

Temp.	Salt- halt = 0,0 proc.	Diff.	Salt- halt = 1,0 proc.	Diff.	Salt- halt = 2,0 proc.	Diff.	Salt- halt = 3,0 proc.	Diff.	Salt- halt = 3,5 proc.	Temp.
+ 12°	14,53	0,92	13,61	0,85	12,76	0,77	11,99	0,37	11,62	+ 12°
13°	14,25	0,89	13,36	0,83	12,53	0,76	11,77	0,35	11,42	13°
14°	13,98	0,87	13,11	0,80	12,31	0,74	11,57	0,34	11,23	14°
15°	13,73	0,85	12,88	0,78	12,10	0,72	11,38	0,34	11,04	15°
16°	13,48	0,82	12,66	0,77	11,89	0,70	11,19	0,32	10,87	16°
17°	13,25	0,81	12,44	0,74	11,70	0,68	11,02	0,32	10,70	17°
18°	13,03	0,79	12,24	0,73	11,51	0,66	10,85	0,31	10,54	18°
19°	12,82	0,77	12,05	0,71	11,34	0,65	10,69	0,30	10,39	19°
20°	12,63	0,76	11,87	0,70	11,17	0,63	10,54	0,29	10,25	20°
21°	12,44	0,75	11,69	0,68	11,01	0,62	10,39	0,28	10,11	21°
22°	12,27	0,74	11,53	0,67	10,86	0,61	10,25	0,27	9,98	22°
23°	12,10	0,73	11,37	0,65	10,72	0,60	10,12	0,27	9,85	23°
24°	11,95	0,72	11,23	0,65	10,58	0,58	10,00	0,27	9,73	24°
25°	11,81	0,72	11,09	0,64	10,45	0,57	9,88	0,26	9,62	25°

Ofvanstående tabell har jag i grafisk form framställt på medföljande tafla 1, hvilken torde med fördel kunna användas. när det är fråga om qväfvemängder, temperaturer och salt-halter, som ligga mellan de i tabellen upptagna.

Om man vill med tillhjälp af den grafiska framställningen söka den qväfvemängd, som motsvarar en känd salthalt och en känd temperatur, tillvägagår man på följande sätt. För tydlighetens skull vill jag dervid taga ett praktiskt exempel.

Huru mycket qväfve absorberas i ett vatten af salthalten 2,66 och temperaturen 0°?

Tag på ordinatan för 0° med en passare afståndet mellan kurvorna för 2,0 och 3,0 proc. salt! Sök på »skalan» den (tänkta eller dragna) af de parallella transversalerna, som är lika lång med detta afstånd! Låt passarens ena ben qvarstå på linien 0,0 samt uppsök med det andra den punkt på transversalen, som skäres af en tänkt, mellan linien 0,6 och linien 0,7 lig-gande linie med värdet 0,66! Flytta passaren och sätt den på ordinatan för 0° med det öfre benet på den punkt, som bestämmes af denna ordinata och kurvan för 2,0 proc. salt! Sök abscissan till den punkt, på hvilken det andra benet står!

Svaret på uppgiften är: 15,70 c.c. qväfgas på litern.

Om man vill veta, hvilken temperatur motsvarar en känd salthalt och qväfvemängd, tillvägagår man på ett fullkomligt analogt sätt.

Såsom jag förut nämnt, var det i början af denna undersökning min afsigt att endast öfvertyga mig om, hvilken af de tre observatörerna, BUNSEN, TORNÖE och DITTMAR, hade lemnat de trovärdigaste uppgifterna. I nedanstående tabell vill jag derföre jämföra deras och mitt resultat.

De tal, som jag för destilleradt vatten erhållit, har jag för att underlätta jämförelsen reducerat till absorption ur ren qväfgas genom att dividera dem med 0,7905, i det den använda luftens halt af qväfgas sattes = 79,05 vol. proc.

Vid temp.	absorberas vid 760 m.m.:s tryck af en liter						Temp.
	rent vatten ur ren qväfgas följande c.c. qväfgas enligt			»hafsvatten» ur atmosfärisk luft följande c.c. qväfgas enligt			
	BUNSEN.	DITTMAR.	HAMBERG.	TORNÖE.	DITTMAR.	HAMBERG.	
0°	20,35	24,40	24,21	14,40	15,60	14,85	0°
+ 5°	17,94	21,62	21,42	13,25	13,86	13,32	+ 5°
+ 10°	16,07	19,43	19,15	12,10	12,47	12,06	+ 10°
+ 15°	14,78	17,65	17,37	10,95	11,34	11,04	+ 15°
+ 20°	14,03	16,19	15,98	—	10,41	10,25	+ 20°
+ 25°	—	14,95	14,94	—	9,62	9,62	+ 25°

Differenserna äro i allmänhet störst och mest utpräglade vid de lägsta temperaturerna.

Beträffande destilleradt vatten torde tabellen genom den jämförelsevis goda öfverensstämmelsen mellan DITTMARS och mina bestämningar ådagalägga, att de af BUNSEN funna absorptionskoefficienterna för qväfgas äro alltför låga.

Med afseende på hafsvatten visa mina bestämningar deremot en mycket bättre öfverensstämmelse med TORNÖES än med DITTMARS. Med anledning häraf vill jag erinra om följande:

Att TORNÖE vid den lägsta temperaturen (0°) funnit en jämförelsevis låg qväfvehalt, torde hafva sin förklaringsgrund, dels i den omständigheten att absorptionen ej företagits i samma kärl som urkokningen, dels i den af honom använda JACOBSENSKA metoden. Det tryck, under hvilket vätskan i

JACOBSSENS apparat kokar, är *högre* vid *större* mängder urkokad gas, under det att värmekällan är ungefär densamma. Derför kan man ej hoppas att af en större absorberad gasmängd få *jemförelsevis* lika mycket utdrifvet som af en mindre.

Hvarken TORNÖE eller DITTMAR hafva noga uppgifvit, af hvilken salthalt det vatten var, som de vid absorptionerna använde. TORNÖE säger sig hafva begagnat ett »Sövand af nogenlunde höi Egenvägt». DITTMAR har deremot använt ett högst problematiskt hafsvatten, af honom själf tillverkad. Han säger sig dock hafva bemödat sig om att åstadkomma en saltlösning, som med afseende på sin sammansättning så nära som möjligt motsvarade hafsvatten.

För 0°, den temperatur, vid hvilken skilnaderna mellan TORNÖES, DITTMARS och mina bestämningar äro störst, är det tal jag funnit medeltal af nio enkla med hvarandra väl öfverensstämmande analyser. Det bör derföre hafva en viss trovärdighet, för så vidt den metod jag använt ej är behäftad med några konstanta, af mig ej kända felkällor.

När jag var sysselsatt med Sofia-expeditionens hydrografiska utrustning, måste jag äfven egna luftbestämningarna någon uppmärksamhet. Den metod, som för ifrågavarande ändamål dittills visat sig vara den enda användbara, var den JACOBSSENSKA. Den finnes beskrifven på så många ställen (af JACOBSEN ¹⁾, TORNÖE, DITTMAR), att jag här trygt kan förbigå alla detaljer. Hufvudprincipen är: hafsvatten kokas i en slutten apparat under ett genom vattenånga frambragt vacuum, den urkokade luften insmältes, förvaras och analyseras. Såsom en hufvudförtjenst hos denna metod har man framhållit, att urkokningen företages på observationsplatsen (ombord), under det att analysen af den urkokade gasen kan uppskjutas och utföras i ett välförsedt laboratorium på fasta landet.

Jag iordningstälde en apparat efter JACOBSSENS beskrifning och gjorde med den några förberedande försök. Dessa slogo icke så särdeles väl ut; brist på vana spelade härvid naturligen en betydande roll. Emellertid trodde jag mig finna, att metodens användning skulle taga mycken tid i anspråk, och om man finge tro TORNÖE, mycken möda blifva förspild. De

¹⁾ Ann. Chem. Pharm. Bd 167, s. 12.

sista gasresterna voro svåra att få urkokade, kokningen kunde ej på något vigt sätt regleras, och vid insmältningen måste man alltid blifva vittne till, huru en större eller mindre blåsa förlorades.

De af JACOBSEN och TORNÖE ombord utförda dubbelanalyserna talade ej heller för metodens noggrannhet. Den halfva differensen mellan två på samma vatten gjorda bestämningar af qväfvemängden tycktes i allmänhet uppgå till omkr. ± 2 proc.

Jag uppstälde för mig den frågan, om jag ej skulle kunna åstadkomma en enkel och ombord användbar apparat, inom hvilken såväl urkokningen som analysen af den urkokade gasen skulle kunna försiggå.

Efter åtskilliga förslag stannade jag vid det, som återfinnes på tafl. 2. Apparaten¹⁾ tillverkades af GEISSLER i Bonn och användes i korthet på följande sätt:

Det vatten, som skall undersökas, fylles i en pipett, sådan som figur 2 på taflan 2, i det slangen k_1 fästes på vattenhemtarens kran, hvilken derefter öppnas. När pipetten är fylld, och något vatten runnit genom densamma, sättes en klämmare vid k_1 , en vid k_2 och derpå en tredje vid k_3 , hvarefter den vid k_2 borttages. Vattnet befinner sig nu i pipetten under ett så högt tryck, att det kan förvaras vid en temperatur högre än temperaturen i hafvet, utan att någon utfällning af gasblåsor inträder. När pipetten skall öppnas, och vattnet undersökas, bör det likväl ej hafva en alltför hög temperatur.

De pipetter jag använde rymde 40 c.c. mellan märkena m_1 och m_2 . För urkokning nedhåldes denna volym i ballongen A (fig. 1 på taflan 2), hvarifrån den fick rinna ned i B . Qvicksilfver haldes i A och C . Från A nedsläptes i B så mycket qvicksilfver, att vattnet i B stod till t , och från C infördes så mycket, att en kort qvicksilfvertråd bildade sig i röret ofvanför B . Den afmätta vattenquantiteten befann sig nu innesluten i B mellan tvänne qvicksilfverytor, den ena öfver, den andra under.

Röret r var 10 centimeter längre än teckningen visar samt mynnade med sin nedre ända i ett kärl med qvicksilfver; om detta rör var fullt med qvicksilfver, samt om kranarna 2, 3

¹⁾ Redan här må påpekas, att samma apparat är betydligt underlägsen den metod, som beskrifves i det fjärde kapitlet.

och 4 höllos stängda och kranen 1 öppen, kunde vattnet i *B* utsättas för ett tryck mindre än en atmosfär, men för ett tryck högre än en atmosfär, om kranarna 1, 3 och 4 voro stängda och kranen 2 öppen.

För att få vätskan i *B* att koka sattes den under lågt tryck och uppvärmdes genom att koka vatten i vattenbadet *V*, hvars öfre del *G* var af glas. De urkokade gasblåsorna samlade sig i den öfre delen af *B*. Genom att stänga kranen 1 och genom att lämpligt och försigtigt manövrera med kranarna 2 och 3 kunde man föra först qvicksilfvertråden, så den urkokade gasen och sist vätskan upp i mätröret *R*. Jag lyckades aldrig urkoka hela gasquantiteten på en gång utan i mindre portioner, hvilka tid efter annan fördes upp i mätröret *R*. Till slut erhöll man så små blåsor, att de obehindradt kunde uppsiga genom vätskan i det fina röret öfver *B*.

Den urkokade gasen mättes i det noga kalibrerade röret *R* mellan vätskans öfre nivå, som befann sig på skalans nollpunkt, och qvicksilfvertrådens undre yta. Temperaturen i vattenbadet kring *R* iaktogs, barometern aflästes, och till det aflästa barometertrycket lades längden af qvicksilfvertråden.

Till och med, när fartyget rullade, kunde man få ganska skarpa afläsningar, om trådens längd var liten.

Absorption af en gas kunde företagas, om vattnet i *B* ersattes med qvicksilfver, om absorptionsmedel infördes från *C* och gasen nedsläpptes så långt, att qvicksilfvertråden stannade något ofvanför *t*. I allmänhet plägade jag endast bestämma qväfvehalten i vattnet och brukade redan före kokningen tillsätta pyrogallussyradt kali (+ kali).

Detta absorptionsmedel är såsom förut är sagdt (sid. 18) ingalunda ofelbart, men de analytiska fel, som det i närvarande fall kan gifva, äro af ingen betydelse. För att emellertid öfvertyga mig om, att jag vid ofvanstående förfaringssätt endast fick ren qväfgas utkokad utan några nämnvärda inblandningar af kolsyra, koloxid eller syrgas har jag gjort följande iakttagelser:

Omkring 600 c.c. vatten försattes med ett öfverskott af pyrogallussyradt kali, lösningen kokades, och gasen insmältes efter JACOBSENS metod. Samma experiment upprepades ännu en gång. De urkokade gasquantiteterna analyserades med användning af FRANKLAND-WARD-MAC LEOD's gasanalysapparat. Analysernas detaljer voro följande:

	Exp. 1.	Exp. 2.
	Cub.-cent. v. 0° och 760 m.m.	
Den urkokade gasmängden.....	7,34	6,89
Dito efter absorption med KaOH.....	7,33	6,89
» » tillsats af atmosf. luft.....	7,94	7,54
» » » » knallgas.....	11,50	13,95
» » explosion.....	7,98	7,51
» » absorption med KaOH.....	—	7,48
» » tillsats af vätgas.....	10,76	10,01
» » » » knallgas.....	15,04	15,88
» » explosion.....	10,25	9,79
Dessa sistnämnda volymer hade beräk- nats till.....	10,35	9,65
I den urkokade gasen fanns således CO ₂ +	0,01	0,00
» » » » » » CO —	0,04	+ 0,03
» » » » » » O +	0,03	— 0,05.

Den urkokade gasquantiteten var egentligen för liten för att med noggrannhet kunna analyseras i den apparat jag använde. Men emedan värdena på de fruktade inblandningarna än utföllo negativt, än positivt, trodde jag mig kunna anse gasen såsom ren qväfgas åtminstone så nära som på några tiondels procent.

Förutom den på taflan 2 tecknade apparaten för bestämningar af qväfgasen i vatten medförde jag såsom reserv alla tillbehör till den JACOBSENSKA metoden. I början af expeditionens färd använde jag nästan endast min apparat, men då densamma redan under den femtonde urkokningen helt oväntadt sprack, var jag uteslutande hänvisad till JACOBSENS. Jag kom likväl ej att begagna denna senare i någon större utsträckning — den tog mycken tid i anspråk, och man hade ej den minsta kontroll på, huru man arbetade.

De prof, som under resan insmältes, analyserades med tillhjälp af FRANKLAND-WARD-MAC LEODS gasanalysapparat¹⁾, hvarvid kolsyran absorberades med kalilut, och syrgasen förbrändes med öfverskott af elektrolytisk vätgas.

I nedanstående tabell har jag samlat alla de med min apparat gjorda bestämningarna (N:o 1—14). Hvad åter de

¹⁾ Journ. Chem. Soc. Ser. 2, Vol. 7, s. 313. On a new form of apparatus for gas analysis by HERBERT MAC LEOD.

analyser beträffar, som äro gjorda med JACOBSENS metod, har jag måst utränga jemförelsevis många, emedan de gåfvo alltför höga värden på qväfvemängderna. Jag kan ej se några andra förklaringsgrunder till detta förhållande än, att antingen har jag ej mäktat åstadkomma ett fullkomligt luftfritt vacuum i uppsamlingsröret (das Gassammelrohr) före urkokningens början, eller ock har apparaten ej hållit fullt tätt. De bestäm-

N:o.	Vattnprof N:o.	N. Lat.	V. long. fr. Greenwich.	Djup (meter).	Proc. salt.	Temperatur (oberoernd).	Temperatur (beräknad).	Differens.	Qväfvemängd (oberoernd).	Qväfvemängd (beräknad).	Differens.	Syreprocent.
1	1	{nära Kap Ut- scalar Reykjavik	{	50	3,486	+ 6°,1	+ 8°,3	- 2°,2	12,47	13,02	- 0,55	—
2	2			0	3,453	+ 6°,4	+ 6°,5	- 0°,1	12,95	12,98	- 0,03	—
3	3	65° 27'	35° 4'	0	3,291	- 0°,8	- 0°,2	- 0°,6	15,11	15,34	- 0,23	—
4	4	65° 15'	35° 30'	100	3,436	+ 3°	+ 4°	- 1°	13,66	13,95	- 0,29	—
5	5	"	"	300	3,483	+ 5°?	+ 5°,4	—	13,20	—	—	—
6	10	63° 36'	38° 1'	100	3,524	+ 6°	+ 9°,2	- 3°,2	12,21	13,02	- 0,81	—
7	12	62° 35'	40° 4'	50	3,489	+ 5°,1	+ 6°,7	- 1°,6	12,86	13,30	- 0,44	—
8	13	"	"	450	3,513	"	+ 5°,3	- 0°,2	13,22	13,27	- 0,05	—
9	"	"	"	"	"	"	+ 5°,8	- 0°,7	13,09	13,27	- 0,18	—
10	49	60° 15'	45° 40'	75	3,302	- 0°,6	+ 0°,5	- 0°,1	14,87	15,25	- 0,38	—
11	50	"	"	100	3,322	- 0°,6	+ 1°,6	- 2°,2	14,50	15,23	- 0,73	—
12	96	{Fjorden utan- för Juliane- haab	{	225	3,395	+ 0°,6	+ 2°,6	- 2°	14,11	14,75	- 0,64	—
13	"			"	"	"	+ 3°,0	- 2°,4	14,00	14,75	- 0,75	—
14	98	Arsukfjorden		550	3,411	+ 1°,7	+ 3°,9	- 2°,2	13,70	14,39	- 0,69	—
15	1	{nära Kap Ut- scalar	{	50	3,486	+ 6°,1	+ 8°	- 1°,9	12,55	13,02	- 0,47	31,28
16	12			50	3,489	+ 5°,1	+ 0°,7	+ 4°,4	14,64	13,30	+ 1,34	32,44
17	49	60° 15'	45° 40'	75	3,302	- 0°,6	- 2°,5	+ 1°,9	15,94	15,25	+ 0,69	33,87
18	129	{Mellville bay på 75° n. lat.	{	600	3,428	0°?	+ 1°,8	—	14,35	—	—	26,97
19	—			800	—	+ 1°,2	+ 0°,9?	—	14,62	14,51?	—	30,42
20	132	75° 26'	67° 27'	100	3,372	- 1°,2	- 0°,8	- 0°,4	15,25	15,41	- 0,16	31,57
21	133	"	"	500	3,441	+ 0°,9	+ 2°,4	- 1°,5	14,12	14,60	- 0,48	27,15
22	137	74°	64° 30'	625	3,446	0°?	+ 1°,9	—	14,29	—	—	27,25
23	112	{Arsukfjorden	{	150	3,322	- 0°,4	+ 1°,9	- 2°,3	14,41	15,15	- 0,74	32,78
24	116			200	3,378	+ 1°	+ 0°,8	+ 0°,2	14,71	14,63	+ 0,08	31,55
25	23	60° 46'	41° 42'	1,350	3,511	+ 3°,7	+ 7°,7	- 4°,0	12,60	13,67	- 1,07	33,91
26	27	63° 10'	40° 35'	400	3,248	+ 0°,2	- 0°,1	+ 0°,3	15,11	15,02	+ 0,09	33,19
27	30	65° 33'	37° 32'	50	3,235	- 0°,85	+ 0°,2	- 1°,05	15,04	15,40	- 0,36	33,92

ningar, som ej blifvit kasserade, äro i tabellen upptagna under N:o 15—27.

För att möjliggöra några slutsatser dragande har jag med tillhjälp af taflan 1 letat mig till den mot observerad qväfvemängd och salthalt svarande temperaturen [temperatur (beräknad)] och den mot observerad temperatur och salthalt svarande qväfvemängden [qväfvemängd (beräknad)]. Dessa siffror afvika möjligen med en, högst två enheter i den andra decimalen från dem, som kunna beräknas ur tabellen på sid. 22.

Dubbelbestämningarna N:o 8 och 9 samt N:o 12 och 13 torde kunna gifva en föreställning om den vid best. N:o 1—14 använda metodens större eller mindre noggrannhet.

Hvad nu beträffar resultatet af ofvanstående tabell, så är det ingalunda något betydande. Jag vill likväl egnä det några ord och vill då uteslutande hålla mig till de bestämningar, som äro gjorda med den på taflan 2 aftecknade apparaten.

Vid en blick på kolumnerna för observerad och beräknad qväfvemängd finner man, att den i hafvet observerade qväfvehalten städse är något lägre (0,03—0,81 c.c.) än den beräknade. Att en stor del af denna skillnad torde få skrivas på den bestämningssmetod, som under expeditionen användes, torde kunna sättas utom allt tvifvel, men hufvudorsakerna kunna ej vara några andra än följande:

De mängder qväfgas, som jag vid mina absorptionsförsök (se sid. 19) funnit, att vatten af olika salthalter lösa vid olika temperaturer, äro städse reducerade till absorption vid 760 m.m. tort lufttryck. Den del af atmosfären deremot, som ligger närmast hafvets yta är naturligen mättad med fuktighet. Vattenångans tension är enligt REGNAULT

$$\text{vid } 0^{\circ} = 4,6 \text{ m.m.}$$

$$» \quad 5^{\circ} = 6,5 \quad »$$

$$» \quad 10^{\circ} = 9,2 \quad »$$

Men vidare. Barometertrycket är i hafven kring den södra delen af Grönland jemförelsevis lågt, och medelbarometerståndet ligger sannolikt närmare 750 m.m. än 760 m.m. Medeltalet för det torra lufttrycket torde derföre ligga nära 745 m.m. Att barometertrycket dessutom tidtals kan sjunka till 20 à 30 m.m. under det normala, bör kanske tilläggas.

Såsom bekant äro de mängder af en gas, som en vätska vid olika tryck absorberar, proportionella mot trycket. Om en

liter vatten vid 760 m.m. tryck absorberar 15 c.c. qväfgas, så absorberas under för öfrigt lika omständigheter

vid 770 m.m. 15,20 c.c.

» 750 » 14,80 »

» 740 » 14,61 »

Om man med dessa data i hand betraktar bestämningarna N:o 1—14 (i tab. på sid. 29), torde man finna, att de i allmänhet ej visa något abnormt åtminstone ej af någon sådan betydelse, att det skulle kräfva en diskussion.

Resultatet af de ombord gjorda qväfgas-bestämningarna skulle således vara:

De vattenlager, som undersökts, hafva i allmänhet visat sig hålla en qväfvemängd, som någorlunda öfverensstämmer med den beräknade, och de kunna följaktligen ej hafva i någon högre grad förändrat sin temperatur, sedan de sist befunno sig i ytan.

3. Om kolsyran i hafsvattnet.

Knappast någon af hafsvattnets beståndsdelar har visat sig så svår att nöjaktigt bestämma som kolsyran. Jag tror mig våga påstå, att man ännu ej har något riktigt begrepp om hafvets sanna halt deraf.

Alla bestämningar, äldre än 1873, äro mycket osäkra; uppgifterna variera till och med mellan så vida gränser som 0,8 c.c. och 116,3 c.c. per liter. Olikheterna i de resultat, som erhållits, tyckas hafva varit i hög grad beroende af de olika metoder, som användts.

JACOBSEN ¹⁾ den tyska Pommerania-expeditionens kemist, har gjort talrika kolsyrebestämningar på hafsvattnet i Nordsjön. I en liter outspädt Nordsjövatten fann han i medeltal bort emot 0,1 gram eller ungefär 50 c.c. kolsyra, och dessa tal afvika jämförelsevis obetydligt från de af senare observatörer funna.

¹⁾ Ann. Chem. Pharm. Bd 167, s. 1.

Han gjorde om olika sätt att utdrifva kolsyran ur hafsvattnet följande erfarenhet:

»Durch kurzes Sieden von Meerwasser unter dem durch Wasserdampf hergestellten Vacuum kann man ein Gasgemenge erhalten, welches neben fast dem ganzen Betrag des Saurstoffs und Stickstoffs weniger als $\frac{1}{2}$ p. C. Kohlensäure enthält.

Bei dem Sieden des Meerwassers ohne Druckverminderung wie es bei den bisherigen Untersuchungen der Meerwassergase angewandt wurde, findet die Entwicklung der Kohlensäure etwas schneller statt, ist aber ebenfalls unvollständig und ebensowohl abhängig von der Dauer der Operation».

JACOBSEN plägade därför vid sina bestämningar destillera hafsvattnet (utan tillsats af något reagens!) ända till torrhet och bestämma kolsyran i destillatet.

Förutom den kvantitativa mängden sökte han äfven utforska, huru kolsyran förekommer i hafsvattnet, och om den får anses kemiskt bunden eller icke. Emedan han ej lyckades påvisa mer än 0,012 gr. neutralbunden kolsyra per liter, uttalade han den åsigten, att kolsyrans hufvudmassa icke ingår i hafsvattnet såsom karbonat. Men i så fall, om kolsyran endast bundes af fysiska band, vore det mycket besynnerligt, att man vid användandet af metoder, som borde hafva varit tillräckliga för att upplösa en fysisk bindning, endast kunde utdrifva högst obetydliga mängder. För att förklara, huru något sådant kunde ega rum, har han framhållit en hemlighetsfull egenskap hos klormagnesiumlösningar att absorbera och energiskt qvarhålla kolsyra.

Denna absorptionsförmåga trodde BUCHANAN¹⁾, Challenger-expeditionens kemist, snarare böra tilläggas hafsvattnets sulfater. Derfor plägade han före hvarje destillation utfälla svafvelsyran med klorbarium. Han lyckades det oaktadt ej erhålla mer än omkring 0,045 gr. CO₂ per liter i hafsvattnet — således ungefär hälften af hvad JACOBSEN funnit i Nordsjövattnet.

Med TORNÖES²⁾ undersökningar tog frågan om kolsyrans förekomstsätt i hafsvattnet ett afgjort och stort steg framåt. Han anser, att kolsyran är helt och hållet bunden af baser, och på denna grund bevisar han oriktigheten af JACOBSENS och BUCHANANS uppfattning samt af de metoder de användt.

¹⁾ Proc. R. Soc. 22, s. 192 och 483.

²⁾ Den Norske Nordhavs-Expedition 1876—78. Chemi. 2. Om Kulsyren i Sövandet af HERCULES TORNÖE.

För kolsyrans utdrifning ur hafsvattnet brukade han göra detta surt med utspädd svafvelsyra af en viss halt, koka det i en ström af kolsyrefri luft, leda gaserna genom ett kylrör för kondensering af möjligen bildade saltsyreångor och till sist absorbera den frigjorda kolsyran genom barytlösning. Vid återtitrering med patronlut på det surgjorda hafsvattnet och med oxalsyra på barytvattnet erhöll han: 1:o) den »neutral-bundna» kolsyrans mängd och 2:o) hela kolsyrehalten. Skillnaden mellan dessa båda kvantiteter var den »surt bundna» kolsyran. Alla TORNÖES bestämningar äro gjorda på prof, som förvarats i flaskor under en längre eller kortare tid.

TORNÖE fann i medeltal för det norska nordhafvets vatten 0,097 gr. CO_2 per liter, hvaraf 0,053 gr. skulle vara neutral-bunden kolsyra. De återstående 0,044 gr. kunna ej existera såsom fri gas, utan måste vara surt bundna. Det är öfverhufvud taget — anser han — ej möjligt, att någon fri kolsyra finnes i hafsvattnet, så snart det karbonat, som förekommer, ej är ett fullständigt bikarbonat. Han är tydligen af den åsigten, att hafsvattnet ej är fullt mättadt med kolsyra.

En kort tid efter det att TORNÖES afhandling utkom, framstälde SCHLOESING ¹⁾ frågan om orsakerna till de ringa variationerna i luftens kolsyrehalt. Han sätter dem i innerligt samband med kolsyrans förekomstsätt i hafvet. I ett undersökt prof från la Manche hade han funnit 0,0983 gr. kolsyra per liter och en kvantitet af disponibel bas, equivalent med 0,0993 gr. SO_3 . Förhållandet mellan kolsyrans equivalent och basens är $\frac{4.47}{2.48}$, hvaraf han drog den slutsatsen, att kolsyran till största delen är bunden såsom bikarbonat. SCHLOESING kom sålunda till ungefär samma resultat, som TORNÖE kort förut kommit till.

SCHLOESING hade i en föregående afhandling ²⁾ visat, att, om man har kolsyrad kalk i ett kärl med rent vatten samt en kolsyrehaltig atmosfär i beröring med dess yta, så är den mängd af bikarbonat, som går i lösningen, beroende af kolsyrans tension i den ofvanstående gasblandningen. Af kolsyrans förekomstsätt i hafsvattnet sluter han nu, att det måste vara ett tillstånd af jemnvigt mellan kolsyran i luften och

¹⁾ Comptes Rendus 1880, 1. 90, sid. 410. Sur la constance de la proportion d'acide carbonique dans l'air par TH. SCHLOESING,

²⁾ Comptes Rendus 1872. 1, 74, s. 1553. Sur la dissolution du carbonate de chaux par l'acide carbonique par TH. SCHLOESING.

kolsyran i hafvet. Emedan slutligen kolsyran förekommer i mycket större mängd i hafvet än i luften, måste således hafvet anses såsom en reservoar och regulator för kolsyran i atmosfären.

Den sista af dem, som sysselsatt sig med studier öfver kolsyran i hafsvattnet är DITTMAR¹⁾. Han ställer sig hufvudsakligen på samma basis och begagnar ungefär samma bestämningsmetod som TORNÖE. DITTMAR har vid sina experiment särskildt sträfvat att bevisa origtigheterna i BUCHANANS sätt att bestämma kolsyran i hafsvattnet, samt att det hafsvatten, som är i beröring med luft vid vanlig temperatur, icke innehåller någon fri kolsyra utan städse ett ofullständigt bikarbonat d. v. s. ett bikarbonat, hvars neutralbundna kolsyremängd är större än den surt bundna.

Af BUCHANANS otillförlitliga²⁾ kolsyrebestämningar ombord på Challenger vågar han draga följande slutsatser:

- 1:st. Free carbonic acid in sea-waters is the exception. As a rule the carbonic acid is less than the proportion corresponding to bicarbonate.
- 2:nd. In surface waters the proportion of carbonic acid increases when the temperature falls, and vice versa.
- 3:rd. Within equal ranges of temperature it seems to be lower in the surface water of the Pacific than it is in the surface water of the Atlantic ocean.

När jag rustade mig för att såsom kemiker deltaga i Frih. NORDENSKIÖLD'S expedition till Grönland 1883, stod jag fullkomligt under inflytande af TORNÖES uppsats. Ett litet, men såsom jag sjelf trodde, någorlunda väl valdt material af hafsvatten hemfördes af mig i rymliga tillsmälta glaströr för att först efter hemkomsten undersökas med afseende på sin kolsyrehalt.

TORNÖE hade med sina 78 bestämningar ej lyckats påvisa några regelbundna vexlingar i kolsyrehalten, vare sig han tog »Dybdeforholdene eller den geografiske Beliggenhed till Udgangspunkt for sin Betragtning».

¹⁾ Report on the Scientific Results of the Voyage of H. M. S. CHALLENGER etc. Vol. 1. Part. 1. Rep. on the composition of the ocean water by W. DITTMAR, s. 103 och 209. London 1884.

²⁾ BUCHANAN fann i hafsvattnet endast ungefär hälften så mycket kolsyra, som han borde funnit.

Jag väntade, att det var med variationerna i kolsyran såsom med vexlingarna i så många andra af hafsvattnets beståndsdelar -- att de skulle vara obetydliga och mycket svåra att upptäcka. Jag tänkte, att endast en skärpt bestämningsmetod skulle kunna framtvinga några upplysningar om lagbundna variationer.

Den metod, som TORNÖE använt, var visserligen den bästa af till buds stående, men icke desto mindre kunde den ej göra anspråk på att kallas särdeles noggrann. Enligt TORNÖES uppgifter kunde halfva medeldifferensen mellan två bestämningar på samma vatten anslås till ungefär 0,6 proc. af totalmängden kolsyra.

Jag beslöt att försöka ett alldeles nytt förfaringssätt, att bestämma kolsyran volumetriskt samt att dervid använda den apparat (tafl. 2), som jag under resan begagnat till bestämningar af qväfgasen i hafsvattnet.

Apparaten användes, såsom förut är beskrifvet (sid. 26). Det tillägget fordras kanske, att hafsvattnet surgjordes med litet svafvelsyra, innan det urkokades.

Det visade sig emellertid vid de förprof, som jag anstälde, att metoden gaf ganska dåliga resultat. Olika bestämningar på samma vatten visade ingalunda någon god öfverensstämmelse, och de värden på kolsyrehalten, som jag erhöll, voro utan tvifvel för låga. Orsaken kunde ej gerna vara någon annan än den, att när en gasquantitet var urkokad och skulle föras upp i mätroret, befann den sig under ett alltför högt tryck, för att ej en stor del af den samma ögonblickligen skulle absorberas.

Att det bör vara mycket svårare att med den ifrågasvarande apparaten nöjaktigt bestämma hafsvattnets kolsyra än dess qväfgas, inses lätt af olikheten i dessa gasers absorptionskoefficienter och deras förhållande till de i verkligheten absorberade gasmängderna. Qväfgasens absorptionskoefficient för vatten är vid 0° endast 0,0242, och ur vanlig luft löser vatten ungefär $\frac{4}{5}$ af denna quantitet. Kolsyrans absorptionskoefficient vid samma temperatur uppgår enligt BUNSEN ända till 1,7967. Rent vatten och surgjordt hafsvatten, som är i beröring med vanlig atmosfärisk luft, kan absorbera endast obetydliga quantiteter kolsyra (omkring 0,0005 vol.), derföre att den atmosfäriska kolsyrans tension är så ringa. Hafsvattnet deremot håller kemiskt bundet omkring 0,05 volymer kolsyra. Om vatten vid

O' kommer i beröring med en gasblandning af den sammansättning (d. v. s. 7 delar CO_2 och 3 delar luft), man vid en kokning af surgjordt hafsvatten erhåller, så sträfvat det att lösa omkring 1,26 volymer eller *en quantitet, som är ungefär 25 gånger så stor, som den kolsyremängd hafsvattnet innehåller.* Man kan naturligen i den ifrågavarande apparaten aldrig koka en vätska så, att den blir absolut fri från all absorberad gas. och det är tydligt, att den qvarhållna gasmängden måste stå i ett visst förhållande till vätskans absorptionsförmåga gentemot den urkokade gasblandningen.

Att det surgjorda hafsvattnet, när det kokas i en sluten apparat, skall särdeles energiskt qvarhålla en del af sin kolsyra, är således ganska klart. Jag fann också snart, att jag ej med den ofvan omtalade apparaten förmådde åstadkomma några ens tillnärmelsevis riktiga resultat med afseende på kolsyran i hafsvattnet.

Då föreslog mig Professor O. PETTERSSON att konstruera en ny apparat, som skulle hafva den fördelen framför den gamla, att den urkokade gasen aldrig skulle behöfva komma i beröring med den kokade vätskan annat än under mycket lågt tryck. I stället för att såsom i den gamla apparaten genom ett öfvertryck *tvunga* ut gasen från urkokningsballongen (*B*, se tafl. 2 fig. 1) i mätroret (*R*), skulle gasen uti den nya *sugas* ut genom ett lämpligt undertryck.

Detta var initiativet till konstruktionen af den apparat, som finnes tecknad på tafl. 3 och 4 och beskrifven i den fjerde afdelningen af denna uppsats (sid. 50).

När jag förvissat mig om apparatens användbarhet, öfvergick jag till bestämningen af kolsyran i de för detta ändamål hemförda i glaströr insmälta vattenproffen. De resultat jag dervid erhöll finnas uppförda i nedanstående tabell.

Några bestämningar på alkaliniteten eller den neutralbundna kolsyran äro derstädes äfven upptagna. De äro gjorda efter ungefär samma metod som den TORNÖE använde: 200 c.c. hafsvatten surgjordes med svafvelsyra af känd halt, kokades i en ström af kolsyrefri luft samt återtitrerades med natronlut, hvarvid fenolftalein tjenade såsom indikator.

Emedan dessa sista bestämningar äro gjorda på vatten, som förvarats omkring $1\frac{1}{2}$ år på glasflaskor, vet jag ej, hvad jag skall tro om deras riktighet. Hafsvattnet innehåller ett surt karbonat, och kolsyran är såsom syra jemförelsevis star-

Vattnets No	N. lat.	V. long. fr. Greenwich.	Djup (meter).	Temp. (Cels.).	Gram klor per liter (Cl.).	(Gram neutraliseradt kolsyra per liter. (Alkalinitet) (A).	A. 100 Cl	(Gram kolsyra per liter. (C. kolsyra	(Gram kolsyra per liter (O ₂).	CO ₂ . 100 Cl.
1 128	Melleville bay		300	+ 0°,4	19,45	0,0521	0,268	—	—	—
2 131	75° 26'	67° 27'	0	+ 0°,4	17,29	0,0484	0,280	45,9	0,0907	0,525
3 "	"	"	"	"	"	"	"	45,6	0,0902	0,522
4 132	"	"	100	— 1°,2	19,15	—	—	51,0	0,1008	0,527
5 "	"	"	"	"	"	—	—	50,9	0,1006	0,525
6 133	"	"	500	+ 0°,9	19,55	0,0531	0,272	52,4	0,1037	0,530
7 "	"	"	"	"	"	"	"	52,3	0,1035	0,529
8 135	74°	64° 30'	0	+ 1°,5	16,87	—	—	46,3	0,0916	0,556
9 137	"	"	625	—	19,58	—	—	54,4	0,1076	0,550
10 60	70° 29'	55° 40'	0	+ 4°,4	18,78	0,0503	0,268	—	—	—
11 61	"	"	90	— 0°,2	19,16	0,0528	0,276	49,3	0,0974	0,509
12 "	"	"	"	"	"	"	"	49,4	0,0977	0,510
13 15	59° 43'	43° 16'	0	+ 0°,1	18,27	0,0493	0,270	—	—	—
14 16	"	"	100	0°	18,99	0,0505	0,266	—	—	—
15 23	60° 46'	41° 42'	1350	+ 3°,7	19,95	—	—	48,5	0,0960	0,481
16 25	63° 10'	40° 33'	0	— 0°,8	17,09	—	—	44,8	0,0888	0,519
17 26	"	"	100	— 0°,7	17,51	—	—	46,0	0,0910	0,520
18 32	65° 25'	37° 15'	50	+ 5°,5	19,68	0,0510	0,259	—	—	—
19 "	"	"	"	"	"	0,0507	0,258	—	—	—
20 37	65° 17'	30° 30'	0	+ 8°,6	20,02	0,0512	0,256	50,5	0,0998	0,499
21 39	"	"	100	+ 7°,2	20,03	—	—	50,1	0,0991	0,494
22 41	"	"	500	+ 5°,6	20,02	0,0513	0,256	49,9	0,0986	0,493
23 43	"	"	1000	+ 4°,4	20,01	—	—	49,7	0,0984	0,492
24 "	"	"	"	"	"	—	—	49,7	0,0984	0,492
25 45	"	"	2025	+ 1°,2	19,94	0,0521	0,261	49,0	0,0968	0,486
26 6	63° 36'	38° 1'	0	+ 5°,2	19,82	—	—	49,3	0,0975	0,492
27 —	utanför Scra- ster i norra Scotland		0	+ 11°	19,80	0,0508	0,256	—	—	—
28 —			"	"	"	0,0511	0,258	—	—	—

kare än kiselsyran. Måne ej den förra skulle hafva kunnat vara i stånd att lösa en del af glasets alkali under denna långa förvaring?

KREUSLER och HENZOLD¹⁾ hafva visat, att vattenånga och hett vatten utlösa ur glas ganska mycket alkali och, såsom det

¹⁾ Ber. d. deutsch. chem. Gesellsch. z. Berlin, 17, s. 34.

synes, i desto större mängder, ju lättsmältare glaset är. Med afseende på kallt vattens verkningar känner jag deremot inga bestämda uppgifter. Någon afgörande förkastelsedom öfver de i tabellen upptagna bestämningarna på alkaliniteten vill jag derföre ej uttala.

Hvad nu sjelfva bestämningsmetoden beträffar, så lär väl resultatet alltför mycket röna inflytande af kokkolfvens beskaffenhet, kokningens varaktighet m. m. för att dessa faktorer ej behöfde tagas med i räkningen. Jag har emellertid icke gjort det, emedan jag för sent fick kännedom om deras betydelse.

Beträffande bestämningarna på totalmängden kolsyra torde tabellen gifva en god föreställning om metodens brukbarhet. De fem dubbelanalyserna gifva mediumfelet $\pm 0,12$ proc. af den bestämda kvantiteten.

Emedan jag sålunda ansåg mig i jemförelse med tidigare observatörer hafva begått mycket små analytiska fel, hoppades jag att af mina siffror kunna draga bestämda slutsatser. Men deruti hade jag ej mycken framgång.

De differenser i relativ kolsyrehalt $\left(\frac{\text{CO}_2 \cdot 100}{\text{Cl}}\right)$, som tabellen visar, äro högst betydliga, till och med 50 gånger så stora som det dubbla medelfelet för hvarje enkel bestämning. Det är visserligen påfallande, att de vatten, som hafva låg temperatur, i allmänhet ega en hög kolsyrehalt och tvärtom, men alltför många betydande undantag och oregelbundenheter finnas för att med någon trygghet kunna draga denna slutsats.

Vid den tid, då jag sysslade med tolkningen af ofvanstående tabell, var min uppfattning af kolsyrans förekomstsätt i hafvet identisk med TORNÖES, och det öfverensstämde just ej med hans åskådningssätt att tänka sig någon af temperaturen beroende variation i kolsyrehalten.

Jag var rädd för, att jag hade begått ett fel vid dessa analyser. TORNÖE tycktes vara af den åsigten, att hafsvattnet ej är fullt mättadt med kolsyra. Jag fruktade, att mina prof möjligen hade tagit upp någon kolsyra ur gunrumsluften före insmältningen. Jag beslöt derföre att pröfva, om hafsvattnet verkligen hade någon förmåga att upptaga mera kolsyra, än det i naturen egde, samt tillvägagick dervid på följande sätt.

Experiment 1. Det hafsvatten, som enligt bestämningarna N:o 23 och 24 skulle hafva kolsyrehalten 49,7 c.c. per liter, behandlades i en kolf med en konstant ström af vanlig rums-

luft under 20 timmar. Temperaturen var vid genomledningens slut $18^{\circ},5$. Vattnet befans hålla

47,2 c.c. CO_2 .

Experimentet upprepades, samma vatten behandlades på ett liknande sätt under 18 timmar. Temperaturen var vid slutet $16^{\circ},7$. Vattnet befans hålla

48,3 c.c. CO_2 .

Det såg sålunda ut, som om hafsvattnet icke skulle kunna taga upp mera kolsyra, än det en gång hade upptagit. Dessutom visade bestämningarna genom sin ringa öfverensstämmelse, att hafsvattnets kolsyrehalt måste vara ganska variabel. Männe icke temperaturvexlingar eller vexlingar i atomferens kolsyrehalt skulle kunna hafva något inflytande?

Experiment 2. Samma hafsvatten, som förut användts, behandlades under 3 timmar vid en temperatur nära 0° med en ström af rumsluft, som tvättades genom svafvelsurt vatten, rent vatten och bomull. Temperaturen var vid genomledningens slut $+0^{\circ},5$. Vattnet visade sig hafva en kolsyrehalt af

51,1 c.c.

Samma vatten behandlades 3 timmar längre på samma sätt. Temp. var $+0^{\circ},1$. Kolsyrehalten visade sig vara

52,5 c.c.

Vid en jämförelse med experiment 1 ansåg jag mig kunna sluta till, att *ett och samma hafsvatten håller vid lägre temperaturer större mängder bunden kolsyra än vid högre.*

Experiment 3. Ett annat prof af samma vatten behandlades först med ren kolsyra under 1 timme vid ungefär 0° , sedan med rumsluft; efter några timmars förlopp visade sig vattnet vara af kolsyrehalten

51,6 c.c.

Vattnet hölls fortfarande vid sin låga temperatur, men i stället för kolsyrehaltig luft inleddes sådan, som var befriad från kolsyra. Genomledningen varade $2\frac{1}{2}$ timme. Vid experimentets slut var temp. $+0^{\circ},7$. Kolsyrehalten befans vara

44,9 c.c. (enligt första bestämningen)

44,6 » » andra »

Af detta försök följer, att *hafsvattnets halt af bunden kolsyra är lägre vid en lägre tension af kolsyran i atmosfären än vid en högre.*

Kolsyrehalten är alltså i hög grad beroende såväl af temperaturen som af den atmosfäriska kolsyrans partialtryck. När

jag var sysselsatt med dessa experiment, kände jag ännu ej de SCHLOESINGSKA ideerna ¹⁾ kanske mest för deras fullkomligt meteorologiska karakter. Nu må experimentet 3 vara ett praktiskt bevis på riktigheten af SCHLOESINGS åsigt.

De försök, som ofvan omtalats, kunna naturligen ej hafva något kvantitativt värde, emedan luften i ett rum, der flera menniskor vistas, dels med afseende på sin kolsyrehalt är mycket variabel, dels mycket kolsyrerikare än den i det fria, öfver hafvets yta förekommande atmosfären. Jag beslöt därför att upprepa absorptionsförsöken med ren luft, som hemtades från en fri och öppen plats.

Till att börja med ämnade jag då vid hvarje absorption undersöka kolsyrehalten i den luft, som inleddes, men denna plan blef snart öfvergifven, emedan jag med till buds stående medel ej mäktade åstadkomma så noggranna kolsyrebestämningar, att ej de analytiska felen betydligt öfverstego de antagliga variationerna. Jag öfvertygades emellertid genom dessa iakttagelser, att den luft, som användes, var af en tillräckligt låg kolsyrehalt ²⁾ för att kunna kallas *ren atmosfärisk luft*. Såsom SCHULZE, REIZET ³⁾, MÜNTZ & AUBIN ³⁾ hafva visat, äro variationerna i atmosfärens kolsyrehalt ganska obetydliga, och jag trodde dem vara tillräckligt små för att i detta fall kunna lemnas utan afseende.

Hvad nu beträffar sjelfva absorptionerna, så gjordes de samtidigt med och på samma sätt som de i föregående kapitel omtalade bestämningarne på qväfgasens absorptionskoefficienter (se sid. 17). Det torde därför vara onödigt att här upprepa det använda förfaringssättet ⁴⁾.

Såsom nyss är nämnt, trodde jag, att de små variationerna i luftens kolsyrehalt skulle vara utan betydelse för kolsyran i hafsvattnet. Jag beslöt därför att endast egna temperaturens inflytande någon uppmärksamhet och erhöill dervid de resultat, som återfinnas i nedanstående tabell.

¹⁾ Se sid. 33.

²⁾ De funna värdena lågo omkring 0,027 vol. proc.

³⁾ Ann. Chim. Phys. Ser. 5. Tom. 26. 1882.

⁴⁾ Till den nämnda beskrifningen fordras kanske följande tillägg:

När samma vatten användes såväl till qväfgas som kolsyrebestämning tillsattes efter absorptionens slut, men före urkokningen 0,2 c.c. svafvelsyra af en lösning, som höll omkring 7 procent H_2SO_4 . Lösningens temperatur iakttogs, och deraf beräknades en lämplig korrektion för den absorberade qväfvemängden.

N:o	Absorptions- veraktighet i timmar.	Procent salt.	Temp.	Cub.-cent. kolsyra per liter.	Gram kolsyra per liter.	Medeltal.	Differens.
1	10 $\frac{1}{2}$	3,482	0°	47,44	0,09330	0,09340	0,00295
2	14 $\frac{1}{2}$	"	"	47,54	0,09350		
3	5 $\frac{1}{2}$	"	+ 10°	46,12	0,09070	0,09045	0,00470
4	5	"	"	45,86	0,09019		
5	3 $\frac{1}{4}$	"	+ 20°	43,64	0,08583	0,08575	0,00533
6	4	"	"	43,56	0,08567		
7	15 $\frac{1}{2}$	3,513	0°	49,11	0,09658	0,09681	0,00414
8	5	"	"	49,34	0,09704		
9	4 $\frac{1}{2}$	"	+ 10°	47,12	0,09267	0,09267	0,00533
10	6 $\frac{1}{2}$	"	+ 20°	44,49	0,08734	0,08734	

Ofvanstående tabell torde visa, att temperaturen har ett betydligt inflytande på kolsyrehalten. *En differens af 10° i temperaturen motsvarar en differens i kolsyrehalten af 3 till 6 proc. Temperaturens inflytande är större vid högre temperaturer än vid lägre.*

När nu den i hafsvattnet bundna kolsyran är så variabel, måste man ställa på hvarje bestämning af kolsyran i hafsvattnet den ovilkorliga fordran, att den göres under samma försigtighetsmått som luftbestämningarna. Att undersöka kolsyrehalten i hemförda vattenprof — de må vara förvarade i insmälta glaströr eller flaskor med aldrig så väl inslipade proppar — är ungefär lika lönlöst som att bestämma lufthalten deri. Derföre äro alla TORNÖES i öfrigt noggranna bestämningar så väl som mina i tabellen på sid. 37 i hydrografiskt hänseende af intet värde. Att jag i allmänhet funnit de högsta kolsyrehalterna i hafsvatten af en låg temperatur in situ, är endast en händelse. När dessa vattenprof togos, befann sig expeditionen i ett kallt klimat, och den temperatur, vid hvilken vattnena förvarades före insmältningen torde hafva varit af stor betydelse för den sedermera funna kolsyrehalten.

Att man emellertid af framtida undersökningar på detta område har att vänta sig något mera än ett resultatlöst analyserande torde ej vara för djerft att antaga. Polarvattnena skola visa sig vara rikare på kolsyra än de tropiska hafvens vatten — och detta bör kanske ej vara utan inverkan på den atmosfäriska luftens kolsyra. De varma ytströmmar, som flyta

i riktning mot polerna måste under sin färd till kallare trakter absorbera allt mer och mer kolsyra ur luften. Om man tager i betraktande de stora skilnader, som enligt ofvanstående tabell, tyckes förekomma i hafsvattnets förmåga att vid olika temperaturer binda olika mängder kolsyra, så skall man möjligen finna en förklaringsgrund till den jämförelsevis låga halt af kolsyra i atmosfären, som den franska expeditionen till Kap Horn 1882—1883 ¹⁾ observerade i närheten af det södra Ishafvet. Ännu intressantare synes mig den af samma expedition gjorda iakttagelsen, att luftens kolsyrehalt var mindre om natten än om dagen, mindre vid lägre temperaturer än vid högre. För att förklara detta fenomen hänvisa de båda tolkarne af de gjorda observationerna till det närbelägna hafvets verkningar. Riktigheten af denna uppfattning torde knappast vara tvifvel underkastad.

Såväl TORNÖE som DITTMAR upprepa vid flera tillfällen, att hafsvattnet ej innehåller någon fri kolsyra²⁾, emedan det karbonat, som deri förekommer, ej är något fullständigt bikarbonat. Denna åsigt har länge förefallit mig högst tvifvelaktig. Mina absorptionsförsök visade mig, att hafsvattnets kolsyrehalt är beroende af bland annat kolsyrans tension i luften, samt, att om denna tension är låg såsom i vanlig luft, hafsvattnet aldrig förmår binda så mycket kolsyra, som motsvarar ett fullständigt bikarbonat. Men i förhållande till den rådande tensionen måste det anses fullkomligt mättadt. I så fall hvarföre skulle hafsvattnet sakna förmåga att fysiskt absorbera kolsyra, när det kan absorbera syre och qväfve? Vid ett försök med surgjordt hafsvatten visade det sig, att detta absorberar ur normal atmosfärisk luft ungefär 0,44 c.c. CO₂ per liter vid 0°. Men när surgjordt hafsvatten har denna förmåga, hvarföre skulle då icke vanligt hafsvatten hafva den?

Att direkt bestämma den fria kolsyran i hafsvattnet torde stöta på stora svårigheter, men detta bör ej vara någon afgörande anledning till att antaga dess frånvaro.

För att komma denna, såsom det syntes mig, intressanta fråga närmare in på lifvet samt för att gifva en med kemiens

¹⁾ Compt. Rend. 98, 8, 1884. Determination de l'acide carbonique de l'air effectuée par la mission du cap Horn; par A. MÜNTZ et A. AUBIN.

²⁾ SCHLOESING tyckes deremot vara af motsatt åsigt.

nuvarande ståndpunkt öfverensstämmande förklaring på kolsyrans förekomstsätt i hafsvattnet, har jag gjort de iakttagelser, som här nedan omtalas och diskuteras.

Det föreföll mig, att om hafsvattnet ingen fri kolsyra innehölle, så skulle ett vatten, som utspäddes till sin halfva salt-halt och mättades med luft af vanlig kolsyrehalt, vid samma temperaturer och samma tryck hålla precis hälften af det utspädda vattnets kolsyrehalt. Höll det deremot mera, borde detta vara ett tecken till den fria kolsyrans närvaro.

För att dessa utspädningar skulle kunna gifva mig något afgörande vittnesbörd måste jag naturligen använda destilleradt vatten, absolut fritt från hvarje alkali eller syra, eller om endera vore närvarande, måste dess mängd vara känd. Det visade sig snart, att det var fördelaktigast och säkrast att framställa ett destilleradt vatten, som var svagt alkaliskt, och genom särskilda absorptionsförsök pröfva, huru mycket kolsyra detta vid mättning med atmosferisk luft förmådde binda. Det af mig begagnade destillerade vattnet, som säkerligen var temligen ammoniakfritt, innehöll 1,48 c.c. bunden kolsyra på en liter.

Med användning af detta destillerade vatten samt ett hafsvatten af salthaten 3,513 framstälde jag nu två nya vatten, hvilka vid klorbestämning visade sig vara af salthalterna 2,6580 och 1,7784. Dessa salthalter förhålla sig till hvarandra ungefär såsom 4:3:2.

De absorptionsförsök med vanlig luft, som gjordes på dessa vatten, utfördes helt och hållet i öfverensstämmelse med de förut på sid. 17 och 40 omtalade. Det bör kanske tilläggas, att behörig korrektion iakttogs för det destillerade vattnets halt af bunden kolsyra.

Alkaliniteten är icke bestämd för hvarje vatten. Den är beräknad och har antagits hafva ett konstant förhållande till klorhalten.

Resultaten voro nedanstående.

dukter, som de yttre omständigheterna medgifva. Till att börja med gå dessa reaktioner i en viss riktning, men efter en tid uppstår ett tillstånd af jemnvigt mellan alla de inom reaktionssferen förekommande enkla eller sammansatta ämnena. Med detta jemnvigtstillstånd menas, att vid molekylernas svängningar i hvarje tidsmoment bildas och upplösas lika många molekyler af hvart slag, och antalet af hvarje slags molekyler är beroende icke endast på deras egen mängd, utan äfven på alla de öfriga slagens mängd. Detta vill med andra ord säga: Om två ämnen A och B kunna gifva anledning till uppkomsten af två andra ämnen A¹ och B¹, och om A och B sättas i tillfälle att verka på hvarandra, så uppstår inom reaktionssferen en blandning af A, A¹, B¹ och B. I jemnvigtstillståndet är mängden af molekyler A beroende af alla de öfriga molekylernas mängder, och dessa kunna ej ökas eller minskas, utan att A ökas eller minskas. Hvad som gäller om A, gäller om alla de öfriga molekylerna.

Om nu teorien om de kemiska massverkningarna tillämpas på kolsyran och alkaliniteten i hafsvattnet, måste man antaga, att deri uppträda vid sidan af hvarandra följande föreningar:

fritt alkali	vatten	neutralt alkali- karbonat	surt alkali- karbonat	fri, löst kolsyra.
-----------------	--------	---------------------------------	-----------------------------	-----------------------

För så vidt det fria alkalit och den fria kolsyran äro att betrakta såsom hydrat, måste H₂O vara lika vigtig som de öfriga inom reaktionssferen förekommande slagen af molekyler. För enkelhetens skull tages likväl här nedan det bildade eller dissocierade vattnet ej i betraktande.

Hafsvattnet innehåller en blandning af baser och syror. Om man bortser från kolsyran, är basernas mängd öfvervägande, och det är hufvudsakligen detta öfverskott¹⁾ [= baser — (syror — kolsyra) eller, såsom det i tabellerna kallas, alkalinitet], som binder kolsyran i hafsvattnet.

Hafsvattnets alkalinitet och luftens kolsyra äro grundorsaker till hafsvattnets kolsyrehalt. Om ett fullkomligt kolsyrefritt hafsvatten sättes i beröring med kolsyrehaltig luft, så försiggår följande reaktion:

¹⁾ Detta öfverskott har för enkelhetens skull antagits vara konstant, d. v. s. kolsyrans aviditet relativt till de öfriga syrorna förutsättes = 0.

Luftens kolsyra ger i första hand anledning till i hafsvattnet fysiskt absorberad kolsyra. En del af denna bindes omedelbart derpå af hafsvattnets fria alkali till karbonat och bikarbonat. Minskningen i den fria kolsyran ersättes i nästa ögonblick af ny ur atmosfären fysiskt absorberad kolsyra, hvilken bildar sig en ny mängd karbonat och bikarbonat. Så fortgår reaktionen steg för steg, det fria alkalit blir med aftagande hastighet allt mindre, karbonaten och den fria kolsyran allt större. Till sist inträder ett jemvigtstillstånd, i hvilket

1) den fysiskt absorberade kolsyran fullkomligt motsvarar vattnets temperatur och kolsyrans partialtryck i atmosfären;

2) förhållandet mellan hafsvattnets fria alkali och den fysiskt absorberade kolsyran är sådant, att inga vidare molekyler karbonat och bikarbonat kunna uppkomma.

De i tab. på sid. 44 upptagna bestämningarna, som grunda sig på absorptionsförsök med tillräcklig varaktighet för att kunna visa förhållandena i jemvigtstillståndet, vill jag i det följande (se tabellen på nästa sida) uppställa i öfverensstämmelse med denna uppfattning.

Hvad nu siffrorna i de olika kolumnerna beträffar, så är:

α = den temperatur, vid hvilken vattnet mättades med atmosfärisk luft af vanlig kolsyrehalt.

β = den sign., under hvilken vattnet upptages i tab. på sid. 44.

γ = vattnets klorhalt, experimentelt bestämd;

δ = en mot (det fria alkalit och mot) de baser, som binda kolsyran, equivalent mängd neutralbunden kolsyra.

ι = den totalmängd kolsyra, som vattnet vid temperaturen α och kolsyretenionen κ förmår upptaga. ι är experimentelt bestämd.

κ = den vid absorptionerna använda luftens kolsyrehalt, hvilken har antagits vara oföränderlig.

ϑ = den mängd fri kolsyra, som hafsvatten förmår fysiskt absorbera, om temperaturen är α , klorhalten γ och luftens kolsyrehalt κ . Emedan hafssaltets inverkan på vattens fysiska absorption af kolsyra icke är känd, har jag tillnärmelsevis beräknat kvantiteterna ϑ med tillhjälp af BUNSENS undersökningar öfver rent vattens och SETSCHENOWS¹⁾ öfver saltlösningars förmåga att absorbera kolsyra²⁾.

¹⁾ Mem. Akad. Sc. St. Petersburg. Ser. VII. Tom. XXII, N:o 6.

²⁾ Med afseende på tillförlitligheten af dessa beräkningar är jag pligtig att nämna följande: 1) Salthalten har jag antagit uteslutande be-

$$\begin{aligned} g \text{ har antagits} &= 2\delta - (\iota - \vartheta) \\ \eta \text{ » »} &= 2\delta - 2g \text{ eller} \\ &\iota - (\vartheta + g). \end{aligned}$$

Det fria alkalit (ε) torde vara en mycket obetydlig kvantitet. Det har därför vid beräkningarna lemnats å sido. Dess variationer måste gå i samma riktning som det neutrala karbonatets.

Temp. α	Sign. β	Gram klor per liter. γ	Gram kol- syra per liter. δ	Alkalinitet, nup- skattad i gram neutralbunden kolsyra per liter. ϑ	Gram kolsyra, bunden uti neu- tralt karbonat. η	Gram kolsyra, bunden uti svagt karbonat. ι	Gram fri kol- syra per liter. φ	Totalmängden kolsyra i gram per liter. ψ	Luftens kolsyre- halt i vol. proc. z
0°	c	9,972	0,02646	0,00264	0,04764	0,00082	0,05110	0,027	
»	b	15,007	0,03982	0,00687	0,06590	0,00078	0,07355	»	
»	a	19,965	0,05297	0,00988	0,08618	0,00075	0,09681	»	
+ 10°	c	9,972	0,02646	0,00448	0,04396	0,00057	0,04901	»	
»	b	15,007	0,03982	0,00879	0,06206	0,00054	0,07139	»	
»	a	19,965	0,05297	0,01379	0,07839	0,00052	0,09267	»	
+ 20°	c	9,972	0,02646	0,00572	0,04148	0,00045	0,04765	»	
»	b	15,007	0,03982	0,01079	0,05806	0,00043	0,06928	»	
»	a	19,965	0,05297	0,01901	0,06792	0,00041	0,08734	»	

Redan på sid. 44 är uttalad den satsen, att *hafsvattnets halt af kemiskt bunden kolsyra relativt till alkaliniteten väver med utspädningen..* Detta förhållande torde kunna lätt förklaras, om man tager ofvanstående tabell till hjälp.

Om t. ex. temperaturen är 0°, samt kolsyrans partialtryck i luften är 0,027 vol. proc., så är i vattnet a

$$\vartheta = 0,00075$$

$$\eta = 0,08618$$

$$g = 0,00988$$

$$\iota = 0,09681.$$

stå af klornatrium. 2) Den mängd kolsyra, som SETSCHENOW funnit, att klornatriumlösningar absorbera, har jag antagit vara uteslutande fri fysiskt absorberad kolsyra. 3) Variationerna i salthaltens inverkan på kolsyreabsorptionen hafva antagits regelbundet tillväxa med aftagande temperatur, hvilket antagande möjliggjort en sannolik beräkning, trots det att SETSCHENOWS observationer ej sträcka sig till lägre temperatur än +15,2.

Det är här af klart, att värdena på ϑ ingalunda kunna göra anspråk på att kallas noggranna eller ens riktiga, men äfven ett fel af ett par procent torde för ändamålet vara af ringa betydelse.

Om man utspäder 500 c.c. af detta hafsvatten med absolut rent vatten (*fritt från hvarje absorberad gas*) till 1000 c.c., så har detta nya vatten (c) i utspädningsögonblicket

$$\vartheta = \frac{1}{2} \cdot 0,00075 = 0,00038$$

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot 0,08618 = 0,04309$$

$$\varsigma = \frac{1}{2} \cdot 0,00988 = 0,00494$$

$$\iota = \frac{1}{2} \cdot 0,09681 = 0,04841.$$

Förhållandet mellan de olika inom reaktionssfären uppträdande molekylerna bör i förstone vara ungefär sådant som i det ursprungliga vattnet. Men om kommunikationen med luften är fri, och om temperaturen och trycket är konstant, så sträfvär detta utspädda vatten redan från första ögonblicket att följa den fysiska absorptionens lagar. Liksom det söker att ungefär fördubbla sin fysiskt absorberade qväfgas- och syrgasmängd, så vill det äfven göra med sin fria fysiskt absorberade kolsyremängd. $\vartheta = \frac{1}{2} \cdot 0,00075$ öfvergår så småningom i $\vartheta = 0,00082$. Men denna höjning i den fria kolsyrans massa relativt till alkaliniteten förändrar den ursprungliga jemmrigten och tvingar ett visst antal molekyler enkelt karbonat att öfvergå i bikarbonat för att jemmrigt åter må inträda. I det slutliga jemmrigtstillståndet är (enligt observation på vattnet c)

$$\vartheta = 0,00038 + 0,00044 = 0,00082$$

$$\eta = 0,04309 + 0,00455 = 0,04764$$

$$\varsigma = \frac{0,00494 - 0,00228}{1} = 0,00266$$

$$\iota = \frac{0,04841}{1} = 0,05112.$$

Totalmängden kolsyra, som i utspädningsögonblicket var $\iota = 0,04841$, har på detta sätt stigit till $\iota = 0,05112$.

Man torde kunna uttala verkningarna af utspädningen i följande allmänna sats:

Om förhållandet mellan den fria kolsyran och alkalinitetet ($\vartheta : \delta$) växer, så växer förhållandet mellan molekyler surt karbonat och molekyler neutralt karbonat ($\eta : \varsigma$); af dessa båda orsaker följer, att äfven den relativa totalmängden kolsyra ($\iota : \delta$) växer.

Denna regel är den hufvudsakliga förklaringsgrunden till alla vexlingar i hafsvattnets kolsyrehalt.

Såsom bekant har SCHLOESING uttalat den åsigten, att hafsvattnets kolsyrehalt är beroende af kolsyrans partialtryck i atmosfären, och denna sats har af mig blifvit praktiskt bevisad (se sid. 39).

Partialtryckets inverkan förklaras på samma sätt som utspädningens inverkan:

Den fria kolsyrans mängd i hafsvattnet är en funktion af temperaturen och kolsyrans partialtryck i den öfver vätskeytan stående gasblandningen, och om temperaturen är konstant, varierar den proportionellt mot detta tryck. Om δ icke förändras, men x ökas, så ökas dermed i första rummet ϑ . Men om förhållandet $\vartheta : \delta$ växer, så växer förhållandet $\eta : \varsigma$; deraf följer, att äfven förhållandet $\iota : \delta$ växer.

Det har på sid. 41 visats, att hafsvattnets kolsyrehalt minskas, om temperaturen höjes. Detta förhållande beror sannolikt på följande orsaker:

1). Affiniteten mellan hafsvattnets alkali och den lösta kolsyran försvagas något med stigande temperatur.

2) Den fria, fysiskt absorberade kolsyran följer absorptionslagarna. Dess mängd aftager, om temperaturen stiger. Men om förhållandet $\vartheta : \delta$ minskas, så minskas förhållandet $\eta : \varsigma$; deraf följer, att äfven förhållandet $\iota : \delta$ minskas.

Af dessa två orsaker är den fria kolsyrans variation med temperaturen troligen den mest inflytelserika.

En omständighet, som här blifvit lemnad utan afseende, är utspädningens dissociérande inverkan. Enligt ARRHENIUS¹⁾ skulle denna för föreningar mellan starka baser och svaga syror vara högst betydlig, men karbonaten måtte derifrån göra något undantag. Derpå tyder den omständigheten, att endast en procent af hafsvattnets totala kolsyrehalt, som blott uppgår till 0,01 procent af vattnets vikt, uppträder såsom fri kolsyra. Kanske beror detta derpå, att kolsyran i jemförelse med andra syror ej har någon benägenhet att bilda hydrat.

Denna vattnets ringa dissociationsförmåga gör dock, att ofvan omtalade och tillämpade lag ej kan gälla, om såväl utspädning som tryck och temperatur samtidigt variera. Om t.

¹⁾ Bih. till K. Vet. Akad. Handl. Bd 8. N:o 14. s. 30.

ex. ett hafsvatten utspädes, medan trycket i ungefär lika hög grad minskas, eller med andra ord om ϑ och δ minskas, men $\vartheta : \delta$ är konstant, så skulle (enligt lagen) förhållandet $\iota : \delta$ äfven vara konstant. Men i sjelfva verket torde väl förhållandet $\iota : \delta$ komma att minskas.

Ehuru lagen således ej kan sägas vara fullkomligt allmän-giltig, så torde den likväl kunna gifva en temligen sannings-enlig föreställning om, *huru* reaktionen i allmänhet försiggår vid dessa variationer i hafsvattnets kolsyrehalt.

4. En apparat för bestämning af kväfgasen och kolsyran i hafsvattnet.

Den apparat, som här beskrifves skiljer sig från äldre metoder med samma ändamål i två väsentliga afseenden:

1) Apparaten är användbar för så väl kväfgas som kolsyrebestämningar;

2) urkokningen och analysen af den urkokade gasen försiggå omedelbart efter hvarandra inom samma apparat.

Emedan urkokningen af de i hafsvattnet absorberade gaserna måste ske strax efter vattnenas upphemtning ur hafvet, är denna apparat afsedd att utan väsentliga förändringar kunna användas ombord i svag sjögång. Derföre är särskild vikt fäst vid, att en noggrann uppmätning af den urkokade gasvolymen ej behöfver förutsätta en vertikal eller fullt konstant ställning af eudiometerröret.

Apparaten, som hopsattes här i Stockholm af glasmaterial från Geissler i Bonn, finnes schematiskt framstuld på taflan 3. Stativ, anordningen af det hela m. m. torde åskådliggöras af ljustrycket på taflan 4.

Såsom taflan 3 visar, består apparaten af tvänne icke sammanhängande hufvuddelar: den ena af dessa är afsedd för vattnets kokning, den andra för gasens mätning och analysen af den samma; mellan dessa båda hufvuddelar är under hvarje urkokning en lufttätt förbindelse etablerad.

Till den första af dessa delar hörer urkokningsballongen *B*, hvars nedre ända står i förbindelse med den tjockväggiga slangen *S*₁ och qvicksilfverreservoaren *R*₁. Den öfre ändan

bär kranen 3 och tratten T_r samt är delvis innesluten i vattenbadet V , genom hvilket en ström friskt vatten kan ledas. För öfrigt är B nästan helt och hållet nedsänkt i en glasbägare U , som är fylld med vatten. U å sin sida befinner sig uti ett vattenångbad, hvars nedre del P är af koppar, och hvars öfre del G är af glas. För att qvarhålla så mycket vattenånga som möjligt inom vattenångbadet äro kanterna af G försedda med tjocka, utefter hela sin längd uppklipta kautschukslangar. Vattenbadstaket D är af koppar. Den kant af D , som ligger närmast B , är klädd med kork, som sluter tätt intill B . D består af två likformiga och lika stora delar, hvilka sammanhållas af sprintarne i . Om dessa borttagas, kan D öppnas och aflägsnas från B .

B rymmer omkring 40 c.c.

Den delen af apparaten, som är afsedd för uppmätning och analys af den urkokade gasen, består af manometern $M_1 + M_2$, hvilken å ena sidan står i förbindelse med kransystemet 4, 5 och 6 samt klockan K , å den andra med slangen S_2 och qvicksilfverreservoaren R_2 . M_1 och M_2 äro tvänne parallela, i hvarje horisontalplan utefter graderingens hela längd lika, i millimeter graderade glasrör. De båda rören ligga så nära hvarandra som möjligt. M_1 är i sin öfre del utblåst till en liten kula O , som rymmer något mindre än den minsta gasquantitet man kan anse sig komma att mäta. För att apparaten skall lämpa sig både för kolsyre- och luftbestämningar, är den nedre delen af de båda rören mycket vidare än den öfre. De första 41 centimeterna rymma omkring 0,017 c.c. per centimeter, de sista 16 deremot omkring 0,075 c.c. M_1 är noga kalibrerad ända ifrån märket m vid kranen 5 till slutet på graderingen.

Af taflan 4 torde framgå, att manometern och röret med kranarna 4, 5 och 6 äro väl fastskrufvade vid stativet. R_2 kan höjas och sänkas efter behag och likaledes R_1 . Urkokningsballongen B med kranarna 1, 2 och 3 kan icke blott flyttas i horisontal- och vertikalplanet, utan äfven lätt löstagas, om kautschukslangen vid g drages af röret l .

En absolut lufttätt förbindelse mellan manometern och urkokningsballongen åstadkommes genom att på spetsen af h påträda en liten bit kautschukslang, hvars kanter få råda öfver glasets, fylla T_r med qvicksilfver, höja och fastskrufva B , så

att botten af *Tr* hårdt pressas mot den kautschukklädda ändan af *h*.

En liknande »skarv» finnes äfven vid *f* mellan *M*₁ och kranröret. Den spelar der ingen annan roll, än att den gör mätröret mindre svårt att tillverka och mindre riskabelt att handhafva, om apparaten söndertages.

En analys af gaserna i ett hafsvatten tillgår på följande sätt:

Apparatens iordningställning och hafsvattnets ifyllning och afmätning. Alla de delar af apparaten, som skola komma i beröring med hafsvattnet eller den urkokade gasen böra vara noga sköljda med destilleradt vatten. Huru denna sköljning tillgår, är lätt att inse. Man betjenar sig af den sug- eller tryckkraft, som kan åstadkommas genom qvicksilfverreservoarerna *R*₁:s och *R*₂:s sänkning eller höjning. *B* sköljes lämpligast genom att införa rent vatten genom kranarna 1 och 2 samt åter uttappa det genom klämmaren 9. En ström af vatten kan åstadkommas i *B*, om *Tr* oupphörligen fylles, samt om kr. 1 och kl. 8 äro stängda, men kr. 2 och 3 samt kl. 9 äro öppna. Det är naturligen af vigt, att så litet sköljvatten som möjligt qvarstannar i apparaten.

Det hafsvatten, som skall undersökas, kan antingen uppmätas i en pipett sådan, som fig. 2 på taflan 2 framställer, och hvars användning förut blifvit beskrifven (se sid. 26), eller också kan det direkt från vattenhemtaren öfverföras i urkokningskärlet *B*.

I det senare fallet, hvilket får anses såsom det säkraste, löstages *B* från apparaten, slangen vid *g* drages af röret *l* och i dettas ställe inskjutes en bit glasstaf. I *B* införes så mycket qvicksilfver, att *B* det förutom rymmer omkring 30 c.c. Ändan *a* fästes med en kautschukslang vid vattenhemtarens urtåpningskran, *B*¹⁾ hålles i en sned ställning för att minska qvicksilfrets mottryck, alla kranarne öppnas, och *B* fylles med vatten. Under förvaring vid en temperatur, som är högre än vattnets naturliga värmegrad, bör *B* hållas i vertikal ställning;

¹⁾ *B* bör, så länge den är på däck, vara väl skyddad t. ex. infäld och fastsatt i en träklots.

kranen 3 bör vara stängd, men de två öfriga böra vara öppna. Det vatten, som B innehåller, mätes efter kokningen. Det tappas ut genom kr. 2 och kl. 9.

Om hafsvattnets naturliga temperatur ej alltför mycket understiger den värmegrad, vid hvilken man arbetar, så behöfver man ej besvära sig med löstagningen af ballongen B . Hafsvattnet kan då förvaras på en sådan pipett som är beskrifven på sid. 26 och aftecknad på taflan 2.

När vattnet skall undersökas, fästes slangen k_1 (se taflan 2 fig. 2) på röret a (se tafl. 3). Klämmarne vid k_1 och k_2 (tafl. 2) borttagas, och den del af hafsvattnet, som rymmes i pipetten ofvanför m_2 och nedanför m_1 , uttappas genom kr. 1 och kl. 9, det, som rymmes mellan m_1 och m_2 ($= 30$ c.c.), införes i B genom kr. 1 och 2. Det vatten, som stannar i röret $a-g-l$, uttappas genom kl. 9 samt ersättes med qvicksilfver, hvarefter så mycket qvicksilfver införes i B , att vattnet stiger upp genom kr. 3 ungefär till d i botten af Tr .

Om man har för afsigt att urkoka såväl qväfve och syre som kolsyra, så håller man i Tr en afmätt mängd svafvelsyra¹⁾, som nedföres i B ; derpå fylles Tr till hälften med qvicksilfver; och man låter något deraf passera kranen 3, så att qvicksilfrets nedre yta står ungefär vid n . Det vatten, som skall undersökas, befinner sig nu instängt i B mellan en öfre och en undre qvicksilfveryta.

Hela ballongen B höjes derpå, så att botten af Tr hårdt pressas mot den kautschukklädda spetsen af h . Eudiometern M_1 , klockan K med kranröret samt den lilla bägaren H böra då först vara fyllda med qvicksilfver. Huru detta tillgår torde knappast behöfva beskrifvas.

Derefter pröfvar man, om »skarfvén» vid d och kranarna äro täta, genom att sänka R_2 så långt, att ett tomrum bildar sig i den öfre delen af eudiometerröret M_1 . Om den visar sig icke vara tät, är det sannolikt något fel med kranmörjan i kranarne eller med slangbiten på h , hvilket i så fall måste afhjelpas.

Vattenbadstaket D sättes fast på B , och vattenångebadet $P + G$ med vattenbadet U skjutes upp under D . Apparaten

¹⁾ Jag brukade till 30 c.c. vanligt hafsvatten använda 0,2 cc. af en lösning, som höll omkring 7 proc. H_2SO_4 . Om qväfvemängden äfven skall bestämmas, observeras lösningens temperatur och deraf beräknas en lämplig korrektion för dess halt af absorberadt qväfve.

är nu färdig för börjande utkokning och har ungefär det utseende, som taflan 4 visar.

Urkokningen. Innan man börjar urkokningen, måste man tillse, att kr. 3 eller kr. 4 samt kr. 1 och kl. 9 äro stängda, men kr. 2 och kl. 8 öppna. Vattnet i P upphettas till kokning, ångan uppvärmer vattnet i U ¹⁾ och dermed äfven qvicksilfret och vattnet i B . Derefter sänkes R_1 så långt ned, att vattnet i B börjar koka. När vattnets öfra yta sjunkit ungefär till p , stänges kr. 2. R_2 sänkes derpå. Kr. 6 och 7 hålles stängda, men 3, 4 och 5 öppna, så att den urkokade luften öfverföres från den öfre delen af B till mättröret M_1 . Emedan det i allmänhet ej är möjligt att erhålla all (luften och) kolsyran urkokad på en gång såsom en samlad gasmassa, utan i flere för hvarje gång allt mindre partier, så begagnar man klockan K till reservoar för den samlade mängden af gas; d. v. s.: hvarje större eller mindre urkokad gasmängd föres först från B in i mättröret M_1 , derifrån in i K .

Man måste alltid se till, att ej någon onödig och skadlig vattenmängd nedkommer i K och M_1 , hvilkas glas- och qvick-

1) Detta vattenbad U har ej användts förr än vid de allra sista urkokningarna. Anledningen, hvarför jag ansåg det fördelaktigt var följande:

Långvarig beröring med vattenånga tyckes hafva ett menligt inflytande på glas. Det visade sig också snart vara en stor svårighet att till ballongen B erhålla en glassort, som något så när motstod vattenångans inverkan. Det glas, som först användes, uthärdade ej mera än 4 urkokningar; derefter började små sprickor uppkomma på glaset, hvilka allt mer och mer växte. Då erhöi jag genom Professor PETERSSONS försorg glasmateriel från GEISSLER i Bonn till en ny urkokningsballong. Denna höll under omkring 60 urkokningar. När äfven den började spricka sönder, löstogs sjelfva ballongen B från glaskranarna och egnades någon om än ganska ytlig undersökning.

Jag hade förut iakttagit, att vid en temperatur af omkring 200° å 300° (efter gissning!) sådana glasytor, som angripits af vattenånga, blifva matta, skrofliga och fullsatta med krökta genomlysande fjäll eller borst. Dessa bestå sannolikt af en kiselsyrerikare substans än den egentliga glasmassan.

Vid en dylik upphettning af ballongens yta visade det sig, att de delar, som varit utsatta för vattenånga, voro högst betydligt omvandlade, de, som hade befunnit sig i kontakt med hett vatten, voro jemförelsevis obetydligt angripna, och de, som endast hade stått i beröring med hett qvicksilfver, voro icke alls förändrade.

Det var med anledning häraf, som jag beslöt att så mycket som möjligt skydda ballongen för vattenångans direkta inverkan genom att hålla den omgifven med ett särskildt vattenbad U . Huruvida detta har åsyftad verkan, kan ännu ej uppgifvas. Om glaset förändring beror på det heta vattnets förmåga att lösa olika beståndsdelar af glaset i olika mängder, bör naturligen vattnet i U ombytas mycket sällan eller förut vid hög temperatur vara mättadt med glasse substans.

silfverväggar endast böra vara fuktiga. Hvarje urkokad gasblåsa i kranröret $n-d$ måste befinna sig omedelbart under qvicksilfret från R_2 , och när man öfverför blåsan åt M_1 till, så bör man ej låta vattnet från B komma längre än till e .

Det torde vara nästan omöjligt att tillfyllest beskrifva manövreringen med gasblåsor och vattendroppar; den kan knappast inhemtas annat än genom erfarenhet. En hjälp vid kokningen erhåller man, om man, när så är lämpligt, leder kallt vatten genom vattenbadet V . Gasbildningen blir derigenom raskare, gasblåsorna mindre, mot slutet af kokningen så små, att de kunna obehindradt uppstiga i kranröret ofvanför n , om qvicksilfret från R_2 icke föres längre ned än till kr. 3. Man måste alltid se till, att de sist urkokade gasportionerna hafva sin samlingsplats i det fina röret under kr. 3 och ej i den öfre delen af B , på det de må vara i kontakt med en så liten vätskeyta som möjligt.

Luftens utkokning plägar kräfva omkring 15—30 minuter; kolsyrans deremot 1 à 2 timmar.

Uppmätning och analys af den urkokade gasen. Om den gas, som skall mätas, befinner sig i K , för man öfver den i M_1 . Qvicksilfret (eller absorptionsvätskan) från K stannas på streeket m vid kranen 5; om K innehåller någon absorptionsvätska, så måste man noga tillse, att denna ej öfverskrider kr. 5. Kr. 7 öppnas; genom att i lämplig mån höja eller sänka R_2 inställer man qvicksilfverytan i M_2 i jemnhöjd med motsvarande yta i M_1 , så att gasen mätes under precis samma tryck, som en i närheten hängande barometer angifver. Temperaturen i det vattenbad (se tafl. 4), som omgifver M_1 och M_2 , observeras.

Alla absorptioner företagas i klockan K . Absorptionsvätskan införes antingen under K med en krökt pipett eller genom h och kranarna 4 och 6, sedan förbindelsen mellan B och h blifvit afbruten genom B :s sänkning.

Kolsyran absorberas med stark kalilut, syrgasen med pyrogallussyradt kali. Vid användning af detta sista absorptionsmedel erhåller man qväfvemängden omkring 0,2 procent för hög och syremängden omkring 0,4 procent för låg ¹⁾. Detta fel torde, hvad qväfvemängden beträffar, kunna lemnas utan afseende.

¹⁾ Jemför sid. 18.

Det nämndes i början af detta kapitel, att den apparat, som här beskrifvits, var afsedd att utan väsendtliga förändringar kunna användas ombord i svag sjögång.

Först och främst vill jag då nämna att enligt min åsigt glasapparater ingalunda äro fullkomligt odugliga och ohjelp-ligen förlorade, så snart de komma om skeppsbord. Med någon vana handterar man glaskranar o. dyl. med samma säkerhet som på fasta landet. Det har jag till fullo erfarit vid titreringarna¹⁾ och qväfvebestämningarne (med apparaten på tafl. 2). Men ett oafvisligt vilkor är, att apparaten i sin helhet är stadigt fastskruvad och väl skyddad mot alla lösa föremål, som kunna skada den samma.

För att kunna mäta en afstängd gasvolym måste man såsom bekant hafva kännedom om det tryck, för hvilket den är utsatt. Att mäta detta tryck synes mig vara den största svårigheten vid gasanalyser ombord. Trycket mätes ju vanligen med en qvicksilfverpelare. Ju längre denna är, desto mera oscillerar den, när fartyget rullar och stampar. Konsten är således att kunna begagna sig af en så kort pelare som möjligt. Såsom förut är sagdt (se sid. 27), har jag sökt använda en kort qvicksilfvertråd såsom tryckmätare. Men den metoden har sina stora nackdelar. Tråden är svår att med säkerhet manövrera och vill gerna gå af. Den oscillerar visserligen ganska obetydligt, när fartyget rullar, men den är för mycket lättrörlig och slungas upp och ned, om fartyget stampar, och man ej har sin arbetsplats midskepps.

Det förefaller mig, som om den uppmätning af trycket jag i den nya apparaten (tafl. 3 och 4) användt skulle vara lyckligare vald.

Om qvicksilfvernivån i M_1 befinner sig i jemnhöjd med qvicksilfvernivån i M_2 , och klämmaren 10 är stängd, samt om rören M_1 och M_2 befinna sig så nära hvarandra som möjligt, så måste oscillationerna vid olika lutning af arbetsbordet vara mycket obetydliga. Om jag nu dessutom placerar apparaten så, att genomsnittsytan af rören M_1 och M_2 är parallel med fartygets köl, så torde de oscillationer, som rullningen skulle förorsaka, fullständigt elimineras.

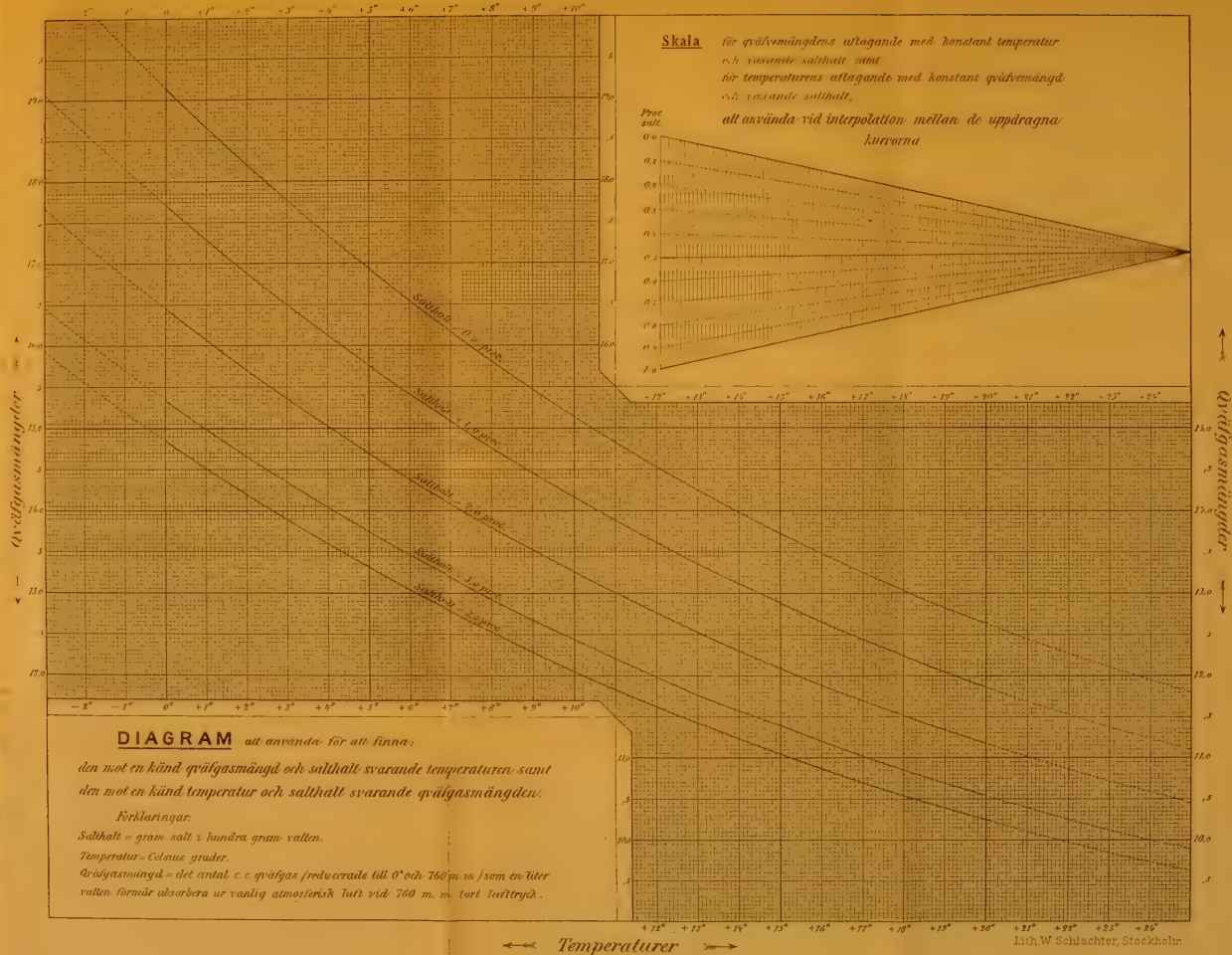
¹⁾ Bih. t. K. Sv. Vet.-Akad. Handl. Bd 9. N:o 16, s. 7.

En god föreställning om den här beskrifna metodens noggrannhet kan erhållas af de observationer, som omtalas på sid. 19, 37, 41 och 44. Enligt dessa bör medelfelet för qväfgas och kolsyrebestämningarna knappast behöfva öfverstiga $\pm 0,2$ procent af den bestämda kvantiteten. Vid arbete ombord måste naturligen felet antagas vara något större, men i alla händelser torde denna apparat med afseende på qväfgasen och kolsyran kunna gifva säkrare upplysningar än förut använda metoder. Hvad åter syrgasen beträffar, torde förhållandet vara omvänt.

BUNSEN ¹⁾ har visat, att syrgashaltigt vatten, som står i kontakt med qvicksilfver, städse förorsakar uppkomsten af något qvicksilfveroxidul. Dennas mängd är visserligen alltid liten, men dock tillräcklig för att minska vattnets syrehalt med flera procent. Emedan i den här beskrifna apparaten det vatten, som undersökes, städse är i beröring med qvicksilfver, kan den samma med afseende på syrgasmängden ej gifva något tillförlitligt resultat. Det finnes visserligen ett sätt, hvarigenom beröringsytan mellan vattnet och qvicksilfret inskränkes till en obetydlighet; men jag vill ej här närmare beskrifva det, emedan jag ej pröfvat, om det har åsyftad verkan.

Med afseende på förhållandet mellan de i hafsvattnet absorberade qväfve- och syremängderna torde för öfrigt JACOBSENS metod kunna gifva ganska tillförlitliga upplysningar. För detta ändamål är naturligen den utkokade gasens absoluta kvantitet af ringa betydelse.

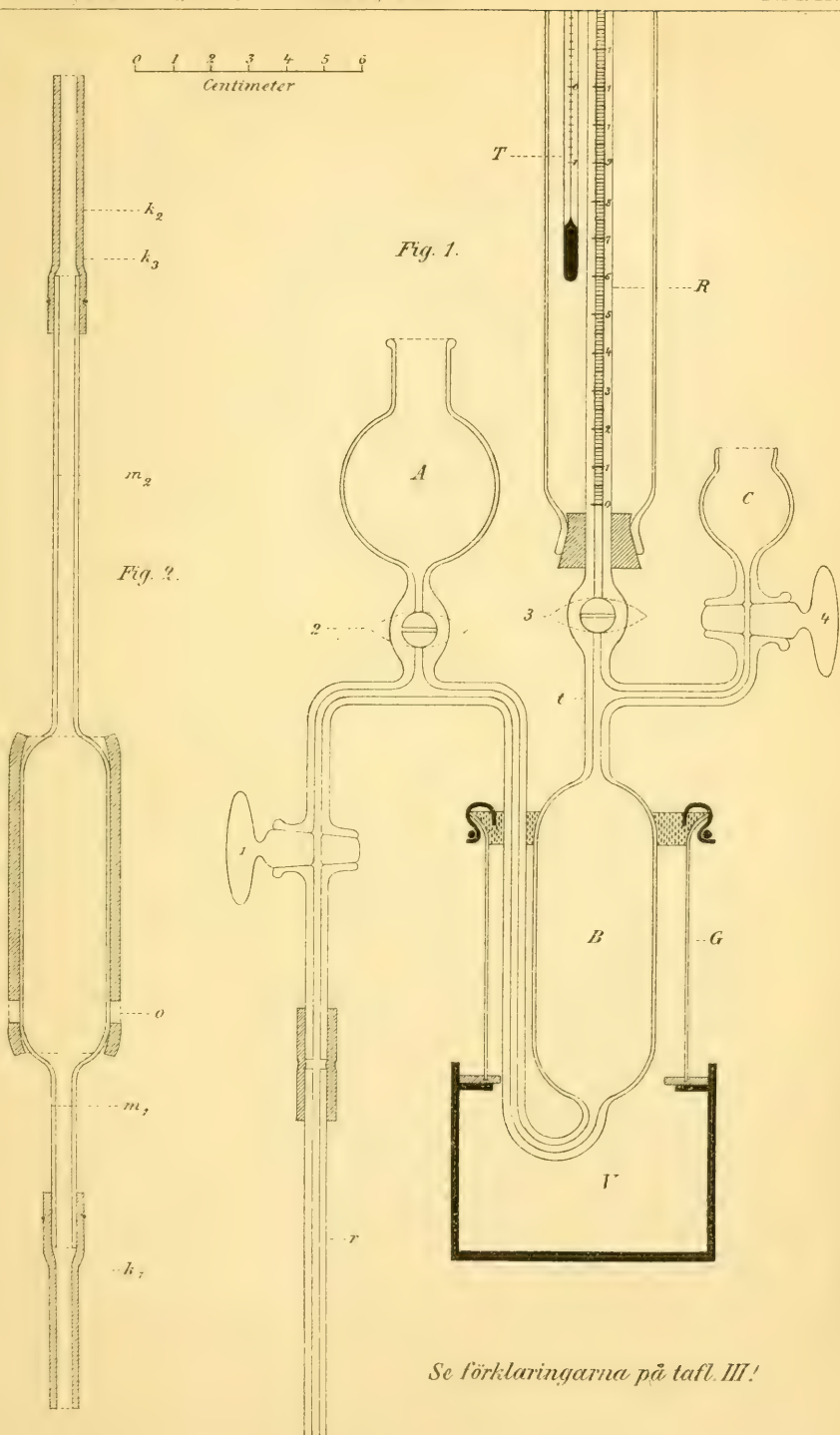
¹⁾ Gasometrische Methoden. Braunschweig 1877, s. 221.



0 1 2 3 4 5 6
Centimeter

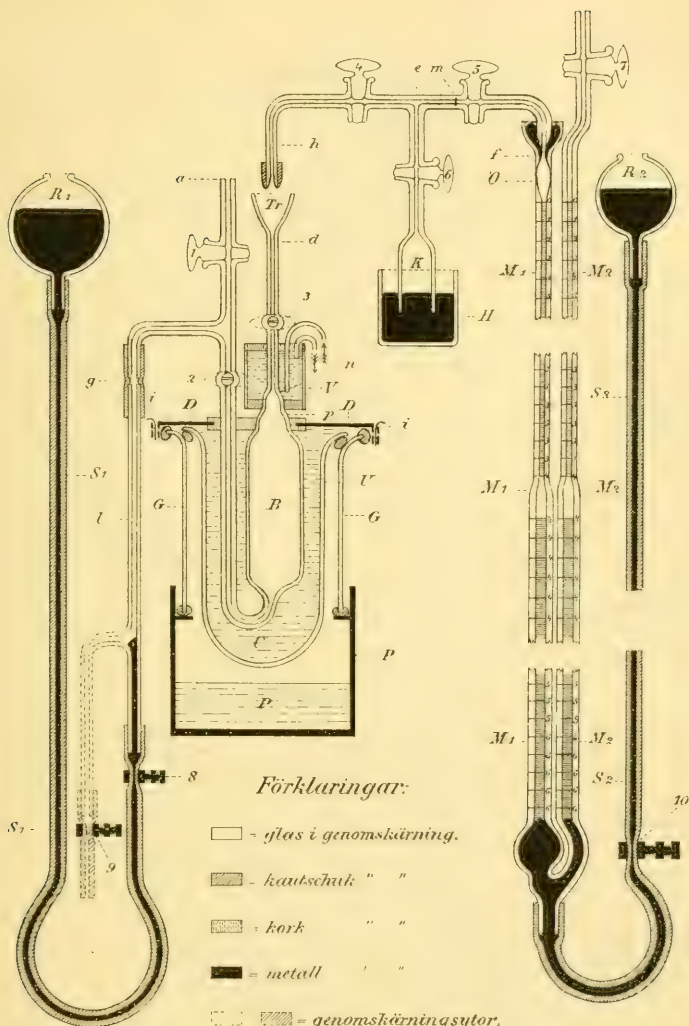
Fig. 1.

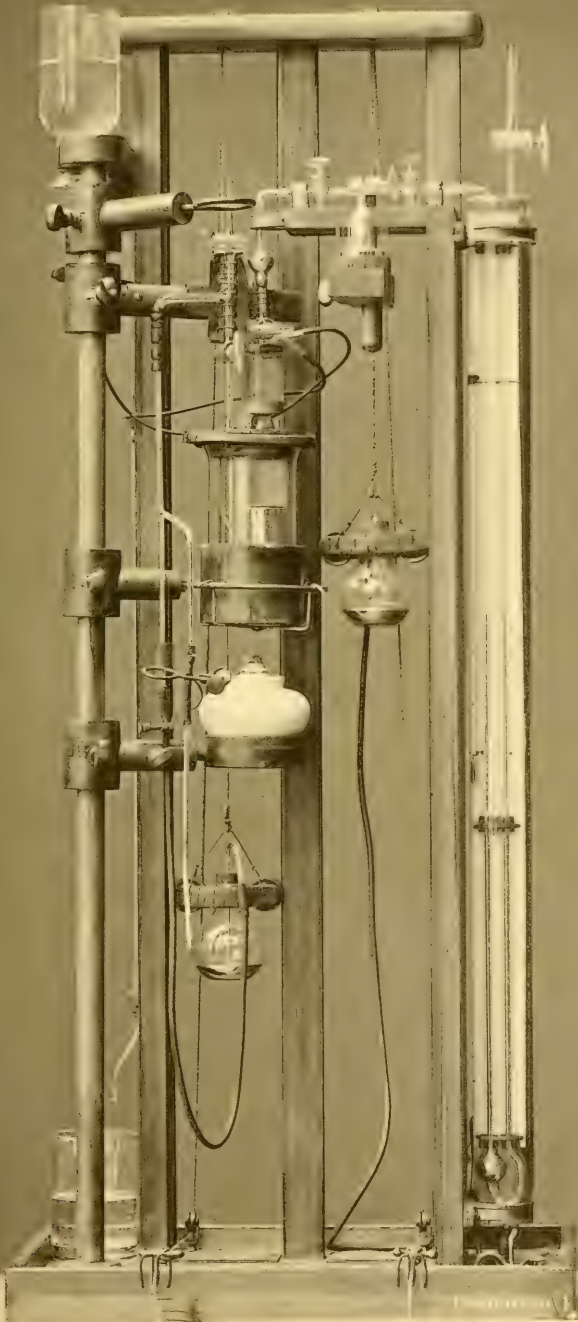
Fig. 2.



Se förklaringarna på tafl. III!

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Centimeter





ON
SOME FORGOTTEN GENERA
AMONG
THE AMPHIPODOUS CRUSTACEA

BY
CARL BOVALLIUS.

—
WITH ONE PLATE.
—

COMMUNICATED TO THE ROY. SWEDISH ACADEMY OF SCIENCE
FEBRUARY 1885.

—
STOCKHOLM, 1885.
KONGL. BOKTRYCKERIET.
P. A. NORSTEDT & SÖNER.

In the course of my study of the strange group of Amphipoda Hyperidea I have met in the literature, with some generic names, which by different carcinological authors have been referred to different genera, owing either to the short and imperfect original descriptions or to the extreme rarity of the animal once described. I shall try in this paper to clear up the synonymy of some few of these names, leaving a more exhaustive treatment of the very interesting subject to the larger monographical essay on the Hyperidæ, which I am now preparing for publication.

Lanceola. SAY.

In the year 1818 the excellent American zoologist THOMAS SAY¹⁾ proposed the name *Lanceola* for a big amphipodous crustacean, captured in the Gulfstream by Captain HAMILTON. It was only with some hesitation that he constructed a new genus for it, as he knew only one sex of the animal, the two specimens he got being both females. But the description he gave was a very good one for that time, and I do not think I say too much, when I proclaim it as the first accurate description ever given of any animal belonging to the Amphipoda Hyperidea. Nevertheless following authors failed to recognize the animal, and the genus has been regarded as synonymous with the much later founded genera *Hyperia* (1823) or *Vibilia* (1830). H. MILNE-EDWARDS in 1830²⁾ considered *Lanceola* synonymous with *Hyperia*, LATREILLE, and although he admitted the priority of SAY's name, he maintained that

¹⁾ »An account of the Crustacea of the United States», in »Journal of the Academy of Natural Sciences at Philadelphia». Vol. 1, part. 2. Philadelphia 1818. Pag. 347.

²⁾ »Extrait des recherches pour servir à l'Histoire naturelle des Crustacés amphipodes», in »Annales des Sciences naturelles». Tome 20. Paris 1830. Pag. 387.

proposed by Latreille as being generally known among the carcinologists. This was a very fortunate mistake by MILNE-EDWARDS, as the *Lanceola*, SAY, has nothing at all to do with the *Hyperia* LATR., and he would have created an inextricable confusion in the synonymy, if he had put the former in the place of the latter. But the animal described by SAY seems to be very rare; because, as far as I know the literature concerning the Hyperids, it has never since been described or mentioned in its true characters. MILNE-EDWARDS still held the same opinion about the identity of *Lanceola* in 1840 ¹⁾, and ranged it among the doubtful species of *Hyperia* as *Hyperia pelagica*, SAY.

About twenty years later C. SPENCE BATE ²⁾, in his Catalogue of Amphipoda, classified it as synonymous with *Vibilia*, MILNE-EDWARDS. He declared the description of SAY to be very obscure, which is natural enough, because, as will be seen from the description below, SAY's type must be allowed to be widely different from a *Vibilia*. Since the publication of the above named work all following authors have agreed with SPENCE BATE in interpreting *Lanceola pelagica* as a *Vibilia*.

Examining a large number of *Vibilidæ* from all parts of the world, it soon became clear to me that I must try to find the original *Lanceola* among other Hyperidæ. I made it out at last, identifying it with a large Hyperid, previously marked as a new genus in my manuscript, and I don't think I was wrong in doing so. The following parallel arrangement of SAY's and my descriptions will show the reasons for my supposition. The description of SAY is given in his own words, only the order is a little changed to render it more systematic. Of course the generic description of SAY contains many purely specific characters, as he knew only one species. On that account I also admit into my description characters of less than generic value, only for the sake of comparison.

<i>Lanceola</i> SAY ♀.	<i>Lanceola</i> ♀.
<i>Head</i> very short, transversal.	<i>Head</i> very short, transversally
<i>Front</i> concave, clypeus projecting into an acute angle.	truncated. <i>Front</i> concave, the middle of it projecting into an acute angle or rostrum.

¹⁾ »Histoire naturelle des Crustacés». Tome 3. Paris 1840. Pag. 77.

²⁾ »Catalogue of the specimens of Amphipodous Crustacea in the collection of the British Museum». London 1862. Pag. 299 and 304.

Eyes longitudinal, placed opposite the base of the superior antennæ.

Eyes small, longitudinal, placed opposite the base of the superior or inferior antennæ.

[Here is a slight difference, but it may be considered only a difference between species, and this the more as among my new species I have two totally blind ones].

The *superior antennæ* are shorter than the inferior, abbreviated, compressed, triarticulate; the basal joints short, robust, concealed by the clypeus; terminal joints not articulated, linear, compressed, obtuse.

The *superior antennæ* are shorter than the inferior, compressed; the peduncle triarticulate; the basal joints robust, the first concealed by the front, the second and third very short. The flagellum consists of a compressed obtuse large basal joint and 3—4 very minute terminal ones.

[The want of coincidence with respect to the number of the joints of the superior antennæ between SAY's description and mine is not difficult to explain, if we remember that MILNE-EDWARDS, DANA, SPENCE BATE and others made the same mistake in interpreting a very similar organ: the superior antenna of *Vibilia*. This was stated by all of them to be triarticulate, consisting of a two-articulated peduncle and a large compressed lanceolate flagellum, whereas in fact the case is here the same as in *Lanceola*: the short peduncle is three-jointed and the large basal joint of the flagellum carries at the end 2—4 very minute articles, smaller in the adult animal than in the young one. The small terminal articles in *Lanceola* require in order to be seen a higher magnifying power than was probably used by SAY, and the last of the peduncular joints is very often concealed by the preceding one. Such being the case, I think the characters of the upper antennæ are no obstacles to the identity].

Inferior antennæ very long, four-jointed, compressed; basal joints very short, third and fourth longer, equal, the latter entire.

Inferior antennæ very long, four-jointed, compressed; basal joints very short, third and fourth longer, equal.

Mouth protuberant.

Mouth protuberant.

Labrum emarginate, supporting two filiform triarticulate processes, of which the first joint is very short, second linear, third shorter, subulate.

Mandibles strong, without molar tubercle, with filiform triarticulate palp, of which the first joint is very short, the second the longest, linear, the third shorter, subulate.

Pedipalpi bifid, lacinia linear, inner edge hirsute, tips rounded.

Maxillipeds consisting of a strong peduncle and two broad linear laminae, inner edges hirsute, tips rounded.

Thorax oval, convex above and beneath, seven-jointed, sutures imbricate.

Feet fourteen, simple, two anterior pairs compressed, terminal joints conic compressed.

Remaining pairs somewhat cylindrical, armed with a minute subterminal nail.

Sixth pair the longest.

Vesicular branchiæ oblong, distinct, placed at the inner base of the feet, except the first and the seventh pairs.

Abdomen abruptly much narrower than the thorax.

Tail depressed three-jointed; joints furnished each with a lateral style, which consists of a foliaceous, linear peduncle supporting two acute, lanceolate, subequal laminae.

Terminal segment attenuate between the posterior styles.

On account of the evident coincidence of the both descriptions related above, I claim the name *Lanceola*, SAY, as the right and true generic name for the animal, that is the type of my description, and I beg to add here preliminary diagnoses of some new species of this genus. More detailed descriptions, accompanied with figures, will be very soon published in the above-named monographical work on Amphipoda Hyperidea.

Pereion, seen from above, oval, convex above and beneath, seven-jointed, sutures often imbricate.

Pereiopoda seven pairs, none cheliform. The two first pairs compressed, dactyli broad conic compressed.

Third to seventh pairs more or less cylindrical, each leg armed with a strong, often denticulated, retractile claw, concealed in a deep cavity at the end of the metacarpus; when stretched out it looks like a subterminal claw. (Fig. 1, a and 1, b).

Sixth pair the longest (except in *L. Clausii*, n. sp.).

Branchial vesicles oblong, distinct, placed at the inner base of the feet, except the first and the seventh pairs.

Pleon abruptly narrower than the pereion.

Urus depressed two-jointed, the second and third joints being fused together; with three pairs of uropoda, each consisting of a linear peduncle, supporting two acute, lanceolate, subequal rami.

Telson attenuate between the last pair of uropoda.

1. *Lanceola Lovéni*, n. sp.

The sixth pair of pereiopoda are much longer than the others, except the fifth pair, which are only a little shorter than the sixth. The pleon and urus together are longer than half the pereion with the head. The upper antennæ do not reach to

half of the third article of the lower antennæ. The segments of the pereion are smooth, the second is the longest. Rostrum very short, obtuse. The telson is shorter than half the peduncle of the last pair of uropoda.

Hab. The North Atlantic.

2. *Lanceola Sayana*, n. sp.

(Fig. 1, 1 a and 1 b).

The sixth pair of pereiopoda are much longer than the others. The pleon and urus together are longer than half the pereion with the head. The upper antennæ do not reach to half of the third article of the lower antennæ. The segments of the pereion are imbricated, the third is the longest. Rostrum curved, acute. The telson is longer than the peduncle of the last pair of uropoda.

Hab. The Atlantic.

3. *Lanceola felina*, n. sp.

The sixth pair of pereiopoda are much longer than the others. The pleon and urus together are longer than half the pereion with the head. The upper antennæ reach nearly to the end of the third article of the lower antennæ. The segments of the pereion are smooth, the second is the longest. The rostrum is curved, acute. The telson is longer than half the peduncle of the last pair of uropoda.

Hab. Tristan d'Acunha, The South Atlantic.

3. *Lanceola serrata*, n. sp.

The sixth pair of pereiopoda are longer than the others. The pleon and urus together are shorter than half the pereion with the head. The upper antennæ reach a little farther than half of the third article of the lower antennæ. The segments of the pereion are smooth, the fourth is the longest. The dorsal side of the pleonal segments forms a serrated keel. The rostrum is short, obtuse. The telson is a little shorter than the peduncle of the last pair of the uropoda.

Hab. The Atlantic.

4. *Lanceola curticeps*, n. sp.

The sixth pair of pereiopoda are much longer than the others. The pleon and urus together are shorter than half the pereion with the head. The upper antennæ reach beyond the end of the third article of the lower antennæ. The segments of the pereion are smooth, the third is longest. The rostrum is very short but acute. The telson is equal to half the peduncle of the last pair of uropoda.

Hab. Cape Verde Islands.

5. *Lanceola Clausii*, n. sp.

The sixth pair of pereiopoda are a little *shorter* than the third. The pleon and urus together are shorter than half the pereion with the head. The upper antennæ reach farther than half of the fourth article of the lower antennæ. The third and fourth segments of the pereion are swollen each; into a roll at the anterior margin the second, fifth, and sixth segments carry such rolls but smaller. The third segment is the longest. The rostrum is wanting. The telson is shorter than the peduncle of the last pair of uropoda.

Hab. Davis Strait.

Daira. H. MILNE-EDWARDS.

The Hyperidean amphipoda were scientifically made out for the first time in the year 1830, when H. MILNE-EDWARDS published his treatise on the system of the Amphipoda ¹⁾. Among the new genera then established by him was also *Daira*, one of the most intricate genera with regard to its identification, that I have met with during my studies of the Crustacea. Indeed, the results of my researches on the genus, here to be set forth, are rather to be looked upon in the light of conjectures, submitted to the judgment of experienced carcinologists, than as the outcome of my own established conviction. In the year 1840 MILNE-EDWARDS repeated his

¹⁾ »Extrait des recherches pour servir à l'histoire naturelle des Crustacés amphipodes», in »Ann. Sc. nat». Tome 20. Paris 1830. Pag. 392.

generic description¹⁾ in somewhat different terms, giving at the same time a diagnosis of the species, *Daira Gabertii*, from the Indian Seas. In the literature we do not meet again with the name *Daira*, M.-E., before 1853, in the great work of DANA²⁾. But I am quite sure that DANA was wrong in introducing the animals described by him into the genus *Daira* of MILNE-EDWARDS, and a comparison between the descriptions of MILNE-EDWARDS and of DANA will easily show how little the *Daira* of the latter has to do with that of the former. At the same time I will give a parallel description of *Paraphronima*, CLAUS, which genus comes in my opinion nearest to, if it not is identical with, the *Daira* of MILNE-EDWARDS. In any case the name *Daira* must be rejected, as it was already used at an earlier period for a genus of crabs. It was in fact rejected by DANA, who substituted *Dairinia*, but as DANA's types belong to a widely different family of Hyperids (Lycæidæ, CLAUS)³⁾, this name cannot be adopted instead of *Daira*. If *Paraphronima* cannot be considered identical with it, which is a little doubtful, a new name must be proposed for the type of *Daira Gabertii*. After the parallel descriptions of the genera I give short diagnoses of some new species of *Paraphronima* and for the sake of comparison also of the two species of CLAUS.

<i>Daira</i> . H. MILNE-EDWARDS.	<i>Dairinia</i> . DANA.	<i>Paraphronima</i> . CLAUS.
Head large tumid.	Head oblong subtriangular small.	Head large tumid.
The antennæ very short, subulate, inserted as in Hyperia.	The antennæ inserted in lower side of the head, short, five to seven-jointed.	The upper antennæ short, the flagellum swollen, tapering towards the end, inserted on the anterior side of the head, as in Hyperia.
The thorax not tumid, but decreasing backwards, the seventh segment being much the narrowest.	The thorax highest at middle, not very decreasing backwards, the seventh segment being nearly as high as the preceding.	The pereion not tumid, but decreasing backwards, the seventh segment being much the narrowest.

¹⁾ »Hist. nat. des Crustacés». Tome 3. Paris 1840. Pag. 83.

²⁾ »United States Exploring Exped. Crustacea». Part. 2. Philadelphia 1853. Pag. 981, 991 and 1442.

³⁾ *Dairinia*, Dana, is, in my opinion, synonymous to *Thamyris*, SPENCE BATE.

The two first pairs of thoracic legs very small, slender, compressed.

The last joints of the second pair forming a didactyle hand; the moveable finger consists of the two last joints, and is longer than the fixed one.

The third and fourth pairs of thoracic legs are the longest.

The peduncles of the swimming feet are longer and more slender than in *Hyperia*; the rami are almost linear.

The rami of the appendices of the tail are lanceolate, long and sharp.

The two first pairs of thoracic legs small but robust, not compressed.

The last joints of the second pair forming a chela, not a didactyle hand, the moveable finger consists of the two last joints.

The third and fourth pairs of thoracic legs are shorter than the fifth pair.

The peduncles of the pleopoda are short and thick, the rami are broad robust elliptical.

The rami of the uropoda are broad ovate or elliptical, commonly not very long, sharp.

The two first pairs of pereopoda small, slender, compressed.

The last joints of the second pair forming a didactyle hand, the moveable finger consists only of the last joint, and is longer than the fixed one.

The third and fourth pairs of pereopoda are the longest, or as long as the fifth pair.

The peduncles of the pleopoda are longer and more slender than in *Hyperia*, the rami are almost linear.

The rami of the uropoda are commonly lanceolate, long, and sharp.

1. *Paraphronima gracilis*, CLAUS.

Head deeper than long (26:23), nearly equalling the four following segments in length (23:24). The upper antennæ about a third of the length of the head. The fourth pereionial segment is longer than the first and second together (5:8). The seventh is longer than the fourth (11:10). The first and second pairs of pereopoda¹⁾ are equal in length, the carpus of the first is very broad with the infero-anterior angle very sharp. The third and fourth pairs equal, shorter than the fifth and sixth, which are equal. The seventh pair are shorter than the sixth (11:16). The first pleonal segment is the longest; it is longer than the seventh pereionial segment, its sides are saddle-shaped. The pleon equals the four preceding pereionial segments in length. The peduncles of the pleopoda are more than twice longer than the rami. The first pair of uropoda are shorter than the second and third.

Hab. The Atlantic.

¹⁾ »Gnathopoda» SPENCE BATE.

2. *Paraphronima crassipes*, CLAUS.

The head is almost as long as deep, equalling the three following pereional segments in length. The upper antennæ of the female are longer than half the head, in the male only a little shorter than the head. The fourth pereional segment is shorter than the first and second together (5:6). The seventh is longer than the fourth (15:13). The first and second pairs of pereiopoda are equal. The carpus of the first is narrow, the tibia projects into a process; the second ends with a slender dactylus and two spines, which are a little shorter. The third and fourth pairs are equal, only a little longer than the fifth and sixth (11:10). The seventh pair are as long as the sixth. The first pleonal segment is a little longer than the seventh pereional one. The sides are rounded. The pleon is as long as the four preceding pereional segments. The peduncles of the pleopoda are only a little longer than the rami. The first pair of uropoda are shorter than the second and third.

Hab. The Atlantic. The Mediterranean.

3. *Paraphronima clypeata*, n. sp.

(Fig. 2).

The head as long as deep, equalling the four following segments in length. The pleon is as long as the four preceding pereional segments. The first pair of pereiopoda shorter than the second, without carpal process. The end of the metacarpus of the second pair is spoon-shaped, with the dactylus forming a chela. The third and fourth pairs, equal, are the longest of all; the seventh pair is shorter than the sixth. The peduncles of the two last pairs of uropoda are very broad; those of the first pair are much narrower, with the outer ramus very short and narrow.

Hab. The Atlantic.

4. *Paraphronima californica*, n. sp.

The head a little deeper than long, equalling in length the three following segments; the second pereional segment is longer than the first. The pleon is shorter than the four last pereional segments. The first pair of pereiopoda are only

a little shorter than the second, of *the same form*. The metacarpus of the second pair ends with two long spines on the sides of the dactylus, without any spoon-shaped process. Both pairs are only a little shorter than the third pair. The fourth pair are a little longer than the third, subequal to the fifth. The sixth pair are a little shorter, equal to the seventh. The peduncles of the first and third pairs of uropoda are very broad, those of the second pair narrow, all the rami subequal, distant from one another.

Hab. The Pacific.

5. *Paraphronima Edwardsii*, n. sp.

The head is deeper than long, longer than the three following segments. The first pereionial segment is longer than the second; the fourth is longer than the first and second together, the seventh is longer than the fourth. The pleon is as long as the three preceding pereionial segments. The first pair of pereiopoda are much shorter than the second, the carpus longer than broad, the infero-anterior corner truncated, the metacarpus stout, longer than the carpus. The metacarpus of the second pair of pereiopoda ends in a short imperfectly spoon-shaped process. The third and fourth pairs are nearly twice as long as the second, a little shorter than the fifth and sixth. The seventh pair are a little longer than half the sixth. The first pleonal segment is longer than the seventh pereionial segment. The peduncles of the pleopoda are shorter than the rami. The peduncles of the first pair of pleopoda are nearly twice as long as those of the third pair. The first pair of uropoda are as long as the second.

Hab. The Atlantic.

Tyro. H. MILNE-EDWARDS.

In his excellent Natural history of the Crustacea ¹⁾ MILNE-EDWARDS proposes the generic name *Tyro* for a small Hyperid, already mentioned by him ten years earlier ²⁾, though without

¹⁾ l. c. pag. 80.

²⁾ »Extr. des. rech pour servir à l'Hist. nat. des Crust. amphip.» Pag. 387.

description. He then regarded it as belonging to the genus *Hyperia*, *H. cornigera*. The only characters mentioned by him on this first occasion were: »the upper antennæ about as long as the body, and the fifth or sixth pair of legs the longest». When in 1840 he institutes a new genus for the animal in question, he gives a very good diagnosis, generic as well as specific, but none of the later authors has been able to recognise it, and Tyro has had the same fate as *Lanceola*, being thrown from one place to another in the system. DANA ¹⁾ placed it next to *Lestrigonus*, MILNE-EDWARDS, totally overlooking the statement of MILNE-EDWARDS as to its difference from the true *Hyperia* »tête tronquée antérieurement». But that was not his only fault, for in the same volume ²⁾ he gives an accurate description of some animals, certainly belonging to the genus Tyro, under the new generic name *Clydonia* ³⁾. This new genus he placed in the family Corophidæ as the type of a subfamily of its own, Clydoninæ, and established two species, *C. longipes* from the Pacific and *C. gracilis* from the Atlantic. C. SPENCE BATE followed him and classified Tyro among the Hyperidæ and *Clydonia* among the Corophidæ ⁴⁾.

To make the identity of the two genera more apparent, I here relate the principal points of the original descriptions arranged side by side:

<i>Tyro</i> . H. MILNE-EDWARDS.	<i>Clydonia</i> . DANA.
The head truncated anteriorly.	The head is short about half as long as wide.
Body <i>Hyperia</i> -like.	Body elongate, somewhat depressed.
The upper antennæ are straight, long, longer than the body, two-jointed, the basal joint short, the terminal long, stout, tapering.	The antennæ are straight, rigid, long, about as long as the body, two-jointed, basal joint short, the terminal long, rigid, subulate (extremity obsoletely multiarticulate).
None of the legs prehensile; they are unequal in length, ...	Feet slender, the four anterior shortest, and have no proper hands; the six posterior are long, filiform.
.	the fifth pair are the longest.
the fifth pair are much longer than the others.	

¹⁾ »United States Expl. Exp., Crustacea». Vol. 2. 1853. Pag. 980 and 1482.

²⁾ l. c. pag. 834.

³⁾ Previously published in the year 1850 in »Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences». Vol. 2. Pag. 219.

⁴⁾ »Catal. of the spec. of Amph. Crust. in the Coll. of the Brit. Museum». Pag. 284 and 308.

The femur of the fifth pair is denticulated at the posterior margin, its lower anterior corner projects into a strong tooth.

Caudal stylets slender not, presenting two rami at the ends.

The femur of the fifth pair is long, spinulous at the posterior margin, its lower anterior corner produced into a spine.

From the fifth to the seventh pair they decrease in length very rapidly; the seventh being short.

Caudal stylets slender, only the last pair with a narrow short ramus, articulating at its middle.

From the above it is clear, that the name *Clydonia*, DANA, must be rejected, and the elder name *Tyro*, MILNE-EDWARDS, restored. Preliminary descriptions of some new species follow here.

1. *Tyro Clausii*, n. sp.

The head is thrice as deep as long. The upper antennæ, feebly curved downwards, reach to the anterior margin of the seventh pereopodal segment. The epimerals distinct. The fifth pair of pereopoda are *shorter* than the sixth, the femur is as long as the three following joints. The seventh pair are longer than half the fifth. The first pair of uropoda are short, not reaching to the end of the second, far from reaching to the end of the third, strongly denticulated at the interior margin. The exterior ramus of the last pair of uropoda is longer than half of the coalesced interior one. The hinder corners of the pleonal segments are feebly rounded.

Hab. The Atlantic.

2. *Tyro atlantica*, n. sp.

The head twice as deep as long. The upper antennæ, feebly bent upwards, reach to the anterior margin of the second pleonal segment. The epimerals are distinct. The fifth pair of pereopoda are longer than the sixth, the femur shorter than the three following joints. The seventh pair are only a little longer than a third of the fifth pair. The first pair of uropoda are long, reaching beyond the end of the second, very nearly to the end of the third, feebly serrated at the interior margin. The exterior ramus of the last pair of uropoda is shorter than a third of the coalesced interior one. The hinder corners of the pleonal segments are angularly rounded.

Hab. The Atlantic.

3. **Tyro marginata**, n. sp.

The head is nearly as long as deep. The upper antennæ are straight and reach to the anterior margin of the third pleonal segment. The epimerals distinct, the upper line forming a prominent margo; the fifth pair of pereiopoda are longer than the sixth, the femur longer than the three following joints; the seventh pair are much shorter than half the fifth. The first pair of uropoda are long, reaching beyond the end of the second to the end of the third, finely serrated at the interior margin. The exterior ramus of the last pair of uropoda is longer than half of the coalesced interior one. The hinder corners of the two first pleonal segments are rounded, those of the last truncated.

Hab. The Atlantic.

4. **Tyro Sarsii**, n. sp.

(Fig. 3 and 3 a).

The head is not fully twice as deep as long. The upper antennæ straight, reaching beyond the anterior margin of the second pleonal segment. The epimerals are distinct. The fifth pair of pereiopoda are longer than the sixth, the femur as long as the three following joints. The seventh pair are nearly as long as half the fifth. The first pair of uropoda are long, reaching beyond the end of the second, but not to the end of the third, feebly serrated at the interior margin. The exterior ramus of the last pair of uropoda is scarcely half as long as the coalesced interior one. The hinder corners of the two first pleonal segments are rectangular, those of the last truncated.

Hab. The Atlantic.

5. **Tyro Tullbergii**, n. sp.

The head is twice as deep as long. The upper antennæ straight, robust, short, not reaching to the hinder margin of the third *pereional* segment. The epimerals are distinct. The fifth pair of pereiopoda are longer than the sixth, the femur is shorter than the three following joints. The seventh pair are shorter than the femur of the fifth. The first pair of uropoda reach beyond the second and nearly to the end of the

third; the exterior ramus equals nearly a third of the coalesced interior one. The exterior ramus of the last pair of uropoda longer than half of the coalesced interior one. The first and third pairs are smooth, the second serrated at the inner margin. The hinder corners of the pleonal segments are feebly rounded.

Hab. The Atlantic.

Tauria. DANA.

The genus *Tauria*, founded 1853¹⁾ by DANA for a Hyperid with the second pair of pereiopoda slender and not at all cheliform, was united by SPENCE BATE²⁾ with the genus *Hyperia*, LATREILLE. On account of the very obscure and somewhat erroneous description given by SPENCE BATE, the genus has been quite confounded, and not only later authors, but SPENCE BATE himself³⁾ has been deceived into transferring Hyperids with totally opposite characters to DANA's genus. The generic name *Tauria* was taken up again by A. BOECK 1872 for Hyperids belonging to the genus *Metoecus* of KROEYER (1838), which generic name BOECK was obliged to reject, as in 1833 it had already been given to an insect. How far he was from comprehending the description of DANA will be clearly seen on comparing the description of DANA and the principal characters quoted by BOECK.

<i>Tauria.</i> DANA.	<i>Tauria.</i> DANA. SPENCE BATE.	<i>Tauria.</i> DANA. A. BOECK.
Antennæ four, short approximate at the base, superior rather stout. Feet <i>not subcheliform</i> nor subprehensile, seventh pair hardly abbreviated.	Hyperia with the antero-inferior angle of the carpus of both pairs of gnathopoda so far anteriorly	The first and second pair of legs with a forciform hand, chelate, the infero-anterior cor-
Anterior feet shortest, quite pubescent; fourth joint broad, more than		

¹⁾ »Un. States Expl. Exp. Crustacea». Vol. 2, pag. 988.

²⁾ »Catal. of the spec. of Amph. Crust. in the coll. of Brit. Museum». London 1862, pag. 292.

³⁾ *Hyperia tauriformis*: »History of the Brit. Sessile-eyed Crustacea» by C. SPENCE BATE and J. O. WESTWOOD. London 1868. Vol. 2, pag. 519.

twice as long as the third and much longer than the fifth; the claw minute they have broad lamellar coxæ, the next joints are small, they have *not a projecting lower apex*, the last joint and the claw together are hardly as long as the fourth joint.

produced as to extend to the extremity of the propodos thus forming a tolerably perfect, but compound chelate organ.

ner of the carpus produced into a long process, longer than, or as long as, the metacarpus.

On account of the above I think it is only justice to restore the name *Tauria*, DANA, as a genus, which, in my opinion, is very well defined, with the typical species *Tauria macrocephala*. The *Tauria medusarum* O. FABR. [A. BOECK] is to be united with the genus *Hyperia*, because the development of the carpal process is gradual through the species and no generic character. But as the name *H. medusarum* has been already given by O. F. MÜLLER to another *Hyperia*, I propose for it the name *Hyperia Kroeyeri*, the diagnosis being the same as that given by BOECK l. c. pag. 83. *Tauria abyssorum*, A. BOECK, must be named *Hyperia abyssorum*, A. BOECK.

Explanation of the plate:

- Fig. 1. *Lanceola Sayana*. n. sp.
: 1 *a*. The end of the sixth pair of pereiopoda.
: 1 *b*. The end of the 7:th pair of pereiopoda.
: 2. *Paraphronima clypeata*. n. sp.
: 2. *c*. The end of the second pair of pereiopoda.
: 3. *Tyro Sarsii*. n. sp.
: 3 *d*. The first pair of uropoda.
: 4. *Tauria macrocephala*. DANA.
: 4 *e*. The antennæ.
: 4 *f*. The first pair of pereiopoda.
: 4 *g*. The second » » »

(Fig. 4, 4 *e*, *d*, *e* are copies from Dana; the others are originals).





A. H. Westergaard del.

Lith. W. Schlichter, Stockholm.

Fig. 1. *Lancoela Sayana*, n. sp. Fig. 2. *Parapiporima chypeata*, n. sp.
Fig. 3. *Tyro Sarsii*, n. sp. Fig. 4. *Tania macrocephala*, Dana.

OM

MELAMIN OCH MELAMFÖRENINGAR

AF

P. CLAËSSON.

INLEMNADT DEN 10 JUNI 1885.

STOCKHOLM, 1885.
KONGL. BOKTRYCKERIET.
P. A. NORSTEDT & SÖNER.

Det finnes en hel klass af cyanföreningar som af LIEBIG blifvit upptäckta och som utgöra sönderdelningsprodukter af rhodanammonium eller af sådana kunna framställas. Dit höra melamin, ammelin, ammelid, melanurensyra, melam, melon, melonväte och cyamelursyra. Huruvida dessa föreningar äro normala cyanurföreningar eller isocyanurföreningar, derom äro meningarne delade.

Melamin, $(\text{CN})_3(\text{NH}_2)_3$.

Enligt föregående undersökningar har det visat sig att cyanurklorid utan undantag ger normala cyanurföreningar. Den melamin jag förut framställt af cyanurklorid kan sålunda anses för den normala föreningen. Lyckas det derföre att framställa en med denna isomer förening, kan denna utan tvekan anses såsom isomelamin. Då dessa föreningar emellertid vid upphettning ej smälta, är den enda säkra hållpunkten för jämförelsen dem emellan de kristallografiska karaktärerna. Jag har på den grund framställt melamin efter flera olika metoder, och produkterna hafva derpå blifvit kristallografiskt undersökta af Docent M. Weibull.

Melamin har uppgifvits erhållen på följande olika vägar.

1. Melamin framställdes som bekant först af LIEBIG genom längre tids kokning af melam med kalihydrat i utspädd form.

2. Melamin bunden vid rhodanvätesyra fann CLAUS (Ber. Ber. 9, 1915) redan färdigbildad i återstoden (rå melam) efter rhodanammoniums upphettning till 260° .

3. DRECHSEL (J. pr. Ch. [2] 13 s. 331) påvisade, att vid upphettning af dicyandiamid denna kan polymeriseras till melamin.

4. VOLHARD (J. pr. Ch. [2] 9, 29) anger att melam öfvergår nästan fullständigt i melamin vid upphettning med ammoniak till 150° .

5. Enligt JÄGER (Ber. Ber. 9, 1554) öfverföres melam i melamin genom att lösas i konc. svafvelsyra och derpå uppvärma till 100°.

6. Enligt uppgift af PONOMAREW (Beilstein: Handbuch d. org. Chemie s. 714) öfverföres isodithio-cyanurbisulfid i rhodanvätesyrad melamin genom upphettning med ammoniak till 160°.

7. Cyanmelamidin sönderdelas af saltsyra i cyanväte och melamin (BYK: J. pr. Chem. [2] 20 s. 346).

8. Vid upphettning af guanidinkarbonat med fenol och vatten uppstår melamin (NENCKI: J. pr. Ch. [2] 17 s. 235).

9. Cyanurklorid upphettad med ammoniak ger melamin (CLAËSSON, Bihang till K. Vet.akad. Handlingar B. 10 n:o 6).

Enligt en stor del af dessa metoder har jag framställt eller sökt att framställa melamin.

Melamin framställdes enligt LIEBIGS uppgift (POGG. Ann. 34 s. 586). De af CLAUS (Ann. Ch. Pharm. 179 s. 120) angifna proportionerna mellan melam, kalihydrat och vatten iakttogos. Vid en viss concentrationsgrad af den filtrerade kalilösningen utkristalliserade melamin i vackra, väl utbildade kristaller.

Rhodanammonium upphettades till 260°, tills återstoden blifvit fast. Vid utkokning af denna med vatten gick rhodanvätesyrad melamin i lösningen. Härur kunde lätt ren melamin erhållas.

Melam upphettades vid olika temperaturer ända till 200° med konc. ammoniak. Enligt VOLHARDS uppgift skulle härvid melam nästan fullständigt öfvergå i melamin. Jag kan ej bekräfta detta. Melaminfri melam afficieras alls ej af ammoniak.

Öfver melams förhållande till konc. svafvelsyra föreligga olika uppgifter. LIEBIG erhöll dervid ammehid. KNAPP (Ann. Ch. Pharm. 73) erhöll samma produkt. GERHARDT erhöll melanurensyra. Samma produkt erhöll ock GABRIEL (Ber. Ber. 8, 1166). JÄGER erhöll vid 100° melamin (17 pet af den använda melam) och ammehin, vid högre temperatur melanurensyra. Jag förfor noggrannt enligt JÄGER och erhöll äfven i själfva verket något melamin. Den vida öfvervägande delen af reaktionsprodukten var dock en blandning af ammehin och melanurensyra.

Såsom i det följande skall visas kan ej melam öfverföras i melamin, utan all den melamin som kan erhållas ur rå melam

finnes deri i sjelfva verket redan färdigbildad. Behandlingen af rå melam med alkalier eller syror för framställningen af melamin är i sjelfva verket alldeles öfverflödig, utan man vinner samma mål helt enkelt genom utkokning med vatten.

Isodithio-cyanurbisulfid (pseudosvafvecyan) upphettades med conc. ammoniak till nära 200° under trenne timmar. Efter kallmandet hade i försöksröret afsatt sig kristaller. Innehållet afdunstades till torrhet, hvarpå återstoden koktes med sodalösning och filtrerades. Ur filtratet afsatte sig ett hvitt pulver, som enligt analys och reaktioner utgjordes af ammelin. Ur moderluten erhöles om än i ringa mängd melamin. Utom anförda föreningar uppkomma äfven svafvelväte och rhodanväte. Thioammelin, thiomelanurensyra eller melanurensyra kunde deremot ej påvisas.

Cyanurklorid öfverfördes genom upphettning med conc. ammoniak till omkring 140° i melamin. Denna reaktion sker fullständigt kvantitativt.

Melamin erhöles äfven i ringa mängd genom att i smältande rhodanammonium leda en ström af klorvätegas.

Alla på nu anförda sätt framställda melaminer hafva blifvit kristallografiskt jemförda med hvarandra och befunnits identiska, och är på anförda grunder denna förening att anse såsom hörande till de normala cyanurföreningarne. Docent WEIBULL som utfört de kristallografiska undersökningarne har derom lemnat följande uppgifter:

»Af melamin förelägo fyra olika prof till undersökning: *A* af cyanurklorid, *B* af melam enligt CLAUS, *C* af melam enligt JÄGER, *D* af melam enligt LIEBIG. Kristallerna *A*, *B* och *D* äro fullk. hvita, ganska genomskinliga. xxllerna *C* hafva en dragning i gult. Väl utvecklade individer, som jag mycket sällan träffat i portionerna *B* och *C*, oftare i *A* och *D*, visa ett kort monoklint prisma (110) begränsadt af basplanet (001), efter hvilket de äro tafvelformiga. De trubbiga hörnen äro afstypnade af klinodomat (011).

A och *D* bilda oftast relativt tjocka, sneda taflor; hvars asymmetriska form beror dels därpå att de två paren af domaytor (010) äro olika starkt utvecklade dels derpå att synnerligen ofta endast tvänne, på samma sida om symmetriplanet liggande prismor (t. ex. (110) och $\bar{1}10$) tydligt framträda, samtidigt som de motsatta klinodomerna (011 och $0\bar{1}\bar{1}$) förhärskar: därvid bildas tresidiga taflor.

I *B* finner man så godt som uteslutande fjäderlika aggregater af flera efter symmetriplanet (010) sammanlagrade individer; sällan äro de verkligt sammanvuxna utan vanligen blott förenade af formlös melaminsubstans. Dessa aggregater visa samma form som individerna i *A*. Endast ett par små individer som bestodo af efter basplanet förvuxna taflor voro mätbara.

C visar samma parallellförväxning efter 001 och 010 som *B*. Aggregaterna äro mera kompakta; äfven hos dessa är i regeln endast basplanet tydligt utbildadt.

Den kristallografiska och optiska orienteringen har visat identiteten af dessa preparat. Genomgångarne efter 001 äro någorlunda tydliga; de efter 110 särdeles otydliga.

$$a : b : c = 1,4091 : 1 : 0,9783$$

$$\beta = 68^{\circ}, 13'.$$

Stark glans visar i allmänhet endast basplanet 001, mätningarne hafva därför ej alltid gifvit ett fullt tillfredsställande resultat.

Vinkeltabell:

	<i>A.</i>		<i>B.</i>		<i>C.</i>		<i>D.</i>	<i>Beräknadt.</i>
	I	II	I	II	I	II		
110 : 110	74° 52'	74° 45'*	74° 26'	—	74° 23'	—	74° 53'	
110 : 001	—	76° 59'*	77° 8'	77° 35'	77° 5'	76° 50'	76° 52'	
001 : 011	41° 56'	42° 15'*	—	—	(43)	—		
011 : 110	45° 27'	45° 19'	—	—	—	—		45° 30'
011 : $\bar{1}10$	68° 57'	(69)	—	—	—	—		68° 26'

De inom parentes anförda talen äro blott approximativa, beroende på att glansen på ifrågavarande ytor varit särdeles ringa.

På taflor ur alla portionerna var utsläckningen diagonal. De optiska axlarnas plan sammanfaller med symmetriplanet. I konvergent polariseradt ljus visa tunna taflor efter (001) ringarne kring den ena axeln i preparatets kant, vid den spetsiga vinkel som prismat bildar. Genom vridning af horisontalaxeln i SCHNEIDERS Pol. apparat framträder denna axel tydligt. Dispersion är här tydlig: $\varrho < \epsilon$. Dubbelbrytningen mellan denna axel och normalen från ögat är positiv. Första mittelinien som ej allt för mycket bör afvika från *a*-axeln är alltså negativ. Mätning af axelvinkeln omöjliggjordes genom taflornas ringa tjocklek och bristen på lämpliga genomgångar.

Dessa resultat kunna ej bringas i någon öfverensstämmelse med LIEBIGS (Ann. Ch. Pharm. 10, 18) uppgifter att melamin är rombisk med axelsystemet $a : b : c = 0,43, 1 : 0,538$ samt att der uppträdande ytor äro pyramidala. LIEBIGS melamin var liksom *D* framställd ur melam.»

I sammanhang med föregående försök har jag äfven något närmare än förut varit fallet undersökt ammoniaks inverkan på thiocyanursyrade eterarter. Det har häraf framgått, att någon fullständig amidering ej kan uppnås, utan reaktionen stannar vid mono- och diamiderade eterarter i fullkomlig analogi med hvad fallet är vid ammoniaks inverkan på cyanursyrans eterarter.

Amidodithiocyanursyrad etyleter, $\text{NH}_2(\text{CN})_3(\text{SC}_2\text{H}_5)_2$.

Thiocyanursyrad etyleter upphettades med alkoholisk ammoniak i slutet rör vid olika temperaturer ända upp till 180° . Utom något oförändrad thiocyanursyrad etyleter voro reaktionsprodukterna monamidodithiocyanursyrad etyleter och diamidodithiocyanursyrad etyleter. Följande förfaringssätt befans lämpligt att skilja dessa produkter från hvarandra. Sedan den alkoholiska ammoniaken blifvit afdunstad, behandlades återstoden med eter, som lemnar diamidodithiocyanursyrad etyleter olöst men lätt löser de båda andra substanserna. Sedan etern blifvit bortjagad behandlades återstoden med stark alkoholisk ammoniak, som allägsnar den fullständiga thiocyanursyrade etyletern. Amidodithiocyanursyrad etyleter såsom i alkoholisk ammoniak mycket svårlöslig blir deremot kvar. Efter upprepade omkristallisationer ur eter och derpå följande tvättningar med alkoholisk ammoniak erhålles produkten ren och af konstant smältpunkt 112° .

Analys:

C_7	84	38,89	39,21
H_{12}	12	5,56	5,39
N_4	56	25,92	—
S_2	64	29,63	—
	216	100,00.	

Amidodithiocyanursyrad etyleter kristalliserar väl. Docent WEIBULL har deröfver lemnat följande kristallografiska meddelande.

Rombiska kristaller med grundprismat (110) på $67^{\circ} 35'$ och ett makrodoma (101). Kanten som bildas af prismats spetsiga vinkel är ibland liksom fluten, möjligen antydande brachyplanparet (010). Prismat är fint streckadt i b -axelns riktning. Glansen på prismaytan (110) är i allmänhet något starkare än på domat. De tydligaste genomgångarne äro efter 101.

Vinkeltabell:

	funnet.		beräknadt.
	I	II	
$110 : \bar{1}10$	$67^{\circ} 35' *$	—	—
$110 : 101$	$65^{\circ} 8'$	$65^{\circ} 10'$	$65^{\circ} 12',25$
$101 : \bar{1}10$	$60^{\circ} 36',5 *$	$60^{\circ} 41'$	—

Ur de med * betecknade vinklarne beräknas axelförhållandet

$$a : b : c = 0,6692 : 1 : 0,3912.$$

Utsläckningen är rät och å spaltblad efter domat synes bilden af en axel i sådant läge att axlarnes plan är parallelt med brachyplanparet. Plattor slipade efter 001 visade att den spetsiga bissektrisen sammanföll med c -axeln samt gafvo i SCHNEIDERS apparat en axelvinkel af 58° på hvitt ljus.

Amidodithiocyanursyrad etyleter är löslig i eter och kolsvafva. Äfven löses den i alkohol men är svårslig i alkoholisk ammoniak, hvarför den understundom vid dess framställning utkristalliserar i försöksröret. Föreningen har basiska egenskaper, då den lätt löses i syror. Den utmärkes för den lätthet med hvilken gruppen thioetyl utbytes mot hydroxyl. Detta sker redan genom uppvärmning med utspädd saltsyra i vattenbad. Ur lösningen kristalliserar saltsyrad melanurensyra, hvarur melanurensyra identisk med den af melam framställbara kan erhållas.

Diamidodithiocyanursyrad etyleter, $(\text{NH}_2)_2(\text{CN})_3\text{SC}_2\text{H}_5$.

Såsom förut är anfördt bildas äfven denna förening genom thiocyanursyrad etyleters behandling med alkoholisk ammoniak vid högre temperatur. Den är olöslig i eter och renas genom omkristallisation ur alkohol med åtföljande tvättning med eter. Den kristalliserar i prismor eller nålar. Smpt 165° . Äfven denna förening löses i syror och har sålunda basiska egen-

skaper. Uppvärmad med syror öfvergår den lätt i ammelin och etylsulfhydrat.

Analys:

		ber.	erh.
C ₅	60	35,09	35,34
N ₅	70	40,93	—
S	32	18,72	—
H ₉	9	5,26	5,43
	171	100,00.	

Amidodithiocyanursyrad metyleter, NH₂ (CN)₃ (SCH₃)₂.

Denna förening utkristalliserade direkt ur försöksröret vid behandling af thiocyanursyrad metyleter med alkoholisk ammoniak vid omkring 150°. Den kristalliserar väl och liknar i allo motsvarande etylförening. Smpt 266°.

Analys:

		ber.	erh.
C ₄	48	34,05	33,91
N ₄	56	39,71	—
S	32	22,69	—
H ₅	5	3,55	3,62
	141	100,00.	

Denna förening har jag redan omnämnt i en föregående uppsats (Bihang till K. Vet. Akad. Handl. B. 9 n:o 17 s. 11). Jag antog den emellertid då vara melamin.

Amidodithiocyanursyrad isoamyleter, NH₂ (CN)₃ (SC₅H₁₁)₂.

Ammoniak förhåller sig till thiocyanursyrad isoamyleter på alldeles samma sätt som till etyletern, och de bildade produkterna skiljas från hvarandra på samma sätt. Den monamiderade produkten kristalliserar temligen otydligt och smälter vid 82°.

Analys:

		ber.	erh.
C ₁₃	156	52,00	51,83
S ₂	64	21,34	—
N ₄	56	18,66	—
H ₂₄	24	8,00	7,92
	300	100,00.	

Diamidothiocyansyrad isoamyleter, $(\text{NH}_2)_2(\text{CN})_3\text{SC}_3\text{H}_{11}$.

Föreningen kristalliserar temligen väl. Smpt 178° .

Analys:

		ber.	erb.
C ₈	96	45,07	45,26
N ₅	70	32,86	—
S	32	15,02	—
H ₁₅	15	7,05	7,32
	213	100,00.	

I den förut citerade uppsatsen omnämnde jag, att vid thioamyleterns behandling med alkoholisk ammoniak bildas melamin, som direkte utkristalliserade ur försöksröret. En kol- och vätebestämning deri gaf ock de för melamin beräknade värdena och vid upphettning med saltsyra i slutet rör erhöles cyanursyra. Kroppen visade sig emellertid kristallografiskt skiljd från melamin. Då nu ammelin och melanurensyra ha nära nog samma kol- och vätehalt, kunde substansen möjligen också vara någon af dessa. Tyvärr saknade jag substans för att närmare undersöka detta. Vid försökets upprepande med ren amyleter, framställd med all sorgfällighet, erhöles jag emellertid upprepade gånger ofvan anförda resultat. Det är derföre antagligt att den af mig vid förra försöket använda amyletern innehöll en hydroxylgrupp.

Det må äfven anmärkas att de nu anförda diamidothiocyansyrade eterarterna äfvensom åtskilliga andra föreningar äfven kunna erhållas af klorcyanurdiamid.

Ammelin, $(\text{NH}_2)_2(\text{CN})_3\text{OH}$.

Denna förening har jag konstaterat uppkomma på följande olika sätt:

1. Vid kokning af melam med utspädd kalilösning såväl som vid kokning med saltsyra eller behandling med conc. svafvelsyra vid 100° .

2. Vid behandling af diamidocyanurklorid med kalidhydrat.

3. Vid oxidation af thioammelin med öfvermangansyradt kali.

4. Vid kokning af diamidocyanursyrans eterarter med saltsyra.

5. Vid kokning af diamidothiocyansyrans eterarter med saltsyra.

6. Vid upphettning af isodithiocyanurbisulfid med conc. ammoniak till 150° .

Substituerade ammeline kunna erhållas af substituerade kloreyanurdiaminer.

Till de redan bekanta egenskaperna hos ammelin kan jag tillägga följande. Utfäld ur en varm lösning synes den under mikroskopet såsom små bollformiga sammangyttringar af nålformiga kristaller.

Karakteristiskt för ammelin är att den löses i varm soda-lösning men faller åter nästan fullständigt ut vid afsvålning. Härigenom skiljer den sig från melanurensyra, som äfven löses deri men ej utfaller vid afsvålning. Detta är den enda metod, som kan användas att skilja ammelin och melanurensyra i blandning från hvarandra. Upprepas denna operation tvenne gånger, så erhåller man rena produkter. Ren ammelin igenkännes vidare derpå, att den löses i konc. kokande ammoniak men faller ej åter ut vid afsvålning.

Af ammelins salter skall jag här endast anföra det klorvätesyra, då det ännu ej blifvit framställt. Det är i vatten svårslösligt och kristalliserar i små prismor. Det har sammansättningen $(\text{HO})(\text{CN})_3(\text{NH}_2)_2\text{HCl}$. Erh. 21,46 pct Cl.; ber. 21,71 pct.

Ammelid (Melanurensyra), $\text{NH}_2(\text{CN})_3(\text{OH})_2$.

Då såsom jag här nedan skall visa LIEBIGS ammelid är en blandning af ammelin och melanurensyra, har jag framför detta sednare namn föredragit namnet ammelid, hvilket passar bättre in i systemet. Namnet melanurensyra är äfven af den anledning olämpligt, att kroppen är åtminstone lika mycket en bas som syra.

Uppkomsten af denna bas har jag konstaterat i följande fall:

1. Ammelin upphettad med conc. svafvelsyra till omkring 160° öfvergår delvis i ammelid.

2. Melem öfverföres i ammelid genom kokning med konc. kalilösning eller behandling med konc. svafvelsyra vid 150° .

3. Vid kokning af monamidocyanursyrans eterarter med saltsyra.

4. Vid kokning af monamidothiocyanursyrans eterarter med saltsyra.

5. Vid oxidation af thioammmelid med öfvermangansyradt syra.

Ammelid utfälld ur en varm lösning är ett kristalliniskt pulver, vid stark förstoring utgörande ytterst små prismatiska kristaller. Fri från ammelin löses den lätt i ammoniak. Är lösningen koncentrerad utkristalliserar derur en ammoniakförening i långa nålar. I varm sodalösning löses ammelid utan att något vid afsvälning utkristalliserar och är detta som nämndt en metod att skilja ammelin och ammelid i blandning med hvarandra.

Vid behandling af rå melam med syror eller alkalier erhålles alltid en blandning af ammelin och ammelid motsvarande de i råprodukten existerande melam och melem. LIEBIGS formel för ammelid $C_6H_9N_9O_3$ är också formeln för en blandning af lika mol. ammelin och ammelid. I sjelfva verket förhåller sig också en blandning af ammelin och ammelid såsom LIEBIGS ammelid. Under det ammelin svårt men fullständigt löser sig i ammoniak och ren ammelid löser sig lätt deri, löses en blandning af båda endast i ringa mängd af ammoniak och lösningen förblir oklar äfven efter längre tids hvila. Äfven till syror förhåller sig en blandning af ammelin och ren ammelid såsom LIEBIGS ammelid. Under det såväl ammelin som ren ammelid ge med syror lätt och väl kristalliserbara salter, är detta ej förhållandet med en blandning, utan kristalliserar derur antingen intet eller ock mycket otydliga kristaller. I alla de fall der en kropp liknande LIEBIGS ammelid är erhalten, har sålunda förelegat en blandning af ammelin och ammelid, nemligen vid upphettning af rå melam och af ammelin med konc. svafvelsyra, vid upphettning af salpetersyrad ammelin, vid upphettning af isuretin, vid upphettning af urinämne med cyanjodid och cyanamid med svafvelsyra.

Den väg, på hvilken substituerade ammelider kunna erhållas, framgår tydligt af det föregående. Genom inverkan af aminer på cyanursyrans eller thiocyanursyrans eterarter kunna substituerade ammelideterarter erhållas och af dessa genom kokning med saltsyra substituerade ammelider.

Melam, $(NH_2)_2(CN)_3NH(CN)_3(NH_2)_2$.

För att få en närmare kännedom om beståndsdelarne i s. k. rå melam upphettades 325 g. rhodanammonium till 260° i oljebad tills produkten blef fast, hvartill åtgick en längre tid. Återstoden vägde 125 g. och hade endast en svag dragning i gult. Denna pulveriserades väl och utkokades med

stora mängder vatten. Det härvid olösta vägde 40 g. I lösningen hade sålunda gått 75 g. Denna försattes med soda, hvarpå afdunstades, då melamin utkristalliserade. Häraf erhöles 26 g. Då denna fans i lösningen bunden vid rhodanväte, utgjordes följaktligen hälften eller något deröfver af det i vattenlösningen gångna af rhodanvätesyrad melamin. Den andra hälften innehöll 12 g. rhodanväte. Återstoden (omkring 24 g.) af det i vatten lösta underkastades ingen närmare undersökning. Det i vatten olösta analyserades. Dervid erhöles:

C	29,23	pct
N	56,38	»
H	3,91	»
S	5,85	»
O	4,63	»

Frändrages syret, som finnes deri otvifvelaktigt såsom vatten, beroende på ofullständig torkning, så stämmer resultatet med antagandet att produkten utgöres af melam, melem och rhodanväte till ungefär lika molekyler. Vidare försök bekräftade detta. Produkten behandlades med kalihydrat, då allt svafvet öfvergick i kalilösningen såsom rhodanväte, i hvilken form det sålunda äfven fans i melam. 35 g. på så sätt renad melam uppvärmdes med 140 g. kalihydrat löst i 3 l. vatten i 24 t. i en kolf på vattenbad. Det som dervid ej löstes var mycket voluminöst. Efter slutad uppvärmning inleddes kolsyra, hvarpå afdunstades till temlig koncentration. Det erhöles dervid ej spår af melamin. Till lösningen sattes salmiak, då en voluminös fällning erhöles, hvilken bestod af i det närmaste ren ammelin (erh. 54,21 pct N; ber. 55,12 pct) men innehöll dessutom något ammeliid. Återstoden som icke löstes i den utspädda kalihydratlösningen vägde 16 g. Denna analyserades. Resultatet af analysen jemfördt med det för melem beräknade visar följande tabell:

		ber.	erh.
C ₆	72	33,34	33,63
N ₁₀	140	64,81	63,94
H ₄	4	1,85	1,96
	216	100,00	99,53.

Den analyserade produkten utgjordes sålunda i hufvudsak af melem, hvilket äfven bekräftades deraf att den lätt kunde öfverföras i ammeliid.

Denna undersökning berigtigar sålunda åtskilliga äldre uppgifter af LIEBIG m. fl. Först framgår deraf, att melamin ej uppkommer af melam genom en hydrationsprocess, såsom LIEBIG, CLAUS och andra antaga, utan all den melamin, som dessa författare erhållit af rå melam genom kokning med utspädd kalilösning, finnes redan färdigbildad deri i förening med rhodanväte. Framställningen af melamin af rå melam blir sålunda ytterst enkel. Råprodukten pulveriseras väl och utkokas med betydliga mängder vatten, då all melamin går i lösningen. Härur kan den erhållas i fri form genom afdunstning efter föregången tillsats af soda. Vidare följer af experimenterna, att den s. k. rena melam, erhållen af råprodukten genom behandling med kali, ej utgöres af en enda kropp melam med den af LIEBIG angifna sammansättningen $C_6N_{11}H_9$, utan af en blandning af denna och melem $C_6N_{10}H_7$, hvartill kommer mer eller mindre melon, allt efter upphettningens styrka.

De olika reaktionsstadierna, som följa på hvarandra vid rhodanammoniums upphettning, äro sålunda i hufvudsak följande:

1. $NH_4SCN = NH_2CSNH_2$
2. $NH_2CSNH_2 = H_2S + CNNH_2$
3. $CNNH_2 + NH_4SCN = C(NH_2)_2NH, HSCN$
4. $NH_4SCN + 2H_2S = (NH_4S)_2CS$
5. $3C(NH_2)_2NH, HSCN = (NH_2)_3(CN)_3HSCN + 2NH_4SCN + H_3N$
6. $2(NH_2)_3(CN)_3HSCN = (NH_2)_2(CN)_3NH(CN)_3(NH_2)_2HSCN + NH_4SCN$
7. $(NH_2)_2(CN)_3NH(CN)_3(NH_2)_2HSCN = NH_2(CN)_3(NH_2)_2(CN)_3NH_2 + NH_4SCN$
8. $NH_2(CN)_3(NH_2)_2(CN)_3NH_2 = (CN)_3(NH)_3(CN)_3 + NH_3$

Såsom förut är anfördt är LIEBIGS rena melam en blandning af melam och melem. Fullständigt kunna dessa ej skiljas från hvarandra. På följande sätt kan man dock ur blandningen erhålla små mängder melam fri från melem. Blandningen af melam och melem kokas en tid med betydliga mängder utspädd saltsyra, hvilket bäst sker genom inledning af ånga. Härvid angripes melem föga eller alls ej, då deremot en del melam dervid öfverföres i ammelin, en annan del åter finnes löst i saltsyran. Man filtrerar varmt och försätter filtratet med kalihydrat i öfverskott. Härvid löses den bildade ammelinen, då

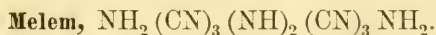
deremot den melam som deri varit löst härvid utfaller. Den tages på filtrum, uttvättas först med vatten, derpå med ättiksyra och derpå åter med vatten samt torkas vid omkring 150°.

Analys:

		ber.	erh.
C ₆	72	30,63	30,70
N ₁₁	154	65,53	65,81
H ₉	9	3,84	3,92
	235	100,00	100,43.

Melam är ett färglöst i vatten olösligt pulver. I syror är melam såsom ofvan är anfördt något löslig. Melam har karaktären af en bas, då den i rå melam finnes deri bunden vid rhodanväte. Dess basiska karaktär skönjes äfven på den uppvärmning som äger rum vid tillsats af konc. svafvelsyra. Äfven med saltsyra synes den ingå förening.

Melam karakteriseras deraf att den kokad med saltsyra eller kalihydrat eller uppvärmd med konc. svafvelsyra till 100° hydreras uteslutande i ammoniak och ammelin. På grund af denna reaktion är också dess ofvan angifna formel uppställd.



Denna förening, som jag redan förut framställt genom upphettning af thiocyanursyra till 360°, utgör som förut är nämdt en af beståndsdelarne i LIEBIGS melam och kan derur erhållas i åtminstone nära ren form genom rå melams uppvärmning med utspädd kalilösning (1 d. melam, 4 d. kalihydrat, 80 d. vatten) cirka 24 t. på vattenbad. Genom denna behandling öfvergår melam i ammelin, under det melem blir till största delen intakt.

I sina yttre egenskaper liknar melem fullständigt melam. Äfven melem är att anse såsom en svag bas. Vid tillsats af konc. svafvelsyra inträder uppvärmning och vid behandling med saltsyra fixeras en ej obetydlig mängd deraf som med kallt vatten endast med svårighet kan fullständigt aflägsnas.

Kokas melem med konc. kalilösning (1 d. kalihydrat på 2 d. vatten), tills vid tillsats af vatten ingen fällning inträder, så uppkommer dervid uteslutande ammelinid och ammoniak. Samma produkter uppkomma, om melam upphettas med konc. svafvelsyra till 150°.

Melon $(\text{CN})_3(\text{NH})_3(\text{CN})_3$.

Melon är som bekant den kropp som återstår, när melam eller melem utsätts för lindrig glödning. Det är sålunda en af de beständigaste organiska föreningar. Den uppstår äfven genom glödning af en hel del andra cyanurföreningar såsom isodithiocyanursulfid, isodithiocyanurbisulfid, melamin, ammelin, ammelid, klorecyanurdiamid och persulfocyansyra, sålunda öfverhufvud vid glödning af rhodanföreningar.

BERZELIUS iakttog först denna förening vid destillation af rhodankviksilfver. LIEBIG undersökte densamma närmare och gaf den ofvanstående namn på grund af dess gula färg. Han framställde den dels af isodithiocyanurbisulfid, dels af melam och antog att den utgjorde en fri radikal, åt hvilken han tilldelade formeln C_6N_8 .

LIEBIGS undersökning väckte en häftig opposition af VÖLCKEL äfvensom af LAURENT och GERHARDT.

Vid upphettning af rhodanammonium erhöll VÖLCKEL en produkt, som bör vara identisk med LIEBIGS melon. Han kallar den *glaucen* och tilldelar densamma formeln $\text{C}_4\text{H}_2\text{N}_6$.

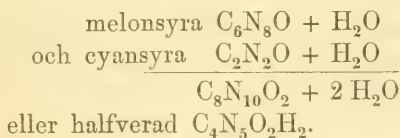
LAURENT och GERHARDT underkastade denna kropp en utförligare undersökning. De framställde densamma af klorecyanurdiamid, af melam, af ammelin och ammelid, af isodithiocyanurbisulfid såväl som af persulfocyansyra, allt genom upphettning. På grund af öfverensstämmande analyser gafs åt kroppen ifråga formeln $\text{C}_6\text{H}_3\text{N}_9$, hvilken formel ock otvifvelaktigt är den rätta.

Då det är mycket svårt att endast genom upphettning fullständigt befria melon från melem, har jag använt följande metod för framställning af ren melon. Rå melon upphettades med konc. svafvelsyra till 150° . Härigenom öfverföres all melem i ammelid, på samma gång som en del melon öfverföres i cyanursyra. Efter kallnandet tillsättes vatten, då den oangripna melon utfaller. Denna renades ytterligare genom att lösas i kokande konc. salpetersyra, hvarur den utfälles genom tillsats af vatten. På så sätt framställd är melon ett gulaktigt amorft pulver.

Öfver melons förhållande till kali föreligga följande uppgifter. I sin första uppsats (POGG. Ann. 34 s. 612) anmärker LIEBIG, att vid behandling af melon med kali bildar sig ett i nålar kristalliserande salt, som dock delvis består af cyanur-

syradt kali. På ett annat ställe återkommer han till samma syra, hvars silfversalt vid analys gaf 58,5 pet Ag, 13,35 pet C, 0,41 pet H. Syran gaf vid analys 31,94 pet C, 46,59 pet N och 1,57 pet H.

VÖLCKEL uppställer på den grund formeln $C_8N_{10}H_2O_2 + 2H_2O$ för syran i detta salt. LIEBIG betraktar syran såsom en förening af



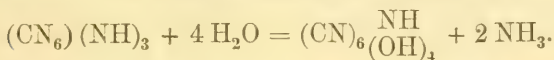
Syran antar han uppkomma genom inverkan af melonväte på melon.

Då LIEBIGS analyser öfverensstämman med de för cyamelursyra beräknade, så undersökte också HENNEBERG, huruvida denna syra verkligen bildas vid melons behandling med kali och fann äfven så verkligen vara fallet.

Melons reaktioner uttryckas bäst genom följande formel



Dess öfvergång i cyamelursyra visar följande formel



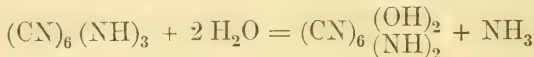
Å andra sidan hade GMELIN angifvit, att vid mindre intensiv behandling af melon med kali stora mängder melonväte öfvergingo i kalilösningen. LIEBIG antog också i början att melon vid behandling med kali öfvergick i melonväte och en melonsyra (cyamelursyra), hvilket var öfverensstämmande med hans teori. Fastän LIEBIG i sina många efterföljande undersökningar af melonvätet gör sig all upptänklighet möda att uppfinna metoder för denna syras framställning, visade det sig emellertid att melon allena icke ger melonväte, utan en rhodanförening måste ytterligare komma till. Det är också alldeles oförenligt med melons och melonvätetes formler att den sednare skulle kunna uppstå af den förra. GMELINS anmärkning låter emellertid bringa sig i öfverensstämmelse med undersökningar af LAURENT och GERHARDT, hvilka ej vidare hvarken af dem eller andra blifvit påaktade, men som dock leda till den sannolika existensen af en ny syra som jag vill kalla *cyamelansyra*.

Denna ännu hypotetiska syra har formeln



och är sålunda dioxydicyanurdiimid.

Dess uppkomst af melon anger följande formel



LAURENT och GERHARDT behandlade melon med kali. I lösningen gick en syra som var okristalliserbar och gelatinös. Analyserna utvisa åt denna syra formeln

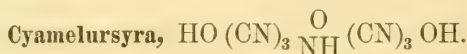
$$\text{C}_6\text{H}_4\text{N}_8\text{O}_2 + \text{H}_2\text{O}$$

		ber.	erh.	
C ₆	72	30,2	29,5	30,0
H ₆	6	2,5	2,2	2,0

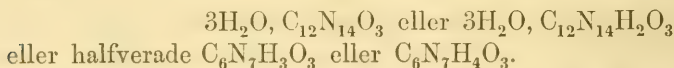
Ett annat preparat af syran synes ha varit vattenfritt:

		ber.	erh.
C ₆	72	32,7	33,0
H ₄	4	1,8	1,3

Äfven en organisk analys gjordes af ett silfversalt af denna syra. Då emellertid silfverhalten ej blifvit bestämd, kan man ej draga några slutsatser häraf.



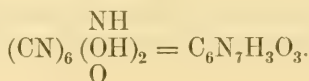
Enligt LIEBIGS analyser och HENNEBERGS undersökningar uppstår denna syra af melon vid behandling med kali. HENNEBERGS undersökningsmaterial var emellertid framställt af melonkalium genom längre tids behandling med kali. HENNEBERG tilldelar cyamelursyran antingen formeln



Cyamelursyrans uppkomst af melon och dess reaktioner gör det tydligt, att den har följande konstitutionsformel:



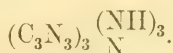
eller rättare en anhydrid häraf:



Cyamelon (Liebig's melonväte).

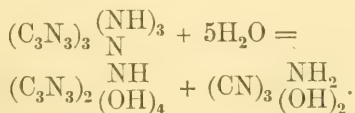
Öfver denna förening har herrskat många stridiga meningar och förts en mycket hänsynslös polemik. Den erhöles först af Gmelin vid upphettning af gult blodlutsalt med svafvel och uppfattades såsom en förening af radikalen melon med väte. Liebig erhöles derpå melonkalium genom att upphetta rhodankalium med melon äfvensom genom att till smältande rhodankalium sätta antimon- eller vismutklorid. Hans uppfattning var densamma som Gmelins. Åt melonkalium gafs formeln $C_6N_8K_2$. Laurent och Gerhardt åter uppfattade melonkalium såsom melon, i hvilken väte blifvit ersatt af kalium. Att den sednare meningen ej kan vara riktig framgår deraf, att melonkalium faktiskt ej direkt uppstår af melon. Enligt Liebig's sista undersökning på detta område (Ann. Ch. Pharm. 95 s. 257) tillkommer också melonväte en helt annan formel, nämligen $C_9N_{13}H_3$. Då nu melonväte hvarken direkt uppkommer af melon ej heller är väterikare än denna utan tvärtom, så är föreningens namn mycket oändamålsenligt, utan föreslår jag därför namnet *cyamelon* för att dermed antyda, att föreningen innehåller ännu mera cyan än melon sjelf.

Cyamelonens reaktioner visa, att den innehåller radikalen cyanur tre gånger, och att dess konstitution följaktligen kan återges med följande formel:



Cyamelon är sålunda såväl en imid som en nitril.

Att cyamelon verkligen innehåller tre gånger radikalen cyanur framgår deraf, att enligt såväl Henneberg som Liebig cyamelonkalium med kalihydrat ger såsom sönderdelningsprodukter cyamelursyra och ammelid, hvilket enligt ofvan angifna formel är lätt förklarligt:



UEBER

DIE BAHNELEMENTE

DES

DRITTEN SATURNSATELLITEN, TETHYS.

VON

KARL BOHLIN.

MEDDELADT DEN 15 APRIL 1885.



STOCKHOLM, 1885.

KONGL. BOKTRYCKERIET.

P. A. NORSTEDT & SÖNER.

Auf folgenden Seiten werde ich die Resultate einiger Berechnungen und Zusammenstellungen mittheilen, die ich nach dem Vorschlage von Herrn Professor Gylden in Bezug auf die Bahnelemente des dritten Saturnsatelliten ausgeführt habe. Zwar ist die Untersuchung empirischer Natur, da die Massen sowohl des Ringes als der Satelliten theils unsicher, theils unbestimmt sind. Zuerst führe ich die Elemente der verschiedenen Epochen, die aus den Beobachtungen ohne Rücksicht auf Störungen folgen, an. Dann folgt der Nachweis und die Bestimmung eines periodischen Gliedes der Länge des Satelliten und schliesslich werden die Zahlenwerthe sowohl des Perisaturniums und des Knotens der Bahn als auch die der Veränderungen jener Elemente abgeleitet.

Die erste Bestimmung von den Elementen des Tethys, die ich für den vorliegenden Zweck benutzen werde, ist die, welche, mit Zugrundelegung von W. Herschels Beobachtungen im Jahre 1789, von Lamont ausgearbeitet worden ist ¹⁾. Die angewandten Beobachtungen, an Zahl 65, welche sich von Juli bis December erstrecken, bestehen in Schätzungen der Abstände des Satelliten von den Rändern des Planeten oder des Ringes. Die geschätzten Abstände sind entweder mit dem Durchmesser des Planeten oder mit der sog. Ansa des Ringes, als Einheit genommen, ausgedruckt. Für die Reduction der sämtlichen Beobachtungen auf ein gemeinsames Maas hat Lamont aus den Beobachtungen selbst das Verhältniss der beiden genannten Einheiten bestimmt. Eine theilweise und provisorische Berechnung der Beobachtungen ergab dann zuerst folgende Elemente:

¹⁾ Ueber die Bahn des dritten Saturnsatelliten von Dr. J. Lamont. Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der königlichen Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Zweiter Band. München 1837.

Epoche: für 1789 Juli 27 10^h 51' 10" mittlere Pariser Zeit
mittlere Länge des Satelliten auf dem Ringe gezählt 249° 0'

$$a = 1.97622$$

$$e = 0.0383$$

$$\omega = 136^\circ 13'$$

$$n = 190^\circ 41' 51'' \text{ nach Cassini angenommen,}$$

wo die Länge des Perisaturniums, ω , wie die mittlere Länge des Satelliten auf dem Ringe und von dem aufsteigenden Knoten desselben in der Ecliptik gezählt ist. Die Längen sind, wie überall in dem folgenden, wenn nichts besonderes angeführt ist, wahre, d. h. frei vom Einflusse der sog. Planetaberration. Die halbe grosse Achse, a , ist in dem Durchmesser des Saturns ausgedruckt. Von den somit erhaltenen Elementen ausgehend, sucht er dann aus den sämtlichen Beobachtungen die Correctionen derselben und findet dabei

$$a = 1.9654$$

$$e = 0.0253$$

$$\omega = 53^\circ 36',$$

mittlere Länge $\varepsilon = 248^\circ 14'$ ¹⁾ für 1789, Juli 27 10^h 51' 10" mittl. Pariser Zeit. Er sagt hierüber: »Die bedeutenden Aenderungen, welche die elliptischen Elemente bei einer vollständigeren Berechnung erlitten haben, beweist, dass unter den Beobachtungen selbst wenig Übereinstimmung herrscht und deshalb die Bestimmungen auch wenig Zutrauen verdienen. Der gefundene Werth der mittleren Entfernung lehrt uns nichts, weil er in einem uns unbekannten Maasse ausgedruckt ist. Nur die Bestimmung der Epoche gewährt bedeutende Sicherheit.« Dass die Bestimmung von e und ω ganz illusorisch ist, sieht man auch dadurch ein, dass die Excentricität nach neueren Bestimmungen, wie weiter unten gezeigt wird, einen nahezu constanten Werth in der Nähe von 0.008 hat, was mit der obigen Bestimmung unvereinbar ist. Jene Excentricität macht übrigens in Bogen ausgedrückt und von der mittleren Entfernung des Saturn gesehen nur ungefähr 0".3 aus, eine Quantität, die aus den constanten und zufälligen Fehlern, mit denen auch die neueren mikrometrischen Messungen behaftet sind, hervorzuziehen misslich

¹⁾ Durch einen Druckfehler steht hier 289°, was ich in Übereinstimmung mit der Seite 775 derselben Abhandlung berichtigt habe.

sein kann und deren Hervortreten aus dem relativ rohen Schätzungen Herschel's um so weniger zu erwarten war. Unter den Herschelschen Beobachtungen führt Lamont auch einige Andeutungen einer Neigung zwischen den Ebenen der Satellitenbahn und des Ringes an, die er indessen als zu unvollständig betrachtet, um dieselben einer Rechnung zu Grunde zu legen.

In derselben oben citirten Abhandlung setzt Lamont seine eigenen, im Jahre 1836 ausgeführten, Messungen und die Resultate, die er hieraus abgeleitet, auseinander. Wegen der Schwierigkeit und der Unsicherheit, wie er sagt, bei den Distanzmessungen, hat er die Bestimmung nur auf Positionswinkel gegründet. Die Messungen, an Zahl 18, erstrecken sich von April 23 bis Juli 12 und wurden in folgender Weise angestellt. Die Mikrometerfäden wurden etwas mehr als den halben Durchmesser des Saturn von einander entfernt und dann auf der Saturnscheibe symmetrisch eingestellt, so dass gleichzeitig der Satellit in der Mitte der beiden Fäden war, ein Verfahren, welches für die Vermeidung von constanten Fehlern sehr geeignet scheint und im vorliegenden Falle wahrscheinlich auch gewesen ist. Zu den somit erhaltenen Positionswinkeln hat er Correctionen für die Phasen des Planeten angebracht, welche sich indessen als fast unmerkliche zeigten, indem die grösste — 0'.7 erreichte. Unter der Voraussetzung, dass die Ebene der Satellitenbahn mit der des Ringes zusammenfällt, bekommt L. dann folgendes Elementensystem:

für 1836 23 April $8^h 36' 20''.25$ mittl. Pariser Zeit

$$\varepsilon = 159^\circ 53'.1$$

$$\omega = 348^\circ 31'$$

$$e = 27.84 = 0.0087.$$

wo ε die mittlere Länge und ω die Länge des Perisaturniums sind, beide auf dem Ringe und von dessen aufsteigendem Knoten in der Ecliptik gezählt. Die übrigbleibenden Fehler deuten indessen eine Neigung der Satellitenbahn an. Eine Umrechnung der Beobachtungen, wobei auch die Neigung, i , und der Knoten, γ , in Beziehung auf die Ringebene, als Unbekannte eingeführt sind, giebt schliesslich als Endresultat folgendes System:

$$e = 17'.52 \pm 0.0051$$

$$i = 1^\circ 33'.1$$

$$\omega = 357^\circ 39'$$

$$\gamma = 184^\circ 36'$$

Epoche April 23 8^h 36' 20."₂₅ mittlere Pariser Zeit

$$\varepsilon = 158^\circ 31'.0$$

Wir sehen, dass die Einführung der beiden neuen Unbekannten die Elemente nicht unbedeutend verändert hat. Indessen mag der Unterschied bei dem Perisaturnium nicht grösser sein als die Unsicherheit, womit dies Element auf jeden Fall behaftet bleiben würde. Die Aenderung von ε ist aber grösser als man erwarten konnte und macht einen Druckfehler wahrscheinlich. Da der letzte Werth von ε auch an einer andern Stelle der Abhandlung vorkommt, wo von der Ableitung der mittleren Bewegung aus jenem und dem Herschelschen Werthe die Rede ist, so ist es wahrscheinlich, dass der fragliche Fehler, wenn er wirklich da ist, bei dem vorigen Werthe $\varepsilon = 159^\circ 53'.1$ zu suchen ist, welcher im folgenden nicht zur Anwendung kommt. Der Umstand, dass die Reduction der Beobachtungen mittelst der Besselschen Constanten für die Lage des Ringes, welche noch mit Fehlern behaftet sein können, ausgeführt ist, hat hier keine Bedeutung, weil die Beobachtungen selbst auf den Aequator bezogen sind, so dass man durch eine Reduction der Elemente auf den Aequator mit denselben Constanten den eventuell schädlichen Einfluss derselben vermeiden kann.

Durch eine besondere Reihe von Distanzmessungen wurde die halbe grosse Achse der Bahn, von mittlerer Entfernung aus gesehen, als

$$a = 42''.33 \quad (\lg J_0 = 0.97965)$$

gefunden.

In Results of Astronomical Observations at the Cape of Good Hope (London 1847) hat J. Herschel drei Reihen von Beobachtungen der Saturnsatelliten, namentlich in den Jahren 1835, 36, 37 publicirt. Er spricht von diesen selbst in folgender Weise. „I consider, that the observations I have been able to make of these bodies, though confessedly imperfect owing to their extreme faintness in the equatoreal, and to the difficulty of obtaining any measures at all of

position with the 20-feet reflector out of the meridian, may not be wholly without interest as a contribution to their theory.» Die schwächeren Satelliten konnten im Equatoreale nicht gesehen werden, so dass alle Beobachtungen von Tethys mit dem Reflector gemacht worden sind. Ueber diese Beobachtungen mag folgendes angeführt werden. »The positions in these years (1835, 36) are liable to an source of uncertainty — the difficulty, indeed, almost impossibility, of well adjusting the fixed wire to the parallel out of the meridian with an instrument suspended after the manner of the 20-feet reflector. It was endeavoured to be overcome by adjusting the fixed wire to the line of Ansæ. But the mode of doing this was not well considered. The wire once so adjusted was left unaltered during the whole of a set of measures . . . For these reasons I place but little reliance on the 20-feet measures of the two first years in question.» Im folgenden Jahre aber vom 28 April 1837 an wurden die Beobachtungen nach einer veränderten Methode ausgeführt, indem »the positions of the line of Ansæ and of whichever satellite was under measurement were alternately taken between the double wires, and read of, beginning and ending in each set of measures with the Ansæ».

Aus jedem einzelnen Positionswinkel hat Herschel die Länge des Satelliten berechnet und führt in einer Tafel die Differenzen dieser beobachteten Längen von den aus den Elementen berechneten an. Diese Differenzen sind anscheinend sehr gross, es kommen sogar für Tethys die drei einzelnen Differenzen $+15^{\circ}$, -22° , -15° vor. Es folgt aber hieraus nicht, dass die Beobachtungen unanwendbar wären, da, wie H. bemerkt, die Fehler der Positionswinkel, welche in der Nähe der grössten Elongation gemessen sind, sehr vergrössert in der Länge auftreten. Aus den erwähnten Abweichungen leitet H. durch ein graphisches Verfahren folgende Elemente ab:

Excentricity.....	0.04217
Perisaturnium	$53^{\circ} 40'$
Corrected epoch 1837.....	$78^{\circ} 28'.8$

1837 bedeutet hier 1837.0 m. z. von Feldhausen (Herschels Sternwarte, Länge von Greenwich = $22^h 46^m 9.811$ W). Die Längen werden auf dem Ringe und vom *ab*-steigenden Knoten desselben in der Ecliptik gezählt.

Bei der Behandlung der Beobachtungen durch graphische Construction ist es aber sehr schwer, wenn nicht unmöglich, denselben die relativen Gewichte beizulegen, die, entweder der geschätzten Genauigkeit der Messungen oder der Natur der Methode der kleinsten Quadrate gemäss, ihnen zukämen. Zweitens sind bei der fraglichen Ableitung der Elemente sowohl die als schlecht bezeichneten Beobachtungen von 1835—1836 als die relativ besseren von 1837 benutzt worden. Hoffentlich würde man also durch eine neue Berechnung dieser Messungen ein Resultat von etwas grösserem Werthe als das Herschelsche erlangen können. Obgleich also die Beobachtungen nicht besonders gut sind, habe ich diese allerdings nicht sehr mühsame Rechnung für Tethys ausgeführt. Denn eine Bestimmung der mittleren Länge für diese ziemlich entfernte Zeit konnte nicht nur als Controlle von Lamonts Werth desselben Elementes, sondern auch für die Bestimmung sowohl des constanten Gliedes der mittleren Bewegung als eines eventuellen Gliedes von langer Periode nützlich sein.

Ich beschränke mich auf die Beobachtungen nach 1837 April 28, von welchen nur die vom Juni 28, die eine Abweichung von 119° giebt, ausgelassen ist. Die Positionswinkel sind in folgender Tafel enthalten.

1837.	M. T. of Feldhausen.	Position.	N:o.
April 28	12 ^h 29 ^m	96° 27'	2
» 29	12 9	282 13	6
» 30	11 31	104 0	3
Maj 4	11 2	153 50	5
» 4	12 16	167 56	3
» 4	12 45	185 5	3
» 4	13 35	209 49	2
» 5	10 7	343 48	3
» 5	12 1	19 37	2
» 6	11 56	219 5	7
» 7	12 6	57 9	7
» 8	11 48	251 3	4
» 9	13 14	78 50	2

1837.	M. T. of Feldhausen.	Position.	N:o.
Juni 5	10 ^h 0 ^m	113° 56'	3
6	9 23	306 47	6
25	9 47	343 12	3
25	10 26	2 19	2

Für die Berechnung, womit ich nur die Bestimmung der Epochenlänge beabsichtige, übrigens das einzige, was die Beobachtungen leisten können, wende ich folgende Formeln an:

$$\operatorname{tg}(\theta - p) = \frac{\operatorname{tg} q}{\sin l}; \quad d\theta = \frac{\cos^2(\theta - p)}{\cos^2 q \sin l} \cdot dE_0$$

$$q = E_0 - u' + nt.$$

Hier sind θ und p die Positionswinkel des Satelliten und der kleinen Ringachse resp., l der Elevationswinkel der Erde über der Ringebene, u' die Länge der Erde in Beziehung auf die Ringebene, von dem aufsteigenden Knoten in der Ecliptik gezählt, E_0 schliesslich die Epochenlänge des Satelliten, wie u' gezählt. Die Werthe von p , u' , l sind dem Berliner Jahrbuch entnommen. Ausgehend nach H. von $E_0 = 258^\circ 28'.8$ 1837.0 Feldhausen m. z. und mit Anwendung der mittleren Bewegung

$$n = 190^\circ.69812$$

erhielt ich folgende Werthe der Positionswinkel für die für Aberration corrigirten Beobachtungszeiten. Die dritte Columne der Tafel enthält die Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Positionswinkeln. Die vierte Columne giebt die logarithmischen Werthe der Coëfficienten für dE_0 in den Gleichungen für die Bestimmung derselben Grösse an. In der fünften Columne stehen die Gewichte, die den Zahlen der dritten beigelegt wurden, und welche mit den Zahlen der letzten Columne der vorigen Tafel so zusammenhängen, dass eine Beobachtung von

1 oder 2 einzelnen Einstellungen das Gewicht 1,

3 » 4 » » » 2,

mehr als 4 » » » 3

bekommen hat.

1837.	θ	$d\theta$	$\frac{d\theta}{d\varphi}$	Gewicht.
April 28	100° 56'	— 4° 29'	9.6343	1
29	284 39	— 2 26	9.6938	3
30	107 38	— 3 38	9.7471	2
Maj 4	152 46	+ 1 4	0.3540	3
4	178 7	— 10 11	0.4472	2
4	188 52	— 3 47	0.4408	2
4	205 59	+ 3 50	0.3738	1
5	341 7	+ 2 41	0.4027	2
5	21 56	— 2 19	0.3965	1
6	223 8	— 4 3	0.2306	3
7	59 16	— 2 7	0.0129	3
8	246 46	+ 4 17	9.8838	2
9	79 33	— 0 43	9.6523	1
Juni 5	117 19	— 3 23	9.9342	2
6	302 51	+ 3 56	0.0295	3
25	355 50	— 12 38	0.4611	2
25	10 45	— 8 26	0.4507	1

Es kommen in obiger Tafel drei einzelne im Vergleich mit den übrigen sehr grosse Differenzen vor, nämlich

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Maj } 4 & \text{-----} & - 10^{\circ} 11' \\
 \text{Juni } 25 & \text{-----} & - 12^{\circ} 38' \\
 25 & \text{-----} & - 8^{\circ} 26'
 \end{array}$$

Die Beobachtungen sind in allen drei Fällen in der Nähe der Positionswinkel 0° und 180° angestellt, so dass die Grösse der Abweichungen hierdurch ihre Erklärung finden kann. Im ersten Falle kann man an einer Verwechslung der Tethys mit einem anderen Satelliten nicht denken, da an demselben Tage andere Beobachtungen von Tethys vorliegen, welche sehr befriedigend sind. Ausserdem hat Herschel in einem Beispiele von den Originalmessungen, welches gerade auf diesen Tag fällt, die Beobachtung in extenso gegeben. Die einzelnen Einstellungen stimmen gut überein und er sagt über diese Messung: »Perfectly satisfactory measures of Tethys in or very near its inferior conjunction. Quite easy, though

very close to the edge of the ring.» Und da also Abweichungen von dieser Grösse mit einer in gewisser Hinsicht fehlerfreien Beobachtung zusammenstehen können, scheint kein Grund vorzuliegen, irgend eine der drei Differenzen auszuschliessen. Löst man also sämtliche Bedingungsbedingungen nach der Methode der kleinsten Quadrate auf, so erhält man

$$dE_0 = -1^{\circ} 30'.8$$

mit dem wahrscheinlichen Fehler

$$\pm 16'.6.$$

Demnach ist

$$E_0 = 256^{\circ} 58'.0 \quad 1837.0 \text{ Feldhausen m. z.}$$

Im 2: ten Bande der Annales of the astronomical observatory of Harward College (Cambridge 1857) hat der damalige Director der Sternwarte, W. C. Bond, eine Reihe von Messungen im Saturnsysteme, *Observations on the planet Saturn made with the twenty-three foot equatoreal 1847—1857*, veröffentlicht. Die Beobachtungen von Tethys im Jahre 1852 sind in *Astronomical Journal* von G. P. Bond zusammengestellt und berechnet worden. Ich habe auch die Beobachtungen von 1848 und 1849 durchgemustert, da es möglich war, dass mehrere von den in diesen Jahren ausgeführten Satellitenmessungen sich auf Tethys beziehen konnten. Die Untersuchung des Materiales gab an die Hand, dass Tethys an 7 Abenden beobachtet worden war. Die Beobachtungen bestehen in Mikrometermessungen von der Distanz zwischen dem Satelliten und dem Limbus des Saturn und zwar sind die Distanzen in der Richtung des Ringes, der damals seinem Verschwinden nahe war, zu zählen. Es kommen auch einige Messungen von relativen Distanzen der Satelliten vor. Diese habe ich aber nicht benutzt, da die übrigen Satellitenbahnen, mit Ausnahme vielleicht von der des Titan, bisher zu unbekannt sind, um sie einer Elementenbestimmung von Tethys zu Grunde legen zu können. Die betreffenden Beobachtungen finden sich in folgender Tafel. Ich habe den Abständen, wenn das Object, der beigelegten Zeichnungen gemäss, Saturn folgt, das Zeichen —, im entgegengesetzten Falle das Zeichen + gegeben. Die dritte Columnne enthält die Benennung nach dem Beobachtungsjournale des beobachteten Objectes, welches ich als mit Tethys identisch annehme.

1848.	m. s. t.	Object.	Dist. in r.	Dist. in sec.	Number.	Observer.
Okt. 6	9 ^h 6 ^m	4 to Saturns nearest Limb.	+ 3.55	+ 34.80	2	G. P. B.
6	9 44	4 " "	+ 3.56	+ 34.89	2	"
6	11 57	4 " "	+ 3.82	+ 37.45	3	"
7	8 50	c " "	— 3.675	— 36.03	2	"
9	7 28	D " "	— 3.701	— 36.28	2	"
12	8 13	B to Saturns farthest Limb.	+ 4.691	+ 46.00	4	?
20	8 45	5 from Limb of Saturn.	— 4.233	— 41.50	3	W. C. B.
Nov. 22	7 51	β to satellite 2.	+ 2.79	+ 27.35	2	G. P. B.
1849.						
Jan. 12	7 26	5 to Saturns preceding Limb.	+ 0.751	+ 7.41	5	W. C. B.

Bemerkungen.

- 1848 Okt. 6. »Saturn viewed under admirable definition.
 Okt. 7. Brighth moonlight. Definition exceedingly fine.
 Okt. 9. The planet is low, and only tolerably well seen.
 Okt. 20. In the first micrometermeasurements it has not been stated from what limb of Saturn the measurements were taken, but it has usually been the practice to measure from the nearest limb.» Da indessen nach der beige-fügten Figur der Abstand zum nächsten Limbus nur wenig grösser als der Planeten-durchmesser (18") ist, so nehme ich an, dass die Distanz von dem entferneren Limbus gemessen ist, wodurch auch Übereinstimmung herbeigeführt wird.
 Nov. 22. »Saturn beautifully seen». Der Figur gemäss ist β der folgende und von 2 entfernte Limb.
 1849 Jan. 12. »Saturn when first seen was well defined and steady.»

Um jetzt zuerst aus den obigen Zahlen die Distanzen vom Mittelpunkte des Saturns abzuleiten, muss man den Werth des equatorealen Halbmessers des Planeten kennen. Um so viel wie möglich die Fehler, welche bei allen Einstellungen mit Fadenmikrometern an Planetenrändern zu befürchten sind, zu eliminiren, habe ich der Bestimmung dieser Quantität nur diejenigen Messungen zugrundegelegt, welche an demselben Instrumente und von denselben Beobachtern ausgeführt und auch in der erwähnten Publication zu finden sind, nämlich

	Gemessener Diameter.	N:o.	Obs.
1848 Juli 10	17."89	5	W. C. B.
10	17. 49	5	"
11	18. 48	3	"
Okt. 9	21. 83	5	"
20	21. 34	5	"
Nov. 3	19. 77	11	"
23	18. 70	5	G. P. B.
27	18. 77	5	W. C. B.
29	17. 79	5	"
Dec. 18	17. 60	5	"
1850 Nov. 15	19. 50	2	G. P. B.
1852 Febr. 16	16. 74	3	G. P. B.

Theilt man der Beobachtung von 1848 Nov. 3 das Gewicht 2, allen übrigen das Gewicht 1 zu, so ergibt sich mit Anwendung der Entfernungen des Saturn aus dem Berliner Jahrbuch für den equatorealen Halbmesser des Planeten in mittlerer Entfernung $\mathcal{A}_0$ der Werth

$$9''.01 \text{ (} \lg \mathcal{A}_0 = 0.9796 \text{),}$$

der, auf den Beobachtungen (Seite 12) angewandt, folgende Distanzen, $x(B)$, des Satelliten vom Mittelpunkte des Saturn liefert.

	$x(B)$	$x(R)$
1848 Okt. 6	+ 44.81	+ 45.39
6	+ 47.42	+ 46.72
7	— 45.94	— 46.35
9	— 46.18	— 46.77
12	+ 36.13	+ 35.71
20	— 31.71	— 29.98
Nov. 22	+ 18.03	+ 19.72
1849 Jan. 12	+ 15.98	+ 17.75

Die beiden ersten Beobachtungen 1848 Okt. 6 sind hier zu einem Normalorte vereinigt.

Die Theorie, mit der diese Zahlen verglichen werden sollen, kann durch folgende Formeln dargestellt werden.

$$x = a \frac{J_0}{J} \sin q$$

$$q = E_0 + nt - u'$$

$$a = 42''.60 \quad (\lg J_0 = 0.9796)$$

$$E_0 = 328^\circ 43'.4 \quad 1848 \text{ Okt. } 6.0 \text{ Berl. m. z.}$$

$$n = 190^\circ.69812,$$

wo, wie früher, E_0 die Epochenlänge, u' die Länge der Erde in Bezug auf dem Ringe bedeuten, n die mittlere Bewegung in einem mittleren Tage, a der für die mittlere Entfernung, J_0 , des Saturn geltende Halbmesser der Tethysbahn, welche als circular und mit der Ringebene zusammenfallend vorausgesetzt wird. Die Werthe von x welche hieraus folgen, sind in der Columnne, $x(R)$, der vorhergehenden Tafel den beobachteten Werthen zur Seite gestellt. Zur Verbesserung von a und E_0 ergeben sich jetzt folgende Gleichungen, denen ich mit Rücksicht auf die Zahl der Einstellungen sowie die Bemerkungen über die Beobachtungen die beigefügten Gewichte zuertheilt habe.

$dx =$	$\frac{\partial x}{\partial a} da$	$+ \frac{\partial x}{\partial E_0} dE_0$	Gewicht.
$-0.''58 =$	$+ 1.06 da$	$+ 11.''9 dE_0$	3
$+ 0.70$	$+ 1.10$	$- 4.4$	3
$+ 0.41$	$- 1.09$	$- 7.0$	1.5
$+ 0.59$	$- 1.10$	$+ 1.7$	1
$+ 0.42$	$+ 0.84$	$- 30.1$	2
$- 1.73$	$- 0.70$	$- 35.3$	3
$- 1.69$	$+ 0.46$	$+ 39.4$	1.5
$- 1.77$	$+ 0.42$	$+ 36.4$	3

Durch Auflösung derselben erhält man

$$\begin{aligned} dE_0 &= -51's. \\ da &= +0.''149 \end{aligned}$$

mit den wahrscheinlichen Fehlern

$$\begin{aligned} &\pm 28'.4 \\ &\pm 0.''235 \end{aligned}$$

Der wahrscheinliche Fehler einer gemessenen Distanz mit dem Gewichte 1 ist $\pm 0.''s15$. Die resultirenden Elemente sind

$$\begin{aligned} E_0 &= 327^\circ 51'.6 \text{ 1848 Okt. 6.0 Berl. m. z.} \\ a &= 42''.75 \end{aligned}$$

Diese Werthe sind, wie man aus den wahrscheinlichen Fehlern sieht, sehr unsicher. Dass E_0 so unsicher geblieben ist, kommt daher, dass nur die vier letzten Gleichungen für die Bestimmung dieser Quantität geeignet sind. Eine von diesen, die drittletzte, contrastirt auch gegen die übrigen sehr scharf, und das Resultat würde sich bei Ausschliessung dieser Gleichung nicht unbedeutend ändern. Immerhin würde die Correction dE_0 negativ ausfallen, im letzteren Falle sogar etwas vergrössert.

Die Beobachtungen von Tethys bei Harvard College im Jahre 1852 sind, wie gesagt, von G. P. Bond in The Astronomical Journal, Vol. II (pag. 132 und f.) zusammengestellt und berechnet. Wie im Jahre 1848 bestehen sie in Messungen von Distanzen in der Richtung der grösseren Ring-

achse. Ich brauche hier nicht die 13 Beobachtungen zu reproduciren, sondern führe nur die Resultate an:

$$a = 42.''22 \text{ (lg } J_0 = 0.97968),$$

Epoch of conjunction (in Bez. auf der Ringebene und für Aberration corrigirt) 1852 Jan. 29.2099 Cambr. m. z.

Der Rechner hat die wahrscheinlichen Fehler nicht angeführt. Aber die Genauigkeit der Bestimmung mag derjenigen von 1848—49 gleichkommen.

Vor den grossen Beobachtungsreihen von Jacob, die für alle Untersuchungen dieser Art eine Hauptstütze sein müssen, da sie den doppelten Vortheil darbieten, dass sie von der Zeit der modernen Messungen im Saturnsysteme ziemlich entfernt fallen und dessenungeachtet mit den letzteren in Genauigkeit wetteifern können, giebt es noch einige Messungen von Tethys, die ich zu verwerthen suchen werde. Die betreffenden Beobachtungen sind von Secchi mit dem Equatoreal der Sternwarte in Rom im Jahre 1856 ausgeführt und in den A. N. 1056 publicirt worden. Ich entnehme daraus folgende von mir angewandte Daten nebst einigen Bemerkungen von Secchi, die für die Beurtheilung der Zuverlässigkeit der resultirenden Elemente von Nutzen sein können.

1856.	T. sid. di Roma.	Ang. di Posizione.	T. sid. di Roma.	Distanza in parti della vite.	Annotazioni.
Gennaio 27	3 ^h 38 ^m	118°.34	3 ^h 44 ^m	2.0435	Dist. pross. dal centro.
31	5 23	84.17	5 23	3.7824 — <i>r</i>	Dist. dall' orlo opposto. 3 confr.
Febbraio 1	3 2	268.17	3 47	2.5250 + <i>r</i>	Dist. dall' orlo vicino del pianeta. 3 confr.
6	3 35	62.35	3 39	2.5065	Dist. approssimata dal centro.
7	4 39	222.20	4 42	1.1825 + <i>r</i>	Dist. dall' orlo vic. Si aggiunga 1/2 filo = 0.''24.
18	T. m. = 7 0	266.15	...	3.7015 — <i>r</i>	Tempo appross. di 5 ^m ±. La di- rezione è la stessa delle anse.
26	6 13	175.75	6 16	2.0109 — <i>R</i>	Dist. dall' lembo opposto dell' anello.
Marzo 1	6 19.3	112.05	6 18	1.5090 + <i>r</i>	Dist. dall' orlo vicino, ov' è l'ombra.
24	7 34	79.80	7 37	3.4375 — <i>r</i>	Dist. pross. dal lembo opposto.
Aprile 7	8 32	271.05	8 42.5	2.1026 + <i>r</i>	

»Quoique on ait eu grand soin de prendre la direction des angles du centre de la planète, cela s'est trouvé en pratique assez difficile à cause de la confusion, que produit la présence de l'anneau. Les distances ont été prises des bords de la planète lorsqu'on les voulait avec précision, celles qui sont prises du bord opposé sont distinguées avec $-r$ (c'est à dire $-$ le rayon); celles du bord voisin $+r$. Celles du centre sont seulement approchées. Chaque mesure est conclue de 3 angles au moins et de deux distances: pour les plus grandes elongations on a mesuré souvent 5 fois.»

Für die Reduction der Distanzen auf den Mittelpunkt des Saturn ist der von Secchi in den A. N. 1060 gegebene Werth

17."69

für den Durchmesser des Planeten angewandt. Für das Febr. 26 vorkommende R habe ich den Werth der halben kleinen Achse des Ringes, wie er im Berl. Jahrbuch gegeben ist, substituiren müssen.

Der Umstand, dass die Positionswinkel so ziemlich über die ganze Satellitenbahn vertheilt sind, liess die Hoffnung entstehen, dass die Beobachtungen, ungeachtet ihrer geringen Anzahl sowie der von Secchi selbst anerkannten Ungenauigkeit derselben, einen Ausschlag auch für andere Elemente als Epochenlänge und mittlere Entfernung zu geben fähig wären. Ich entschloss mich darum eine vollständige Berechnung derselben vorzunehmen und zwar nach der Besselschen Methode, die weiter unten bei der Behandlung der Wash. Beobachtungen 1875 beschrieben ist und also hier als bekannt vorausgesetzt werden kann. Dies ist auch der Grund, dass ich die in den A. N. 1526 gegebenen Beobachtungen Jan. 28 und März 23 nicht benutzt habe, da in diesen Tagen keine Distanzen gemessen worden sind und die erwähnte Methode auf dieselben also nicht anwendbar ist. Die Beobachtungen von Jan. 24 und April 3 gehören einem anderen Objecte als Tethys an. Noch eine Messung, die von Jan. 26, ist nicht berücksichtigt. Sie giebt relativ sehr grosse Differenzen von der Rechnung, und diese Abweichungen stimmen auch nicht mit denen für benachbarte Positionswinkel überein. Die Annahme von einem Schreib- oder Druckfehler von 5° im Positionswinkel würde diese beiden Erscheinungen beseitigen. Jedenfalls schien der Einführung dieser Beobach-

tung, entweder unverändert oder mit der obigen Correction, das Ausschliessen derselben vorzuziehen zu sein

Nachdem die Positionswinkel auf die Zeiten der Distanzmessungen reducirt waren, wurden die Besselschen Grössen $x = s \sin p$ und $y = s \cos p$ gebildet. Sie sind in folgender Tafel gegeben,

1856.	Beob.		Rechn.	
	x	y	x	y
Jan. 27	+ 28."06	— 14."55	+ 28."89	— 15."53
31	+ 48. 10	+ 4. 91	+ 48. 83	+ 4. 30
Febr. 1	— 49. 05	— 3. 88	— 48. 79	— 2. 59
6	+ 34. 23	+ 18. 23	+ 32. 58	+ 19. 20
7	— 19. 01	— 21. 35	— 20. 09	— 21. 57
18	— 47. 32	— 3. 43	— 47. 52	— 3. 39
26	+ 1. 91	— 21. 22	+ 1. 10	— 21. 14
Mars 1	+ 30. 54	— 12. 47	+ 31. 39	— 12. 92
24	+ 43. 24	+ 7. 92	+ 42. 70	+ 9. 36
April 7	— 41. 57	+ 0. 25	— 42. 01	+ 1. 79

welche auch die aus den angenommenen Elementen berechneten Werthe derselben Quantitäten enthält. Diese Elemente sind

$$E = 319^{\circ} 16' \text{ 1856 Jan. 0.0 Berl. m.z.}$$

$$i = 28 \text{ } 10$$

$$\Omega = 167 \text{ } 37$$

$$\pi = 90 \text{ } 0$$

$$e = 0.0085$$

$$a = 42."80$$

$$n = 190^{\circ}.69812,$$

woraus die auf den Aequator bezogenen

$$i' = 7^{\circ} \text{ } 8.'3$$

$$\Omega' = 125 \text{ } 27.2$$

wie

$$\omega = 43^{\circ} \text{ } 23.'0$$

$$m = e \sin \pi = 0.0085$$

$$n = e \cos \pi = 0.0000$$

folgen. Es entstehen hieraus auch die Werthe der partiellen Differential-Coëfficienten von x und y in Bezug auf die Elemente, welche mit den aus der obigen Tafel entnommenen Werthen von Δx und Δy folgende Gleichungen zur Verbesserung der Elemente bilden. Sie sind, um übersichtlicher zu werden, nach wachsenden Positionsvinkeln, wie die erste Columnne zeigt, geordnet.

Aus x .

p	$= 62^\circ$	$+ 1''.65$	$= -35.6$	dE	$- 3.5$	di	$+ 11.9$	$\text{Sin } i$	$d\Omega$	$- 35.2$	dm	$+ 70.5$	dn	$+ 32.6$	$\frac{da}{a}$
80	$+ 0.54$	$- 12.3$	$- 1.5$	$+ 7.1$	$- 18.8$	$+ 45.8$	$+ 42.7$								
84	$- 0.73$	$- 0.4$	$- 0.4$	$+ 4.7$	$- 7.8$	$+ 48.2$	$+ 48.8$								
112	$- 0.85$	$+ 34.4$	$+ 2.9$	$- 5.5$	$+ 11.7$	$+ 74.3$	$+ 31.4$								
117	$- 0.83$	$+ 40.0$	$+ 3.4$	$- 6.9$	$+ 11.5$	$+ 83.8$	$+ 28.9$								
175	$+ 0.81$	$+ 47.1$	$+ 4.2$	$- 11.2$	$- 13.3$	$+ 92.7$	$+ 1.1$								
222	$+ 1.08$	$+ 44.4$	$+ 4.1$	$- 12.5$	$- 31.4$	$+ 84.8$	$- 20.1$								
265	$- 0.26$	$- 2.7$	0.0	$- 3.7$	$- 4.3$	$+ 48.8$	$- 48.8$								
266	$+ 0.20$	$- 0.7$	$+ 0.2$	$- 4.0$	$- 6.4$	$+ 47.1$	$- 47.5$								
270	$+ 0.44$	$- 11.2$	$- 0.7$	$- 1.2$	$+ 5.4$	$+ 47.3$	$- 42.0$								

Aus y .

p	$= 62^\circ$	$- 0''.97$	$= + 11.9$	dE	$+ 34.0$	di	$- 29.8$	$\text{Sin } i$	$d\Omega$	$+ 30.5$	dm	$+ 0.0$	dn	$+ 19.2$	$\frac{da}{a}$
80	$- 1.44$	$+ 18.5$	$+ 14.2$	$- 41.6$	$+ 38.1$	$+ 3.9$	$+ 9.4$								
84	$+ 0.61$	$+ 22.3$	$+ 3.6$	$- 48.9$	$+ 43.5$	$+ 10.5$	$+ 4.3$								
112	$+ 0.45$	$+ 17.3$	$- 28.3$	$- 34.0$	$+ 30.0$	$+ 21.5$	$- 12.9$								
117	$+ 0.98$	$+ 16.6$	$- 33.0$	$- 32.5$	$+ 29.3$	$+ 21.8$	$- 15.5$								
175	$- 0.08$	$+ 4.4$	$- 41.1$	$- 4.6$	$+ 20.0$	$+ 11.4$	$- 21.1$								
222	$+ 0.22$	$- 5.6$	$- 39.9$	$+ 16.8$	$+ 24.3$	$+ 2.5$	$- 21.6$								
265	$- 1.29$	$- 22.4$	$- 0.2$	$+ 49.2$	$+ 42.4$	$+ 11.7$	$- 2.6$								
266	$- 0.04$	$- 21.7$	$- 1.7$	$+ 47.8$	$+ 42.4$	$+ 10.8$	$- 3.4$								
270	$- 1.54$	$- 20.0$	$+ 6.7$	$+ 43.2$	$+ 38.0$	$+ 13.5$	$+ 1.8$								

Auf diese Weise tritt das Gesetz, wenn auch im vorliegenden Falle nicht gerade sehr deutlich, in den Differenzen Δx und Δy hervor. Giebt man allen Gleichungen dasselbe Gewicht, so führen sie auf folgende Normalgleichungen,

$$\begin{array}{rcccccccc}
+ 11505 dE + & 427 di - & 8494 \sin i d\Omega + & 650 dm + & 10562 dn + & 468 \frac{da}{a} = + & 13.1 \\
+ & 427 & + 6659 & - 220 & - 1661 & - 854 & + 3360 & - 115.7 \\
- & 8494 & - 220 & + 14702 & - 679 & - 2571 & + 499 & - 108.5 \\
+ & 650 & - 1661 & - 679 & + 15237 & - 2392 & - 1571 & - 251.5 \\
+ & 10562 & - 854 & - 2571 & - 2392 & + 46191 & + 2283 & + 152.5 \\
+ & 468 & + 3360 & + 499 & - 1571 & + 2283 & + 15711 & - 98.4
\end{array}$$

deren Auflösung

$$\begin{aligned}
dE &= - 37.1 \\
di &= - 66.6 \\
d\Omega &= - 103.5 \\
dm &= - 0.0186 \\
dn &= + 0.0039 \\
da &= - 0.''165
\end{aligned}$$

ergiebt. Sodann erhält man folgende Elemente mit ihren wahrscheinlichen Fehlern

$$\begin{aligned}
E &= 318^{\circ} 38.9 \pm 23.0 \text{ 1856 Jan. 0.0 Berl. m.z.} \\
i &= 27 \quad 3.4 \pm 22.4 \\
\Omega &= 165 \quad 53.5 \pm 38.6 \\
m &= - 0.0101 \pm 0.0038 \quad \pi = 290^{\circ}.9 \pm 14^{\circ}.6 \\
n &= + 0.0039 \pm 0.0026 \quad e = 0.0108 \pm 0.0037 \\
a &= 42.''64 \quad \pm 0.''17.
\end{aligned}$$

Der wahrscheinliche Fehler einer der Quantitäten x, y ergibt sich gleich $\pm 0.''46$.

Die Grösse der wahrscheinlichen Fehler erweckt kein Zutrauen zu den erhaltenen Correctionen und die obigen Elemente können kaum als sicherer angesehen werden als die, von denen man ausgegangen ist. Jedenfalls haben wir durch die Berechnung für die ersteren die Eigenschaft eines empirischen Resultates gewonnen.

Ich werde jetzt die Elementenbestimmungen von Jacob anführen. Sie sind in »Measures of Saturn and his Satellites. By Capitain W. S. Jacob, Director of the Madras Observatory«, angegeben¹⁾. Die erste Beobachtungsreihe von Tethys enthält nicht weniger als 49 Beobachtungen, die zweite 32. Bei der Ableitung der Elemente sieht Jacob die Neigung

¹⁾ Memoirs of the Royal astronomical Society, vol. XXVIII London 1860.

und den Knoten der Bahn als bekannt an, indem er die letztere mit der Ebene des Ringes zusammenfallend annimmt. Die Zahlen, die er für die genannten Elemente giebt, sind also ganz werthlos. Dagegen scheinen die übrigen grosses Zutrauen zu verdienen. Zwar hat er die wahrscheinlichen Fehler seiner Bestimmungen nicht angegeben, aber der Umstand, dass er die Elemente theils aus den Positionswinkeln allein (A), theils auch mit Hinzuziehung der Distanzen (B) abgeleitet hat, giebt eine Möglichkeit, durch Vergleichung von diesen beiden Resultaten, eine Vorstellung über die Genauigkeit derselben zu erhalten. So erhält er für Tethys aus der ersten Reihe

	A	B
1857 Jan. 0.0 Green. m.t. ε	$= 282^{\circ} 2'.3$	$282^{\circ} 2'.3$
π	$= 107 \quad 24$	$107 \quad 40$
e	$= 0.01118$	0.01061
a	$=$	$42.''47,$

wo ε und π Epochenlänge und Länge des Perisaturniums in Bez. auf die Ecliptik als Fundamentelebene, e die Excentricität und a die halbe grosse Achse in mittlerer Entfernung des Saturn sind. Er bemerkt hierzu: »The orbits of these 3 inner satellites (Rhea, Dione, Tethys) would appear to be sensibly circular, the amount of deviation detected barely exceeding that of error of observation in the case of Tethys and falling short of it in those of the other two.»

Aus der zweiten Beobachtungsreihe, die er in Folge dessen, dass sowohl seine eigene Gesundheit als das Wetter diesmal nicht so gut waren, als etwas ungenauer als die vorige bezeichnet, hat er ebenso folgende Elemente erhalten.

	A	B
1858 Jan. 0.0 Green. m.t. ε	$= 47^{\circ} 17'.2$	$47^{\circ} 15'.2$
π	$= 162 \quad 5$	$158 \quad 47$
e	$= 0.00757$	0.00874
a	$=$	$42.''919$

Die Elemente, die Jacob als resultirende ansieht, sind die unter B stehenden. Die erstere Epochenlänge, reducirt auf 1858 Jan. 0.0, findet er gleich $46^{\circ} 41'9$ und die »beträchtliche« Differenz zwischen diesem Werthe und dem letzten sieht er als eine Folge von Störungen langer Periode an.

Nun folgen die Beobachtungen in Washington 1874 und 1875. Ich werde die letzteren zuerst erwähnen, weil sie die ersten waren, bei welchen ich die Besselsche Rechnungs- methode (A. N. 193) zur Anwendung gebracht habe.

Die Grössen x und y , die Bessel als beobachtet voraus- setzt, sind nichts anders als was gewöhnlich mit den Bezei- chungen $A \cos \delta$ und $A \delta$ ausgedrückt wird, wo sich die Differenzen auf den Satelliten und den Mittelpunkt des Sa- turn beziehen. Wenn die Rektascensions- und Deklinations- differenzen nicht direct gemessen sind, werden die x und y aus Positionswinkel und Distanz durch die Formeln

$$x = s \sin p$$

$$y = s \cos p$$

gefunden. Es handelt sich jetzt darum, solche Ausdrücke von x und y zu finden, durch die die letzteren aus den Elementen der Satellitenbahn berechnet werden können. Zu diesem Zweck kann man zum Beispiel in folgender Weise verfahren.

Man erinnert sich des folgenden einfachen Satzes. Wenn P ein auf einem grössten Kreise einer Kugel beweg- licher Punct ist, dessen Coordinate in Bezug auf diesen grössten Kreis durch φ und σ bezeichnet sind, so lässt sich der Cosinus des Abstandes von P zu einem beliebigen Puncte Q der Kugel durch den Ausdruck

$$\sin a \sin (A + \varphi)$$

darstellen, wo $90^\circ - A$ und $90^\circ - a$ die Coordinaten des Punctes Q in Bezug auf denselben grössten Kreis sind. Wenn u der Abstand des Satelliten von einem festen Puncte seiner Bahn ist, so lässt sich also der Radiusvector auf beliebigen, durch den Mittelpunkt des Saturn gehenden Richtungen, durch Multiplication mit Ausdrücken von der Form

$$\sin b \sin (B + u)$$

projiciren. Dabei sind $90^\circ - B$ und $90^\circ - b$ die Coordinaten der fraglichen Richtung in Bezug auf die Satellitenbahn und den festen Punct derselben. Es seien jetzt

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \text{ die Rektascension} \\ \delta \text{ die Deklination} \\ A \text{ der Abstand von der Erde} \\ A_0 \text{ der mittlere Abstand von der Erde} \end{array} \right\} \text{ des Saturn}$$

- a die halbe grosse Achse der Satellitenbahn in Secunden
 ausgedrückt und von der Entfernung J_0 gesehen
 n die mittlere Bewegung
 e die Excentricität
 π die Länge des Perisaturniums
 Ω die Länge des aufsteigenden Knotens
 i die Neigung der Bahn
 E die Epochenlänge des Satelliten
 $\left. \begin{matrix} \pi \\ \Omega \\ i \\ E \end{matrix} \right\}$ in Bezug auf die
 Ecliptik
 $\left. \begin{matrix} \pi \\ \Omega' \\ i' \\ E' \end{matrix} \right\}$ die letzten Elemente in Bezug auf den Aeqvator
 ω der Abstand zwischen Aeqvator und Ecliptik, auf der
 Satellitenbahn gezählt.
 u der Abstand des Satelliten vom aufsteigenden Knoten im
 Aequator.
 r der Radiusvector des Satelliten.

Die beiden letzten Grössen finden sich aus den Elementen durch die bekannten Formeln

$$\begin{aligned}
 \varepsilon - e \sin \varepsilon &= E + nt - \pi \\
 \operatorname{tg} \frac{1}{2} (u - \pi' + \Omega') &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon \\
 r &= 1 - e \cos \varepsilon,
 \end{aligned}$$

wobei r in a als Einheit ausgedrückt ist. Jetzt denken wir uns r in einer durch den Mittelpunkt des Saturn gelegten und auf der Richtung Erde—Saturn senkrechten Ebene projectirt und zwar auf zwei Geraden, deren eine dem Aequator parallel und deren andere auf der ersteren senkrecht steht. Diese Projectionen können nach dem, was vorausgeschickt ist, durch

$$\begin{aligned}
 r \sin f' \sin (F + u) \\
 r \sin g \sin (G + u)
 \end{aligned}$$

bezeichnet werden. Stellen wir uns vor, dass wir diese projectirten Grössen von der Erde aus sehen, und drücken wir r in a als Einheit aus, so bekommen dieselben die Werthe

$$\begin{aligned}
 \xi &= r \frac{J_0}{J} a \sin f' \sin (F + u) \sin 1'' \\
 \eta &= r \frac{J_0}{J} a \sin g \sin (G + u) \sin 1''
 \end{aligned} \tag{1}$$

Wenn jetzt unser Auge den Saturn und den Satelliten ganz orthographisch projeciren würde, so würden ξ und η den früher mit x und y bezeichneten Grössen gleichkommen. Da dies aber nicht der Fall ist, sondern da wir das System unter einem, wenn auch sehr kleinen, Winkel sehen, so müssen die wirklichen Projectionen in einem gewissen Verhältnisse kleiner erscheinen. Setzen wir daher nach Bessel

$$x = \frac{\xi}{1 + \frac{r}{\Delta}},$$

$$y = \frac{\eta}{1 + \frac{r}{\Delta}},$$

so ergibt sich leicht für die kleine Grösse ζ der Ausdruck

$$\frac{r \cos \psi}{\Delta}$$

wo ψ der Winkel zwischen r und der Richtung Erde-Saturn ist. Wir können also den Formeln (1) analog

$$\zeta = r a \frac{J_0}{\Delta} \sin h \sin (H + u) \sin 1'' \quad (1^a)$$

setzen. Dieses ζ ist für alle Beobachtungen von Tethys fast unmerklich.

Jede der drei auf einander senkrechten Richtungen, die durch f, F, g, G, h, H in Bezug auf die Bahnebene festgestellt sind, bestimmt mit den Polen des Aequators und der Bahnebene ein sphärisches Dreieck. Die Auflöning von diesen Dreiecken giebt uns die Relationen, die zur Bestimmung von f, F etc. dienen, nämlich

$$\sin f \sin F = -\sin (\alpha - \Omega')$$

$$\sin f \cos F = +\cos i \cos (\alpha - \Omega')$$

$$\cos f = -\sin i \cos (\alpha - \Omega')$$

$$\sin g \sin G = -\sin \delta \cos (\alpha - \Omega')$$

$$\sin g \cos G = \cos \delta \sin i' - \sin \delta \cos i' \sin (\alpha - \Omega')$$

$$\cos g = \cos \delta \cos i' + \sin \delta \sin i' \sin (\alpha - \Omega')$$

$$\sin h \sin H = \cos \delta \cos (\alpha - \Omega')$$

$$\sin h \cos H = \sin \delta \sin i' + \cos \delta \cos i' \sin (\alpha - \Omega')$$

$$\cos h = \sin \delta \cos i' - \cos \delta \sin i' \sin (\alpha - \Omega')$$

Setzt man

$$f' = \frac{A_0}{A} a \sin f$$

$$g' = \frac{A_0}{A} a \sin g$$

$$h' = \frac{A_0}{A} a \sin h,$$

so hat man statt (1) und (1^a)

$$\xi = r f' \sin (F + u) \sin 1''$$

$$\eta = r g' \sin (G + u) \sin 1''$$

$$\zeta = r h' \sin (H + u) \sin 1'',$$

und wenn man x und y in Secunden ausdrückt,

$$x = \frac{1}{\sin 1''} \cdot \frac{\xi}{1 + \zeta}$$

$$y = \frac{1}{\sin 1''} \cdot \frac{\eta}{1 + \zeta}.$$

Hiermit sind x und y in den Elementen gegeben. Die Gleichungen zur Verbesserung der Elemente durch Beobachtungen bekommen die Form

$$\left. \begin{matrix} Ax \\ Ay \end{matrix} \right\} = AdE + Bdi + C \sin i d\Omega + Lde + Med\pi + N \frac{da}{a},$$

wo die Coëfficienten sich durch Differentiation von x und y , unter der Voraussetzung, dass ζ hierbei keinen merklichen Einfluss ausübt, folgendermaassen ergeben.

Aus x

$$A = \frac{f'}{\sqrt{1-e^2}} [\cos (F + u) + e \cos (F + \pi' - \Omega)]$$

$$B = f'' r \sin (u - \omega)$$

$$C = -\operatorname{tg} \frac{1}{2} i f' r \cos (F + u) - f'' r \cos (u - \omega)$$

$$L = -\frac{f'}{\sqrt{1-e^2}} \left[\left(\sqrt{1-e^2} \cos \varepsilon + \frac{e}{1 + \sqrt{1-e^2}} \right) \cos (F + u) + \cos (F + \pi' - \Omega) \right]$$

$$M = \frac{f'}{\sqrt{1-e^2}} [\sin \varepsilon \cos (F + u) - \sqrt{1-e^2} \sin (F + \pi' - \Omega)]$$

$$N = \frac{1}{\sin 1''} \xi$$

Aus y

dieselben Formeln, nur dass f , F , ξ mit g , G , η vertauscht werden. Hier ist

$$f'' = \frac{J_0}{J} a \cos f$$

$$g'' = \frac{J_0}{J} a \cos g$$

In den obigen Formeln liegt die von Bessel gegebene Theorie. Ich gehe jetzt zur Anwendung derselben auf die Wash. Beobachtungen 1875 über.

Die Beobachtungen, die den Washingtoner Annalen 1875, Vol. XXII, entnommen wurden, sind folgende.

Date 1875.	Wash. mean time.	Posit. angle.	Num- ber of Meas.	Wash. mean time.	Dist.	Num- ber of Meas.
Juni 20	14 ^h 10 ^m	93. ^o 6	4	14 ^h 54 ^m	4.370	3
24	14 56	104.2	4	15 9	3.480	3
26	14 49	112.9	4	15 34	2.094	3
30	15 10	236.2	3	15 29	1.499	3
Juli 12	15 0	287.7	4	15 10	2.958	4
14	14 48	303.6	4	14 58	1.658	3
24	13 9	92.9	4	13 16	4.463	3
26	13 7	97.3	4	13 26	4.527	4
27	13 29	280.6	4	13 37	4.346	4
29	13 11	284.4	4	13 27	3.551	4
Aug. 5	11 55	239.6	4	12 5	1.610	4
8	11 19	83.0	4	11 26	3.208	4
25	11 14	84.1	4	11 23	3.328	4
26	11 3	266.7	4	11 10	3.886	4
30	11 32	278.1	4	11 39	4.548	2
31	10 27	98.5	4	10 34	4.441	4
Sept. 1	10 30	281.0	4	10 36	4.255	3
2	10 35	105.2	4	10 44	3.763	3
3	9 56	285.9	4	10 1	3.544	3
6	10 32	145.2	4	10 39	1.360	3
8	10 43	228.8	4	10 51	1.393	3
9	9 36	51.2	4	9 43	1.419	4

Date 1875.	Wash. mean time.	Posit. angle.	Num- ber of Meas.	Wash. mean time.	Dist.	Num- ber of Meas.
Sept. 13	9 ^h 21 ^m	86.°9	4	9 ^h 37 ^m	3.844	1
14	8 43	268.5	4	9 18	4.267	2
19	8 58	102.3	4	9 5	4.055	3
29	10 41	266.8	4	10 55	3.899	2
Okt. 2	10 23	95.4	3	10 28	4.436	2
17	7 47	83.1	4	7 54	3.246	4
22	8 26	279.4	4	8 32	4.248	3

Hierzu ist zu bemerken, dass an Juni 20 Tehys und Dione verwechselt zu sein scheinen, so dass die hier gegebene Beobachtung in dem Wash. Journale unter Dione zu suchen ist. Die Distanzen sind mit dem Werthe $r = 9''.948$ in Sekunden zu verwandeln. Ausser der Messung von Sept. 13, die von Holden herrührt, sind alle Beobachtungen von Hall ausgeführt. Zur Reduction der Positionswinkel auf die Zeiten, für welche die Distanzen gelten, habe ich aus den oben gegebenen Formeln die folgende abgeleitet

$$\frac{dp}{dt} = \frac{f'g' \cdot \sin(G - F)}{s^2} \frac{dv}{dt},$$

bei deren Anwendung ich für s die gemessene Distanz und für $\frac{dv}{dt}$ mit Vernachlässigung der Excentricität die mittlere Bewegung substituirt habe. Nachdem die somit gefundenen Correctionen angebracht waren, ergaben sich die nachstehenden Werte von x und y , denen die aus den angenommenen Elementen berechneten zur Seite gestellt sind.

Datum. 1875.	Beobachtung.		Rechnung.		$B - R.$	
	x	y	x	y	Δx	Δy
Juni 20	+ 43."23	- 3."52	+ 43."32	- 3."69	+ 0."01	+ 0."17
24	+ 33. 48	- 8. 80	+ 33. 80	- 8. 52	- 0. 32	- 0. 28
26	+ 18. 44	- 9. 69	+ 19. 17	- 9. 19	- 0. 73	- 0. 50
30	- 12. 95	- 7. 40	- 12. 24	- 6. 63	- 0. 71	- 0. 77

Datum 1875.	Beobachtung.		Rechnung.		$B - R.$	
	x	y	x	y	Δx	Δy
Juli 12	— 27."94	+ 9."23	— 27."57	+ 9."36	— 0."37	— 0".13
14	— 13. 43	+ 9. 58	— 13. 75	+ 9. 39	+ 0. 32	+ 0. 19
24	+ 44. 33	— 2. 39	+ 44. 14	— 2. 64	+ 0. 19	+ 0. 25
26	+ 44. 62	— 6. 11	+ 44. 61	— 6. 19	+ 0. 01	+ 0. 08
27	— 42. 46	+ 8. 11	— 42. 42	+ 7. 45	— 0. 04	+ 0. 66
29	— 34. 11	+ 9. 20	— 34. 14	+ 9. 32	+ 0. 03	— 0. 12
Aug. 5	— 14. 11	— 7. 57	— 13. 01	— 7. 52	— 1. 10	— 0. 05
8	+ 31. 70	+ 3. 68	+ 31. 61	+ 3. 30	+ 0. 09	+ 0. 38
25	+ 32. 96	+ 3. 13	+ 33. 07	+ 3. 09	— 0. 11	+ 0. 04
26	— 38. 60	— 2. 03	— 37. 45	— 1. 76	— 1. 15	— 0. 27
30	— 44. 77	+ 6. 54	— 44. 65	+ 6. 54	— 0. 12	0. 00
31	+ 43. 67	— 6. 70	+ 43. 83	— 7. 20	— 0. 16	+ 0. 50
Sept. 1	— 41. 52	+ 8. 22	— 41. 33	+ 8. 34	— 0. 19	— 0. 12
2	+ 36. 06	— 10. 06	+ 35. 79	— 9. 85	+ 0. 27	— 0. 21
3	— 33. 87	+ 9. 80	— 33. 90	+ 10. 00	+ 0. 03	— 0. 20
6	+ 7. 26	— 11. 41	+ 7. 86	— 10. 64	— 0. 60	— 0. 77
8	— 10. 80	— 8. 68	— 10. 09	— 8. 71	— 0. 71	+ 0. 03
9	+ 11. 33	+ 8. 43	+ 11. 24	+ 8. 33	+ 0. 09	+ 0. 10
13	+ 38. 21	+ 1. 62	+ 37. 72	+ 1. 36	+ 0. 49	+ 0. 26
14	— 42. 45	— 0. 26	— 40. 73	— 0. 12	— 1. 72	— 0. 14
19	+ 39. 38	— 8. 76	+ 39. 62	— 8. 89	— 0. 24	+ 0. 13
29	— 38. 75	— 1. 81	— 37. 78	— 1. 37	— 0. 97	— 0. 44
Okt. 2	+ 43. 92	— 4. 27	+ 43. 92	— 4. 38	0. 00	+ 0. 11
17	+ 32. 08	+ 3. 66	+ 31. 88	+ 3. 17	+ 0. 20	+ 0. 49
22	— 41. 67	+ 7. 04	— 41. 27	+ 6. 90	— 0. 40	+ 0. 14

Die Elemente, von denen ich ausgegangen bin, sind folgende.

$$E = 255^{\circ} 24' \text{ 1875 Juni 20.0 Berl. m. z.}$$

$$\left. \begin{array}{l} i = 27 \text{ } 10 \\ \Omega = 166 \text{ } 15 \\ \pi = 335 \text{ } 45 \end{array} \right\} \text{Ecl. 1875.0}$$

$$e = 0.01$$

$$a = 42."54$$

$$\mu = 190'.69770$$

$$\left. \begin{aligned} i' &= 6^{\circ} 56'' \\ \Omega' &= 115^{\circ} 53' \\ \omega &= 51^{\circ} 37' \end{aligned} \right\} \text{Aequ. 1875.0}$$

Der Werth von π wurde durch eine vorläufige Berechnung erhalten. Dabei ist folgende Formel angewandt worden,

$$\mu \sin u + r \cos u = \frac{1 - r}{r},$$

wo die Grössen

$$\begin{aligned} \mu &= e \sin (\pi' - \Omega') \\ r &= e \cos (\pi' - \Omega') \end{aligned}$$

als Unbekannte betrachtet wurden. Die r und u ergaben sich aus den Besselschen Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin 1''} \xi &= r f' \sin (F + u) \\ \frac{1}{\sin 1''} \eta &= r g' \sin (G + u) \end{aligned}$$

nach dem die links stehenden Grössen mit den beobachteten x und y ersetzt waren. Die somit bestimmten Gleichungen wurden nach der Methode der kleinsten Quadrate in Bezug auf μ und r gelöst ohne Rücksicht auf die kleine Ungenauigkeit, dass $\sin u$ und $\cos u$, die ebenfalls wie r auf den *Beobachtungen* beruhen, als *berechnete* Coëfficienten angewandt wurden, ein Umstand, der auch dadurch an Gewicht verliert, dass die Fehler von u in $\sin u$ und $\cos u$ verringert auftreten. Aus den so erhaltenen μ und r ergaben sich dann e und π' da Ω' als bekannt vorausgesetzt wurde. Ebenso ist der Werth von E aus den Beobachtungen vorläufig gefunden. Die übrigen Elemente sind nach Jacob und Meyer angesetzt.

Die in der obigen Tafel gegebenen Differenzen Δx und Δy sind nicht grösser, als dass man sie ganz den Beobachtungsfehlern zuschreiben konnte. Wenn man sie aber nach wachsenden Positionswinkel anordnet, so zeigen sie ein bestimmtes Gesetz an. Die Überführung desselben in Elementencorrectionen geschieht durch folgende Gleichungen.

Aus α .
$$p = 51^{\circ} + 0''.09 = + 44''.2 \, dE + 0''.8 \, di - 5''.7 \, \text{Sin} \, i \, d\Omega - 88''.0 \, ed\pi - 9''.1 \, de + 11''.2 \, \frac{da}{a}$$

83	+ 0. 09	+ 33. 1	- 1. 7	- 3. 5	- 72. 4	+ 9. 3	+ 31. 6
83	+ 0. 20	+ 29. 1	- 1. 8	- 2. 6	- 65. 8	+ 5. 0	+ 31. 9
84	- 0. 11	+ 31. 5	- 2. 0	- 3. 1	- 70. 3	+ 8. 2	+ 33. 1
87	+ 0. 49	+ 24. 6	- 2. 7	- 1. 8	- 61. 4	+ 6. 4	+ 37. 7
93	+ 0. 19	+ 10. 1	- 3. 9	+ 0. 2	- 48. 4	+ 1. 2	+ 44. 1
94	+ 0. 01	+ 4. 1	- 4. 1	+ 0. 9	- 44. 0	- 2. 6	+ 43. 3
95	0. 00	+ 1. 6	- 4. 3	+ 1. 8	- 43. 0	- 9. 7	+ 43. 9
97	+ 0. 01	- 8. 0	- 4. 7	+ 2. 8	- 44. 7	- 16. 2	+ 44. 6
99	- 0. 16	- 11. 8	- 4. 8	+ 3. 6	- 44. 9	- 22. 0	+ 43. 8
102	- 0. 24	- 20. 6	- 4. 8	+ 4. 8	- 48. 5	- 31. 0	+ 39. 6
104	- 0. 32	- 27. 7	- 4. 2	+ 5. 2	- 57. 8	- 30. 4	+ 33. 8
105	+ 0. 27	- 27. 8	- 4. 7	+ 5. 6	- 56. 2	- 35. 4	+ 35. 8
113	- 0. 73	- 39. 2	- 3. 2	+ 6. 4	- 76. 0	- 28. 8	+ 19. 2
145	- 0. 60	- 44. 2	- 2. 7	+ 6. 8	- 85. 0	- 27. 5	+ 7. 9
229	- 0. 71	- 43. 7	- 0. 9	+ 6. 0	- 88. 0	- 10. 3	- 10. 1
236	- 0. 71	- 42. 1	- 0. 3	+ 5. 8	- 85. 6	- 1. 0	- 12. 2
240	- 1. 10	- 43. 3	- 0. 4	+ 5. 9	- 88. 2	- 3. 9	- 13. 0
267	- 1. 15	- 25. 9	+ 2. 6	+ 2. 3	- 63. 8	+ 8. 4	- 37. 4
267	- 0. 97	- 23. 0	+ 2. 7	+ 1. 7	- 59. 5	+ 5. 6	- 37. 8
269	- 1. 72	- 19. 3	+ 3. 2	+ 1. 1	- 56. 0	+ 4. 9	- 40. 7
278	- 0. 12	+ 9. 2	+ 4. 7	- 3. 1	- 44. 4	- 18. 6	- 44. 7
279	- 0. 40	+ 11. 4	+ 4. 6	- 3. 5	- 41. 6	- 21. 8	- 41. 3
281	- 0. 04	+ 16. 5	+ 4. 7	- 3. 8	- 48. 0	- 23. 6	- 42. 4
281	- 0. 19	+ 19. 2	+ 4. 8	- 4. 4	- 48. 5	- 28. 2	- 41. 3
284	+ 0. 03	+ 30. 3	+ 4. 4	- 5. 5	- 60. 5	- 33. 4	- 34. 1
286	+ 0. 03	+ 30. 4	+ 4. 6	- 5. 7	- 59. 1	- 36. 1	- 33. 9
288	- 0. 37	+ 35. 7	+ 3. 9	- 6. 0	- 68. 5	- 32. 8	- 27. 6
304	+ 0. 32	+ 43. 2	+ 2. 8	- 6. 6	- 82. 7	- 26. 5	- 13. 8

Aus γ .
$$= 51^{\circ} + 0''.10 = - 7''.1 \, dE + 6''.8 \, di + 44''.8 \, \text{Sin} \, i \, d\Omega + 14''.0 \, de\pi - 8''.8 \, de + 8''.3 \, \frac{da}{a}$$

83	+ 0. 38	- 9. 9	- 17. 3	+ 43. 2	+ 14. 6	- 13. 6	+ 3. 3
83	+ 0. 49	- 10. 5	- 16. 4	+ 40. 7	+ 15. 7	- 14. 5	+ 3. 2
84	+ 0. 04	- 10. 4	- 18. 3	+ 42. 7	+ 15. 2	- 14. 3	+ 3. 1
87	+ 0. 26	- 11. 0	- 24. 2	+ 38. 9	+ 14. 8	- 16. 2	+ 1. 4
93	+ 0. 25	- 9. 6	- 37. 4	+ 26. 1	+ 9. 8	- 16. 7	- 2. 6

$p = 94^{\circ} + 0.''17 = - 8.''3 dE + 39.''2 di + 19.''1 \sin i d\Omega + 7.4 ed\pi - 15.''1 de - 3.''7 \frac{da}{a}$							
95 + 0.11	- 10.2	- 38.4	+ 21.3	+ 9.9	- 18.3	- 4.4	
97 + 0.08	- 7.9	- 43.9	+ 9.4	+ 6.1	- 15.7	- 6.2	
99 + 0.50	- 8.2	- 44.1	+ 7.7	+ 6.4	- 16.7	- 7.2	
102 + 0.13	- 6.7	- 43.7	- 1.4	+ 5.4	- 15.1	- 8.9	
104 - 0.28	- 3.3	- 40.5	- 14.8	+ 3.8	- 10.0	- 8.5	
105 - 0.21	- 4.8	- 43.0	- 10.6	+ 4.8	- 16.2	- 9.9	
113 - 0.50	+ 0.5	- 30.6	- 31.2	+ 6.0	- 7.0	- 9.2	
145 - 0.77	+ 2.9	- 24.5	- 38.1	+ 9.5	- 7.4	- 10.6	
229 + 0.03	+ 6.7	- 8.3	- 45.5	+ 13.6	- 8.6	- 8.7	
236 - 0.77	+ 6.4	- 2.4	- 45.4	+ 12.0	- 8.2	- 6.6	
240 - 0.05	+ 7.0	- 3.7	- 46.7	+ 13.3	- 8.9	- 7.5	
267 - 0.27	+ 10.6	+ 23.8	- 40.6	+ 14.4	- 15.7	- 1.8	
267 - 0.44	+ 10.9	+ 23.9	- 38.9	+ 14.8	- 16.3	- 1.4	
269 - 0.14	+ 11.0	+ 28.5	- 36.4	+ 13.8	- 17.2	- 0.1	
278 0.00	+ 8.6	+ 43.5	- 11.1	+ 6.8	- 17.2	+ 6.5	
279 + 0.14	+ 8.3	+ 41.0	- 9.3	+ 6.7	- 16.7	+ 6.9	
281 + 0.66	+ 6.6	+ 44.5	- 1.5	+ 4.8	- 14.5	+ 7.5	
281 - 0.12	+ 6.9	+ 44.3	- 0.6	+ 5.2	- 15.4	+ 8.3	
284 - 0.12	+ 3.6	+ 41.5	+ 14.6	+ 4.2	- 11.1	+ 9.3	
286 - 0.20	+ 4.2	+ 41.9	+ 12.8	+ 4.7	- 12.3	+ 10.0	
288 - 0.13	+ 1.6	+ 37.0	+ 22.9	+ 4.7	- 8.8	+ 9.4	
304 + 0.19	- 1.8	+ 26.7	+ 35.1	+ 7.4	- 6.9	+ 9.4	

deren Behandlung nach der Methode der kleinsten Quadrate
 nachstehende Normalgleichungen liefert.

+ 237.488 =	+ 25968 dE	+ 6558 di	+ 8638 Sin i dΩ	+ 2048 edπ	+ 405 de	- 1228 $\frac{da}{a}$
- 30.375	+ 6558	+ 32238	- 3721	- 586	+ 1581	+ 1892
+ 155.803	- 3721	- 3721	+ 26986	- 555	- 670	+ 4838
+ 541.572	+ 2048	- 586	- 555	+ 121668	+ 20219	- 3243
+ 50.088	+ 405	- 670	- 670	+ 20219	+ 17945	+ 1472
+ 235.925	- 1228	+ 4838	+ 4838	- 3243	+ 1472	+ 35549

Hieraus ergibt sich

$$dE = + 43.''15$$

$$di = - 9.42$$

$$d\Omega = + 62.38$$

$$d\pi = + 41^{\circ}.4$$

$$de = -0.0031303$$

$$da = + 0.''284,$$

wovon

$$E = 256^{\circ} 7'.15 \text{ 1875 Juni 20.0 Berl. m. z.}$$

$$i = 27 \quad 0.58$$

$$\Omega = 167 \quad 17.38$$

$$\pi = 17.^{\circ}1$$

$$e = 0.0068697$$

$$a = 42.''824.$$

Wenn man in den Ausdrücken $\sin i d\Omega$ und $ed\pi$ für i und e die Mittel zwischen den Anfangswerthen und den corrigirten einführt, so erhält man

$$d\Omega = + 62'.2$$

$$d\pi = + 33^{\circ}.7,$$

wovon

$$\Omega = 167^{\circ} 17'.21$$

$$\pi = 9^{\circ}.5.$$

Die Correctionen sind alle mit Ausnahme von $d\pi$ von annembahrer Grösse und könnten eine wahre Annäherung mit Anwendung der Besselschen Theorie verbürgen. Aber die Correction $d\pi$ ist unerwartet gross ausgefallen, und es scheint unmöglich die Glieder, welche von den zweiten und höheren Potenzen dieser Grösse abhängen, zu vernachlässigen. Wenn man den gefundenen Werth von $ed\pi$ mit dem Mittel von den Anfangs- und Endwerthen von e dividirt, hat man sich zwar vor dem grössten Einfluss der Quantitäten zweiter Ordnung geschützt. Da es aber möglich ist dass noch die Glieder dritter Ordnung einwirken, habe ich eine Transformation gemacht, indem ich statt e und π die Quantitäten

$$m = e \sin \pi$$

$$n = e \cos \pi$$

als Veränderliche eingeführt. Nennt man die Coëfficienten von dm und dn in den Entwicklungen von Δx und Δy L und M, so hängen diese mit den Coëfficienten für $ed\pi$ und e folgendermaassen zusammen.

$$L = L \cos \pi + M \sin \pi$$

$$M = -L \sin \pi + M \cos \pi$$

Statt dieser Ausdrücke kann man auch in unserem Falle folgende approximative Formen benutzen.

$$L = -f \{ \cos (F + u) \cos (\varepsilon + \pi) + \cos (F - \Omega' + \pi' - \pi) \}$$

$$M = +f \{ \cos (F + u) \sin (\varepsilon + \pi) - \sin (F - \Omega' + \pi' - \pi) \}$$

Auf dem so eingeschlagenen Wege kommt man zu den Normalgleichungen

$$\begin{array}{rcccccccc} + 237.488 & = & + 25968 & dE & + & 6558 & di & - & 8638 \sin i & d\Omega & + & 1701 & dm & + & 1210 & dn & - & 1228 & \frac{da}{a} \\ - 30.375 & & + & 6558 & & + & 32238 & & - & 3721 & & - & 978 & & + & 745 & & + & 1892 \\ + 155.803 & & - & 8638 & & - & 3721 & & + & 26986 & & - & 231 & & - & 838 & & + & 4838 \\ + 473.012 & & + & 1701 & & - & 978 & & - & 231 & & + & 89027 & & + & 52240 & & - & 3561 \\ + 268.558 & & + & 1210 & & + & 745 & & - & 838 & & + & 52240 & & + & 50585 & & + & 10 \\ + 235.925 & & - & 1228 & & + & 1892 & & + & 4838 & & - & 3561 & & + & 10 & & + & 35549, \end{array}$$

durch deren Lösung man erhält

$$dE = + 43'.15$$

$$di = - 9.42$$

$$d\Omega = + 62.21$$

$$dm = + 0.0058055$$

$$dn = - 0.0008078$$

$$da = + 0.''284.$$

Die Elemente werden also die folgenden, zu denen ihre wahrscheinlichen Fehler zugefügt sind.

$$E = 256^\circ 7'.2 \pm 4'.41 \text{ 1875 Juni 20.0 Berl. m.z.}$$

$$i = 27 \quad 0.6 \pm 3.79$$

$$\Omega = 167 \quad 17.2 \pm 9.43$$

$$m = 0.0016983 \pm 0.00103 \quad \pi = 11.^\circ 5 \pm 7.1$$

$$n = 0.0083098 \pm 0.00136 \quad e = 0.008482 \pm 0.001352$$

$$a = 42.''82 \pm 0.''044$$

Der wahrscheinliche Fehler einer der Grössen x und y ist $\pm 0.''191$. Die π und e haben also durch diese Berechnungsart andere Werthe als früher erhalten, während die übrigen Elemente unverändert geblieben sind. Das letzte war auch vor auszusehen, da die Excentricität so gering ist, dass sie sogar als eine kleine Grösse zu betrachten ist. Wie aus dem

wahrscheinlichen Fehler hervorgeht, ist die Bestimmung von π sehr unsicher. Von einem anderen Gesichtspunkte aus gesehen, bekommt man über die Leistungsfähigkeit der Beobachtungen in Bezug auf dieses Element eine Vorstellung durch die grosse Differenz ($35^{\circ}.8$) zwischen dem Endwerthe und dem durch die vorläufige Rechnung erhaltenen Werthe dieser Quantität.

In ganz ähnlicher Weise wurden die folgenden, aus den Wash. Annalen 1874 entnommenen Beobachtungen behandelt.

1874.	Wash. mean time.	Posit. angle.	N:o.	Wash. mean time.	Distance.	N:o.
Aug. 29	9 ^h 50 ^m	299. ^o 0	2	10 ^h 27 ^m	2 ^r .561	2
31	9 28	320.1	3	10 8	1.663	2
Sept. 2	9 13	13.5	2	9 47	1.377	2
3	8 42	213.8	2	9 19	1.639	2
22	8 32	251.7 *)	3	9 8	2.773	2
23	8 19	77.9	3	9 0	3.230	3
24	9 4	266.6	3	9 43	3.959	2
25	7 59	87.4	2	9 0	4.012	2
26	8 35	272.3	3	9 41	4.397 *)	2
Okt. 1	8 19	109.8	3	9 17	3.330	2
3	7 17	116.4	2	8 23	2.602	2
13	7 38	270.5	3	8 14	4.100	2
14	7 34	93.9	2	8 6	4.212	2
15	7 30	277.4	2	7 54	4.257	2
17	7 18	283.8	4	8 15	3.860	3
20	6 38	114.3	4	7 6	3.019	3
23	6 46	330.9	5	6 56	1.446	3

Statt der mit *) bezeichneten Zahlen hat das Original, wahrscheinlich durch Schreibfehler im Beobachtungsjournale, die mit der Berechnung unvereinbaren Werthe $221^{\circ}.7$ und $4^{\circ}.897$. Der Werth von r ist $9''.948$. Die drei letzten Beobachtungen sind von Holden, alle übrigen von Newcomb ausgeführt. Die Reductionen der Positionswinkel auf die Zeiten der Distanzmessungen ergaben sich für diese Beobachtungsreihe im allgemeinen als sehr gross; am Sept. 2 erreicht die Correction sogar den Werth $+14^{\circ}.5$, was darum erwähnt

wird, dass dieser Umstand für die Elementenbestimmung nicht ganz unschädlich gewesen sein mag.

Die beobachteten, wie die aus den Elementen

$$E = 160^{\circ} 18' 1874 \text{ Aug. } 29.0 \text{ Berl. m.z.}$$

$$i = 27 \quad 1$$

$$\Omega = 167 \quad 17$$

$$\pi = 348 \quad 0 \quad m = -0.001767$$

$$e = 0.0085 \quad n = +0.008314$$

$$a = 42.''_{82}$$

$$n = 190^{\circ}.69770$$

$$i' = 6^{\circ} 28.'_1$$

$$\Omega' = 117 \quad 26.0$$

$$\omega = 51 \quad 3.0$$

berechneten Werthe von x und y fanden sich folgendermaassen.

1874.	Beobachtung.		Rechnung.		$B - R.$	
	x	y	x	y	Δx	Δy
Aug. 29	— 21.''22	+ 14.''08	— 22.''61	+ 13.''94	+ 1.''39	+ 0.''14
31	— 7. 75	+ 14. 62	— 8. 60	+ 14. 03	+ 0. 85	+ 0. 59
Sept. 2	+ 6. 43	+ 12. 10	+ 6. 13	+ 12. 59	+ 0. 30	— 0. 49
3	— 11. 51	— 11. 54	— 12. 27	— 11. 78	+ 0. 76	+ 0. 24
22	— 26. 69	— 6. 96	— 27. 11	— 7. 82	+ 0. 42	+ 0. 86
23	+ 31. 73	+ 5. 04	+ 32. 07	+ 5. 56	— 0. 34	— 0. 52
24	— 39. 38	— 1. 00	— 39. 40	— 1. 87	+ 0. 02	+ 0. 87
25	+ 39. 90	— 0. 16	+ 40. 53	+ 0. 40	— 0. 63	— 0. 56
26	— 43. 58	+ 3. 79	— 43. 61	+ 3. 26	+ 0. 03	+ 0. 53
Okt. 1	+ 30. 31	— 13. 38	+ 29. 86	— 12. 76	+ 0. 45	— 0. 62
3	+ 21. 50	— 14. 42	+ 21. 25	— 13. 80	+ 0. 25	— 0. 62
13	— 40. 76	+ 1. 51	— 41. 20	+ 0. 88	+ 0. 44	+ 0. 63
14	+ 41. 73	— 3. 82	+ 41. 97	— 3. 43	— 0. 24	— 0. 39
15	— 41. 90	+ 6. 16	— 42. 41	+ 5. 21	+ 0. 51	+ 0. 95
17	— 36. 80	+ 10. 96	— 37. 54	+ 9. 87	+ 0. 74	+ 1. 09
20	+ 26. 87	— 13. 41	+ 25. 87	— 12. 88	+ 1. 00	— 0. 53
23	— 6. 24	+ 12. 96	— 6. 52	+ 13. 24	+ 0. 28	— 0. 28

Hiernach erhielt ich die Verbesserungsleichungen

Aus x .

$p =$	28°	$+ 0.''30$	$= + 44.''8$	dE	$+ 2.''4$	di	$- 6.''3$	$\text{Sin } i$	$d\Omega$	$- 62.''6$	dm	$- 63.''6$	dn	$+ 6.''1$	$\frac{da}{a}$
	81	$- 0.34$	$+ 29.7$	$- 0.8$	$- 2.3$					$- 57.2$		$- 35.3$		$+ 32.1$	
	90	$- 0.63$	$+ 15.7$	$- 2.5$	$+ 0.4$					$- 42.1$		$- 28.8$		$+ 40.5$	
	95	$- 0.24$	$+ 3.5$	$- 3.4$	$+ 2.3$					$- 29.4$		$- 31.0$		$+ 42.0$	
	113	$+ 0.45$	$- 31.1$	$- 4.7$	$+ 6.8$					$- 24.6$		$- 64.6$		$+ 29.9$	
	116	$+ 1.00$	$- 32.8$	$- 4.5$	$+ 6.8$					$- 26.8$		$- 65.5$		$+ 25.9$	
	124	$+ 0.25$	$- 37.3$	$- 4.4$	$+ 7.2$					$- 33.2$		$- 70.3$		$+ 21.3$	
	225	$+ 0.76$	$- 42.9$	$- 1.8$	$+ 5.9$					$- 64.5$		$- 58.4$		$- 12.3$	
	255	$+ 0.42$	$- 34.4$	0.0	$+ 3.5$					$- 61.5$		$- 41.4$		$- 27.1$	
	268	$+ 0.02$	$- 19.2$	$+ 2.1$	$+ 0.3$					$- 46.7$		$- 29.3$		$- 39.4$	
	272	$+ 0.44$	$- 10.9$	$+ 2.8$	$- 1.1$					$- 36.8$		$- 28.3$		$- 41.2$	
	275	$+ 0.03$	$- 4.0$	$+ 3.5$	$- 2.3$					$- 31.1$		$- 31.3$		$- 43.6$	
	278	$+ 0.51$	$+ 2.7$	$+ 3.8$	$- 3.3$					$- 24.9$		$- 34.5$		$- 42.4$	
	286	$+ 0.74$	$+ 19.5$	$+ 4.6$	$- 5.5$					$- 19.2$		$- 50.4$		$- 37.5$	
	304	$+ 1.39$	$+ 39.3$	$+ 4.5$	$- 7.4$					$- 36.8$		$- 72.4$		$- 22.6$	
	332	$+ 0.85$	$+ 44.5$	$+ 3.6$	$- 7.2$					$- 51.3$		$- 72.5$		$- 8.6$	
	334	$+ 0.28$	$+ 41.5$	$+ 3.4$	$- 6.7$					$- 47.5$		$- 67.7$		$- 6.5$	

Aus y .

$p =$	28°	$- 0.''49$	$= - 6.''6$	dE	$+ 20.''6$	di	$+ 38.''8$	$\text{Sin } i$	$d\Omega$	$+ 18.''3$	dm	$- 0.''8$	dn	$+ 12.''6$	$\frac{da}{a}$
	81	$- 0.52$	$- 13.1$	$- 7.1$	$+ 43.8$					$+ 26.3$		$- 4.2$		$+ 5.6$	
	90	$- 0.56$	$- 14.2$	$- 21.6$	$+ 38.6$					$+ 26.6$		$- 8.9$		$+ 0.4$	
	95	$- 0.39$	$- 13.4$	$- 29.6$	$+ 30.2$					$+ 23.9$		$- 12.3$		$- 3.4$	
	113	$- 0.62$	$- 6.0$	$- 40.7$	$- 4.6$					$+ 13.7$		$- 10.7$		$- 12.8$	
	116	$- 0.53$	$- 4.5$	$- 38.8$	$- 8.6$					$+ 12.7$		$- 9.2$		$- 12.9$	
	124	$- 0.62$	$- 2.7$	$- 38.0$	$- 15.1$					$+ 12.8$		$- 7.3$		$- 13.8$	
	225	$+ 0.24$	$+ 8.1$	$- 15.6$	$- 42.3$					$+ 20.1$		$- 0.5$		$- 11.8$	
	255	$+ 0.86$	$+ 11.8$	0.0	$- 45.0$					$+ 24.8$		$- 2.4$		$- 7.8$	
	268	$+ 0.87$	$+ 13.9$	$+ 18.2$	$- 41.2$					$+ 26.8$		$- 8.1$		$- 1.9$	
	272	$+ 0.63$	$+ 13.7$	$+ 24.3$	$- 35.9$					$+ 25.4$		$- 10.4$		$+ 0.9$	
	275	$+ 0.53$	$+ 13.7$	$+ 30.3$	$- 32.1$					$+ 23.8$		$- 9.7$		$+ 3.3$	
	278	$+ 0.95$	$+ 12.6$	$+ 33.2$	$- 26.2$					$+ 22.2$		$- 13.4$		$+ 5.2$	
	286	$+ 1.09$	$+ 9.4$	$+ 39.5$	$- 9.9$					$+ 16.5$		$- 13.5$		$+ 9.9$	
	304	$+ 0.14$	$+ 2.6$	$+ 39.5$	$- 16.3$					$+ 12.7$		$- 7.8$		$+ 13.9$	
	332	$+ 0.59$	$- 2.1$	$+ 31.6$	$+ 29.1$					$+ 14.3$		$- 3.3$		$+ 14.0$	
	334	$- 0.28$	$- 2.4$	$+ 28.9$	$+ 27.6$					$+ 13.9$		$- 2.7$		$+ 13.2$	

die Normalgleichungen

+ 97.111	= + 17442	dE	+ 3874	di	- 6964	Sin i dΩ	- 1653	dm	- 2956	dn	- 78 $\frac{da}{a}$
+ 232.019	= + 3874		+ 14758		- 1237		+ 1223		- 880		+ 2643
- 215.574	- 6964		- 1237	+ 17080			- 737	+ 1159		+ 3698	
- 186.335	- 1653		+ 1223	- 737			+ 39020	+ 32427		+ 3485	
- 427.755	- 2956		- 880	+ 1159			+ 32427	+ 48279		+ 2429	
- 102.162	- 78		+ 2643	+ 3698			+ 3485	+ 2429		+ 17984	

und schliesslich die Elementen-Correctionen

$$\begin{aligned}
 dE &= -13.2 \\
 di &= +54.1 \\
 d\Omega &= -84.4 \\
 dm &= +0.003841 \\
 dn &= -0.010871 \\
 da &= -0.215
 \end{aligned}$$

und die Elemente

$$\begin{aligned}
 E &= 160^\circ 4'.8 \pm 6.61 \text{ 1874 Aug. 29.0 Berl. m.z.} \\
 i &= 27^\circ 55.1' \pm 6.67 \\
 \Omega &= 165^\circ 52.6' \pm 14.46 \\
 m &= +0.002074 \pm 0.001740 \quad \pi = 141^\circ.0 \pm 29^\circ.0 \\
 n &= -0.002557 \pm 0.001553 \quad e = 0.00329 \pm 0.00163 \\
 a &= 42''.60 \pm 0''.075
 \end{aligned}$$

Der grosse Unterschied (153°) zwischen dem erhaltenen Werthe von π und dem anfangs angenommenen, welcher durch eine vorläufige Bestimmung der jährlichen Veränderung dieses Elements gefunden wurde, deutet an, dass die erhaltenen π und e weniger mit der wirklichen Ellipticität der Bahn als mit einem constanten persönlichen Fehler des Beobachters zusammenhängen. Dafür spricht auch der Werth 0.003 für die Excentricität, welche nach den übrigen Bestimmungen einen Werth von ungefähr 0.008 erhalten muss. Es müssen demnach die gefundenen Werthe mit Vorsicht aufgenommen werden. In der That schliesst auch schon die Grösse der wahrscheinlichen Fehler von π und e jedes Zutrauen zu diesen Quantitäten aus.

Ich führe noch zwei Elementensysteme an. Das erste ist aus der Abhandlung »Recherches sur Saturne, ses anneaux et ses Satellites d'après les observations faites à l'équatorial

de dix pouces d'ouverture de l'Observatoire de Genève pendant l'opposition de 1880 par M. Wilhelm Meyer:¹⁾ entnommen und lautet folgendermaassen

$$E = 1880 \text{ Okt. } 27.0$$

$$L_0 = 300^\circ 2' 11''$$

$$a = 42.''48$$

$$e = 0.006847$$

$$\pi = 204^\circ 6' 45''$$

$$\Omega = 113^\circ 57' 33''$$

$$i = 7^\circ 0' 40'',$$

wo E die Epoche nach Green. Zeit ist, L_0 die mittlere Länge des Satelliten im Augenblicke, wo das Licht zum Abstände 9.53890 von Saturn gekommen ist. Die Längen wie die Neigung sind auf den Aeqvator bezogen. Der wahrscheinliche Fehler einer der in der Richtung der Ringachsen gemessenen Coordinaten x und y ist $\pm 0''.475$. Übrigens wird dieser letzten Elementenbestimmung vom Verfasser ein kleineres Gewicht beigelegt als der im Jahre 1881 von ihm ausgeführten und in der Abhandlung »Le Système de Saturne«²⁾ publicirten, woraus ich folgendes Elementensystem unverändert entnehme.

$$E = 1881 \text{ Nov. } 0.0 \text{ Green m. z.}$$

$$L_0 = 117^\circ 52' 14'' \pm 0^\circ 5' 19''$$

$$a = 42.''7514 \pm 0.0639$$

$$e = 0.00853 \pm 0.00175$$

$$\pi = 223^\circ 47' 49'' \pm 4^\circ 37' 53''$$

$$n = 169^\circ 42' 58'' \pm 0^\circ 13' 12''$$

$$i = 27^\circ 24' 18'' \pm 0^\circ 5' 3''$$

Zur Erleichterung der Vergleichung dieser Elemente mit den früher angeführten, sind die von Meyer gegebenen mittleren Fehler in wahrscheinliche verwandelt worden. L_0 ist für Aberration corrigirt, n und i auf die Ecliptik bezogen. Um die Länge L_0 auf die Ecliptik zu reduciren subtrahire ich $0^\circ 59'.2$, wodurch nach der früheren Bezeichnung

$$E = 116^\circ 53'.0$$

¹⁾ Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève, Tome XXVII, Seconde Partie.

²⁾ Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève, Tome XXIX, N:o 1.

wird. Für die nähere Kenntniss der Beobachtungen weise ich auf die erwähnten Abhandlungen hin.

Auf das angegebene beschränke ich das Material für die empirische Untersuchung der Elemente und ihrer etwai- gen Veränderungen, zu der ich jetzt übergehe.

Zuerst werde ich das Element E , welches mit der grössten relativen Genauigkeit aus den Beobachtungen hervortritt, ins Auge fassen. Für die Untersuchung desselben wurden zuerst alle Epochenlängen auf die Ecliptik bezogen, wobei in den Fällen, wo die Länge ursprünglich in Bezug auf den Ring festgestellt war, folgende von Bessel gegebene Werthe des Knotens und der Neigung des letzteren mit der beweglichen Ecliptik angewandt wurden.

$$\omega = 166^{\circ} 53' 8.''9 + 46.''462 (t - 1800)$$

$$i = 28\ 10\ 44.7 - 0.350 (t - 1800)$$

Die ecliptischen Längen wurden dann auf die mittlere Zeit der Beobachtungen zurückgeführt und zwar mit Anwendung der mittleren Bewegung, welche bei der Berechnung jeder Länge benutzt worden war. Zuletzt wurden alle diese Längen mit Anwendung der mittleren Bewegung

$$190^{\circ}.69812$$

auf 1875.0 Berl. m. z. reducirt. Die so erhaltenen Zahlen sind in der Columnne E_1 der folgenden, übrigens ohne Erklärung deutlichen Tafel gegeben.

Angenommene Epoche der Bestimmung.	1875.0 E_1 .	Wahrschein- licher Fehler der Bestim- mung.	Auctorität.
1789.77	45° 35'	—	W. Herschel.
1836.38	46 43.2	—	Lamont.
1837.36	46 13	± 16.6	J. Herschel.
1848.80	44 45	± 28.4	) G. P. und W. P. Bond.
1852.09	45 33	—	
1856.14	43 36.1	± 23.0	Secchi.

Angenommene Epoche der Bestimmung.	1875.0 E_1 .	Wahrschein- licher Fehler der Bestim- mung.	Auctorität.
1857.01	44° 22.'8	—	} Jacob.
1857.96	44 47. 4	—	
1874.74	46 38. 7	$\pm 6.'61$	Newcomb.
1875.63	46 43. 5	$\pm 4. 41$	Hall.
1880.76	47 11. 0	—	} Meyer.
1881.79	47 16. 8	$\pm 5. 32'$	

Man sieht hieraus, dass die Werthe von 1836 und 1837 sich gegenseitig stützen, dass die abweichenden Resultate von Jacob mit dem Secchischen in Einklang stehen, während der Gang der vier letzten Zahlen für die Zuverlässigkeit derselben bürgt. Eine Aufzeichnung oder sogar nur ein Blick auf die Zahlen E_1 überzeugt uns sogleich, dass wir es hier mit einem periodischen Gliede der Länge zu thun haben und dass E_1 durch eine Form

$$E_0 + A \cdot \sin \mu (t - t_0)$$

vorgestellt werden kann. Da aber die für die Reduction auf 1875.0 angewandte mittlere Bewegung noch einer Correction bedürftig sein kann, habe ich ein entsprechendes Glied hinzugefügt und

$$E_1 = E_0 + (t - 1875) \nu + A \sin \mu (t - t_0)$$

gesetzt. Für die Verbesserung der Constanten E_0 , ν , A , μ , t_0 , dient dann die Gleichung

$$dE_1 = dE_0 + (t - 1875) d\nu + \frac{dA}{A} \cdot A \sin \mu (t - t_0) + \\ + (t - t_0) \cos \mu (t - t_0) \cdot A d\mu - A \cos \mu (t - t_0) d(\mu t_0).$$

Die Auffindung von passenden Anfangswerthen der Constanten für die Benutzung dieser Formel war nicht ganz ohne Schwierigkeit, da der Werth von μ für nur kleine Veränderungen in ν sehr empfindlich war, und anderseits eine ziemlich grosse Annäherung von μ erheischt wurde, um die Vernachlässigung von den zweiten und höheren Potenzen von $d\mu \cdot (t - t_0)$ in der Entwicklung von $\sin \mu (t - t_0)$ für entferntere Beobachtungsepochen zuzulassen. Nach eini-

gen Versuchen wurden folgende für den Zweck taugliche Werthe gefunden.

$$\begin{aligned} E_0 &= 45^\circ 57' \\ \nu &= + 1'.10 \\ A &= 73' \\ \mu &= 7''.82 \\ t_0 &= 1870.4 \end{aligned}$$

Hier ist ν die Correction der mittleren Bewegung in einem Jahre. Die mit diesen Constanten berechneten Werthe von E_1 bedürfen nach der letzten Tafel noch der Correctionen, die auf der linken Seite folgender Verbesserungsgleichungen stehen.

1789.77	— 1'.3	=	+ 1	dE_0	— 85.2	$d\nu$	+ 73.0	$\frac{dA}{.1}$	— 0.3	$Ad\mu$	— 0.3	μdt_0
1836.38	+ 15.9		1		— 38.6		+ 72.8		+ 2.4		+ 5.2	
1837.36	— 14.0		1		— 37.6		+ 71.4		+ 6.8		+ 15.2	
1850.45	+ 8.2		1		— 24.6		— 29.2		+ 18.3		+ 66.8	
1856.14	— 52.4		1		— 18.9		— 67.8		+ 5.3		+ 27.1	
1857.01	— 3.8		1		— 18.0		— 70.6		+ 3.4		+ 18.6	
1857.96	+ 21.5		1		— 17.0		— 72.4		+ 1.5		+ 8.9	
1874.74	+ 1.6		1		— 0.3		+ 40.4		+ 3.6		— 60.8	
1875.63	— 1.8		1		+ 0.6		+ 47.5		+ 3.9		— 55.4	
1880.76	— 4.5		1		+ 5.8		+ 72.2		+ 1.6		— 11.0	
1881.79	— 0.7		1		+ 6.8		+ 73.0		+ 0.2		— 1.1	

Die 1848 und 1852 bestimmten Werthe von E_1 sind, wie man sieht, zu einem Mittel vereinigt.

Es entsteht jetzt die Frage, mit welchen relativen Gewichten diese Gleichungen zu combiniren sind. Durch Annahme der Gewichte umgekehrt proportionel den Quadraten der wahrscheinlichen Fehler würde man erstens in Bezug auf die Fälle, wo keine wahrscheinlichen Fehler angeführt sind, noch in Unsicherheit bleiben, zweitens einigen Werthen fast allen Einfluss auf die Bestimmung rauben. In der That sind Beobachtungen von so verschiedener Genauigkeit nicht als vergleichbar anzusehen und mit einander nicht zu verbinden. Aber der Daten sind hier zu wenige, um dieselben gruppenweise behandeln zu können. Andererseits spielen die ganz unbekannten constanten Fehler hier eine Hauptrolle. Diese

können aber in Bestimmungen von sehr verschiedenen wahrscheinlichen Fehlern von derselben Ordnung sein, was wieder für die Verbindung solcher Werthe spricht. Bei den Beobachtungen im Saturnsysteme ist aber nach der Erfahrung der Beobachter die Wahrscheinlichkeit für constante Fehler grösser als je. Ausserdem sind die vorliegenden Werthe mit verschiedenen Instrumenten und auf verschiedene Beobachtungsarten gefunden worden. Ich habe daher allen Gleichungen dasselbe Gewicht beigelegt, um so mehr, da jeder Leitfaden für ein anderes Verfahren fehlt. Die so entstehenden Normalgleichungen

$$\begin{array}{rcccccc}
 + 11.0 & dE_0 & - & 227.0 & dv & + & 210.3 & \frac{dA}{A} & + & 46.7 & A d\mu & + & 13.2 & \mu dt_0 & = & - & 31.3 \\
 - 227.0 & & + & 11818.5 & & - & 6281.4 & & - & 947.9 & & - & 3474.5 & & + & 482.6 \\
 + 210.3 & & - & 6281.4 & & + & 45832.7 & & - & 143.2 & & - & 10265.9 & & + & 1691.1 \\
 + 46.7 & & - & 947.9 & & - & 143.2 & & + & 459.8 & & + & 1106.8 & & - & 173.3 \\
 + 13.2 & & - & 3474.5 & & - & 10265.9 & & + & 1106.8 & & + & 12767.9 & & - & 828.5
 \end{array}$$

geben folgende Correctionen.

$$\begin{aligned}
 dE_0 &= -5'.40 \\
 dv &= -0'.034 \\
 dA &= +3'.35 \\
 d\mu &= +0''.185 \\
 dt_0 &= -0''.382
 \end{aligned}$$

Es werden somit

$$\begin{aligned}
 E_0 &= 45^\circ 51'.6 \\
 v &= +1'.07 \\
 A &= 76'.3 \\
 \mu &= 8''.00 \\
 t_0 &= 1870.0
 \end{aligned}$$

und wenn

$$\mu T = 360^\circ$$

gesetzt wird,

$$T = 45 \text{ Jahre.}$$

Berechnet man mit diesen Constanten wieder die E_1 , so ergeben sich folgende übrigbleibende Fehler.

	dE_1
1789	— 0.4
1836	+ 16.3
1837	— 14.0
1850	+ 13.7
1856	— 44.1
1857	+ 4.8
1857	+ 29.8
1874	+ 0.6
1875	— 2.7
1880	— 2.9
1881	+ 1.8

Der wahrscheinliche Fehler eines einzelnen E_1 wird also ± 16.7 , die wahrscheinlichen Fehler der bestimmten Constanten folgende.

von E_0	± 9.17
ν	± 0.224
A	± 6.90
μ	± 0.98
t_0	± 1.58
T	± 5.5

Der grösste Theil von diesen wahrscheinlichen Fehlern hängt von der Abweichung 1856 (Secchi) ab. Die Unsicherheit ist, wie man sieht, nicht gering und wird nur durch die Beobachtungen der künftigen Decennien gehoben werden können. Jedenfalls scheinen durch die obige Untersuchung sowohl das Vorhandensein des periodischen Gliedes, als auch die ersten Annäherungswerthe der bezüglichlichen Constanten festgestellt zu sein. Der gefundene Werth von ν giebt für die mittlere tägliche Bewegung die Zahl

$$190.698169 \pm 0.000010,$$

was mit dem von Herrn Baillaud in Comptes Rendus 26 Janvier 1885 gegebenen und aus den Toulouser-Beobachtungen abgeleiteten Werthe

$$190.69818$$

in bester Übereinstimmung steht. Für Präcession corrigirt wird die mittlere Bewegung

$$190.698131.$$

Noch beschränkter als in Bezug auf die Epochenlänge ist das Material, welches zur Untersuchung der Ellipticität der Bahn dienen soll. Es stehen uns zu diesem Zweck nur folgende Daten zur Verfügung.

Epoehe.	π	Wahrsch. Fehler.	e	Wahrsch. Fehler.
1836.38	165°	—	0.0051	—
1856.14	[291]	± 14.6	[0.0108]	± 0.0037
1857.01	108	—	0.0106	—
1857.96	159	—	0.0087	—
1874.74	[141]	± 29.0	[0.0033]	± 0.0016
1875.63	12	± 7.1	0.0085	± 0.0013
1880.76	203	—	0.0068	—
1881.79	224	± 4.6	0.0085	± 0.0018

Die eingeklammerten Zahlen sind schon als a priori unsicher bezeichnet. Es wird sich auch zeigen, dass sie sich mit den aus den übrigen abgeleiteten Resultaten nicht vereinigen lassen. Was die übrigen Zahlen der obigen Tafel betrifft, so ist ihre Genauigkeit nur für 1875 und 1881 durch wahrscheinliche Fehler direct gegeben und zwar ist diese Genauigkeit nicht gross, was sowohl von der Geringfügigkeit der zu bestimmenden Excentricität herrühren mag als von dem Umstande, dass die während einer Beobachtungsreihe nicht wenig veränderliche Länge des Perisaturniums bei der Unkenntniss jener Bewegung als eine Constante aus den Beobachtungen abgeleitet wurde. Die übrigen Bestimmungen, wenigstens die von Jacob und Lamont, scheinen indessen ein gewisses Zutrauen zu verdienen und, nach der Übereinstimmung der übrigen Elemente zu urtheilen, ein ungefähr gleiches Gewicht wie die von 1875 und 1881 zu haben. Ich werde sie alle als brauchbar voraussetzen; und wenn ich so ein Resultat von einiger Wahrscheinlichkeit erhalte, wird sich diese auf die gemachte Voraussetzung selbst übertragen.

Da die Excentricität constant erscheint, nehme ich an, dass

$$\pi = \pi_0 + \sigma (t - t_0)$$

rand mit Vernachlässigung der übrigen Satelliten theoretisch¹⁾ und von Baillaud aus den Toulouser Beobachtungen²⁾ bestimmten Werthe von σ , beide in der Nähe von 70° , mit den obigen Beobachtungen schwerlich zu vereinigen sind. Mit Ausnahme für 1875 zeigt sich doch in der Columnne 8 ($\sigma = 64.^\circ 70$) wie auch in einigen anderen ein gewisser Parallelismus mit der zweiten Columnne, der zur Vorsicht gegenüber der aus 4 abgeleiteten Resultate mahnt. Die letzteren sind

$$\begin{aligned} t_0 &= 1875.0 \\ \pi_0 &= 359.^\circ 4 \pm 3.^\circ 6 \\ \sigma &= 33.^\circ 16 \pm 0.^\circ 19. \end{aligned}$$

Die Vergleichung mit den Beobachtungen giebt folgende Abweichungen

1836.38	+ 5.2
1857.01	— 15.4
1857.96	+ 3.9
1875.63	— 8.9
1880.76	+ 12.0
1881.79	— 1.1

und einen wahrscheinlichen Fehler der einzelnen $\pi = \pm 7.^\circ 6$, was der Voraussetzung über die Genauigkeit der Bestimmungen wohl entspricht. Die Excentricität wird

$$0.00803 \pm 0.00077.$$

Für die Bestimmung der Bahnebene stehen uns, da Jacob keine derartigen Elemente aus seinen Beobachtungen abgeleitet hat, nur folgende Daten zu Verfügung.

	Ω .	Wahrsch. Fehler.	i	Wahrsch. Fehler.
1836.38	167° 4.'8	—	26° 37.'8	—
1856.14	165 53.5	± 38.6	27 3.4	± 22.4
1874.74	165 52.6	± 14.5	27 55.1	± 6.7
1875.63	167 17.2	± 9.5	27 0 6	± 3.8
1880.76	165 47.5	—	27 1.7	—
1881.79	169 43.0	± 13.2	27 24.3	± 5.1

¹⁾ Annales de l'Observatoire de Toulouse, Tome 1.

²⁾ Comptes rendus 26 janvier 1885.

gesetzt werden kann. Lässt man π_1 und π_0 die Werthe von π für $t_1 = 1881.79$ und $t_0 = 1836.38$ bedeuten, so ergibt sich σ aus der Formel

$$\sigma = \frac{\pi_1 - \pi_0 + n.360^\circ}{t_1 - t_0}$$

ziemlich sicher, und es kommt nur auf die Bestimmung der ganzen Zahl n an. Es zeigt sich leicht, dass ein $n = 4$ entsprechender Werth von σ sich gut mit den beobachteten Werthen von π vereinigen lässt. Um die Wahrscheinlichkeit hierfür hervortreten zu lassen, habe ich für

$$n = 0, 1, 2, \dots, 10$$

σ aus der vorhergehenden Formel bestimmt und mit diesen verschiedenen σ die Reductionen

$$\sigma(t - 1836.38)$$

auf alle zwischen 1836 und 1881 fallende Epochen berechnet. Diese Zahlen finden sich in den elf letzten Columnen der nachstehenden Tafel. In der zweiten Columnen stehen dieselben Reductionen wie sie aus den Beobachtungen folgen.

Epoche.	$\pi - 165^\circ$	$\sigma_n(t - 1836.38).$										
		$n = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		$\sigma_n = 1.^\circ 30$	$9.^\circ 23$	$17.^\circ 15$	$25.^\circ 08$	$33.^\circ 00$	$40.^\circ 94$	$48.^\circ 87$	$56.^\circ 78$	$64.^\circ 70$	$72.^\circ 64$	$80.^\circ 58$
1836.38	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°
1857.01	303	27	190	354	157	321	124	288	91	255	59	222
1857.96	354	28	199	10	181	353	163	334	146	316	128	299
1875.63	207	51	2	313	264	215	167	118	68	19	331	282
1880.76	38	58	49	41	33	25	17	9	0	352	344	336
1881.79	59	59	59	59	59	59	59	59	59	59	59	59
1856.14	126	26	182	339	136	294	89	246	42	198	355	152
1874.74	336	50	354	298	242	186	130	47	18	321	266	210

Die Vergleichung dieser zweiten Columnen mit den übrigen macht augenscheinlich den Werth $n = 4$ und die entsprechende Bewegung des Perisaturniums, $\sigma = + 33.00$, plausibel. Besonders verdient bemerkt zu werden, dass die von Tisse-

Um die schon hieraus ersichtlichen Schwankungen der Bahnebene deutlicher und einfacher hervortreten zu lassen, habe ich die Elemente jener Tafel in Knoten und Neigung in Bezug auf die Ebene des Ringes verwandelt. Es wurden hierbei wieder für den Knoten und die Neigung der letzteren in Bezug auf die Ecliptik die Werthe

$$\omega = 166^{\circ} 53' 8.''9 + 46.''462 (t - 1800)$$

$$i = 28 10 44.7 - 0.350 (t - 1800)$$

nach Bessel angenommen. Auf solche Weise kamen folgende Elemente zum Vorschein.

	Ω_0	Wahrsch. Fehler.	i_0	Wahrsch. Fehler.
1836.38	185°	—	1° 33.1	—
1856.14	215	± 13.4	1° 22.4	± 21.0
1874.74	254	± 6.3	1° 0.4	± 6.8
1875.63	193	± 3.4	1° 11.5	± 3.8
1880.76	220	—	1° 30.6	—
1881.79	134	± 4.7	1° 7.7	± 5.6

Sie sind, wie man aus den wahrscheinlichen Fehlern ersieht, von ungefähr derselben Genauigkeit wie früher das Perisaturnium und die Excentricität. Wie im Falle der letzteren ist die Secchische Bestimmung auch hier sehr unsicher. In der That wird sie auch von der aus den übrigen sich ergebenden Formel abweichen. Dagegen haben die Beobachtungen von 1874 in diesem Falle ein, nach dem mittleren Fehler zu urtheilen, verwerthbares Resultat geliefert. Suchen wir jetzt, die Zeile 1856 ausschliessend, die Veränderungen der Elemente i_0 und Ω_0 , so zeigt sich zunächst, das derartige bei i_0 kaum anzunehmen sind. Dies Element scheint constant zu sein, und zwar erhält man bei gleichem Gewichte aller Bestimmungen

$$i_0 = 1^{\circ} 16.7 \pm 4.4.$$

Der wahrscheinliche Fehler einer einzelnen Bestimmung, ± 9.8, ist freilich etwas grösser als man aus den in der obigen Tafeln gegebenen wahrscheinlichen Fehlern erwarten

könnte. Da aber die wahrscheinlichen Fehler für 1836 und 1880 nicht bekannt sind, so kann man hieraus keinen Beweis für die Ungiltigkeit der Annahme über i_0 ziehen. Jedenfalls ist diese Voraussetzung nahezu richtig, und wir werden demnach annehmen, dass Ω_0 von der Form

$$\Omega_0 = \Omega_{00} - \gamma (t - t_0)$$

ist. Man sieht leicht, dass ein Werth von γ in der Nähe von 65° den Beobachtungen entspricht. Die nähere Bestimmung giebt das System

$$\begin{aligned} t_0 &= 1875.0 \\ \Omega_{00} &= 227.^\circ 2 \pm 3.^\circ 8 \\ \gamma &= 64.^\circ 22 \pm 0.^\circ 22. \end{aligned}$$

und den wahrscheinlichen Fehler der einzelnen $\Omega_0 = \pm 8.^\circ 2$, ein Resultat, welches auch etwas grösser ist, als der aus den wahrscheinlichen Fehlern der Beobachtungsergebnisse folgende. Ob dies von einer Ungenauigkeit unserer Annahme über die Form von Ω_0 abhängt und ob mehrere Glieder mit verschiedenen Argumenten für die Darstellung der Grössen

$$\begin{aligned} p &= \operatorname{tg} i_0 \operatorname{Cos} \Omega_0 \\ q &= \operatorname{tg} i_0 \operatorname{Sin} \Omega_0 \end{aligned}$$

erforderlich sind, kann nur mittelst wiederholter Beobachtungen entschieden werden. Die Darstellung der Beobachtungen ist folgende.

	$d\Omega_0 (B - R)$
1836	— 1.6
1874	+ 10.1
1875	+ 6.2
1880	+ 2.6
1881	— 17.2
1856	+ 143

Für die ecliptischen Bahnelemente hat man die Formeln

$$\begin{aligned} \operatorname{Sin} i \operatorname{Sin} (\Omega - \omega) &= \operatorname{Sin} i_0 \operatorname{Sin} \Omega_0 \\ \operatorname{Sin} i \operatorname{Cos} (\Omega - \omega) &= \operatorname{Cos} i_0 \operatorname{Sin} \iota + \operatorname{Sin} i_0 \operatorname{Cos} \iota \operatorname{Cos} \Omega_0. \end{aligned}$$

Man erhält hiernach folgende Werthe für die Elemente Ω und i und deren Abweichungen von den Beobachtungen.

	Ω	Fehler.	i	Fehler.
1836	167° 1.'8	+ 3.'0	26° 54.'3	— 16.'5
1874	165 22. 4	+ 30. 2	27 37. 8	+ 17. 3
1875	167 31. 6	— 14. 4	26 54. 1	+ 6. 5
1880	166 13. 5	— 26. 0	27 9. 9	— 8. 2
1881	169 17. 6	+ 25. 4	27 3. 4	+ 20. 9
1856	167 32. 8	— 1° 39. 3	29 27. 1	— 2° 23. 7



NOTE

SUR

LA THÉORIE DE L'INDUCTION UNIPOLAIRE,

PAR

E. EDLUND.

NOTE PRÉSENTÉE À L'ACADÉMIE ROY. DES SCIENCES DE SUÈDE
LE 15 AVRIL 1885.

STOCKHOLM, 1885.

KONGL. BOKTRYCKERIET.
P. A. NORSTEDT & SÖNER.

Une notion correcte de l'induction unipolaire étant d'une grande importance, principalement pour l'interprétation de divers phénomènes cosmiques, j'ai pensé que la communication ci-dessous offrirait de l'intérêt comme addition à ce que j'ai déjà fait connaître dans la matière, tout en essayant de montrer que la théorie adoptée jusqu'ici pour cette induction n'est pas conforme à la réalité.¹⁾

Représentons par *ab* (fig. 1) un aimant d'acier circulaire, ayant l'un des pôles au voisinage de *a* et l'autre à celui de *b*, et soit *cd* la ligne d'un manchon métallique entourant concentriquement l'aimant, la-dite ligne s'appuyant sur les extrémités du conduit *ced*. L'expérience nous apprend, comme on le sait, qu'il ne se produit pas de courant d'induction dans le circuit fermé, si l'on met l'aimant en rotation autour de son axe géométrique, tandis que le manchon et le reste du circuit restent immobiles. Suivant la théorie adoptée jusqu'ici, cela dépendrait de la circonstance que la rotation de l'aimant agit par induction à la fois sur *cd* et sur le circuit *ced*, mais que les effets de cette induction étant d'égale grandeur, ils tendent à produire des courants allant en direction inverse dans le circuit. En conséquence ces courants se neutralisent mutuellement, c.-à-d., en d'autres termes, il ne peut naître de courant.

Si, au contraire, l'aimant est au repos tandis que le manchon *cd* est en rotation avec la même vitesse angulaire et

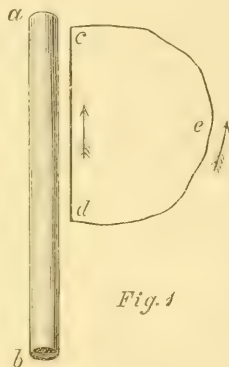


Fig. 1

¹⁾ Mémoires (*Handlingar*) de l'Acad. roy. des sciences de Suède, T. 16 (1878). — Phil. Mag., V. 6 (1878). — Annales de chimie et de phys., T. 16 (1879). — Mém. (*Handlingar*) de l'Acad. roy. des sciences, T. 20 (1884). — Phil. Mag., V. 17 (1884). — Ann. de ch. et de phys., Série 6, T. 2 (1884). — Repertorium der Physik, T. 20. — Central-Blatt für Elektrotechnik, T. 6 (1884).

dans le même sens que l'aimant dans le premier cas, il se produit dans le manchon une force électromotrice d'induction dont la grandeur est égale à celle qui doit être produite suivant cette théorie, quand l'aimant est en rotation et le manchon au repos, quoique l'induction ait lieu en sens inverse dans les deux cas. Ainsi, selon cette théorie, il doit naître, dans chaque élément du manchon, une force électromotrice dont la grandeur est toujours la même, soit que l'aimant se trouve en rotation autour de son axe tandis que le manchon reste immobile, ou que le manchon lui-même se meuve avec la même vitesse angulaire autour de l'aimant immobile. Le sens seul dans lequel agit la force électromotrice produite, est inverse dans les deux cas.

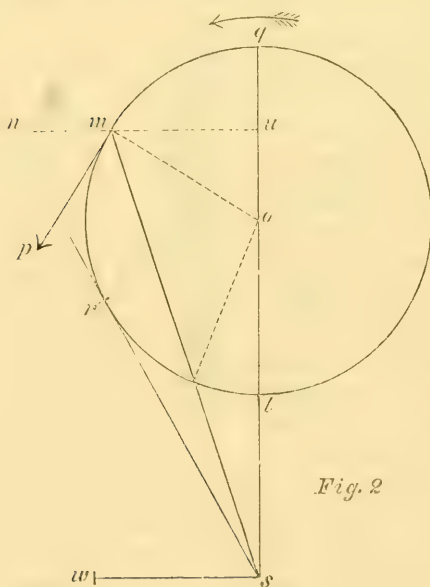


Fig. 2

Nous allons démontrer ci-dessous l'impossibilité pour les deux forces électromotrices d'induction d'être *d'égale grandeur*, d'où il suit nécessairement que la théorie exigeant leur égalité ne peut être correcte.

Représentons par le cercle de la figure ci-contre, la section horizontale d'un aimant vertical à la hauteur où est situé l'un des pôles de l'aimant, et soit s l'élément d'un circuit vertical qui se trouve dans le même plan. Nous supposons maintenant l'aimant divisé en aimants

élémentaires verticaux placés à côté les uns des autres. Des aimants élémentaires qui se trouvent dans la circonférence du cercle, nous considérerons spécialement celui qui est situé au point m . Nous supposons d'abord que l'aimant se meut dans le sens de la flèche autour de l'axe o , et que l'élément de circuit s est au repos. Le pôle de l'aimant élémentaire en m se meut alors dans le sens de la tangente mp . Suivant l'expérience, l'induction unipolaire est proportionnelle à la vitesse

multipliée par l'intensité du champ magnétique et par le sinus de l'angle que la direction du mouvement décrit avec la ligne de jonction entre le pôle et l'élément de circuit dans lequel se produit l'induction. Cette dernière agit en un sens perpendiculaire au plan qui passe par la ligne du mouvement et celle de jonction. Cela est conforme à toutes les observations qui ont été faites jusqu'ici à cet égard.¹⁾ L'induction est au surplus la même que si m était au repos, et que s se mût avec une vitesse égale et parallèle à celle de m , mais en sens inverse de celle-ci. Si m désigne l'intensité et v la vitesse du pôle magnétique en question, l'induction dans l'élément s sera par conséquent égale à $mv \sin. pms$. (Pour la preuve qu'il s'agit de fournir ici, il n'est pas nécessaire d'avoir égard à la distance entre m et s .) L'angle en question est droit pour l'aimant élémentaire situé en q , mais il diminue à mesure que cet aimant se trouve plus près de r , où coïncident la ligne de mouvement et celle de jonction mentionnée, et où par conséquent l'angle qui les sépare est égal à zéro. Pour les aimants élémentaires situés entre r et t , l'angle augmente en grandeur à mesure qu'ils se rapprochent de t , où cet angle devient égal à l'angle droit. Comme l'angle en r dépasse la valeur de zéro, il est évident que le sinus des angles se rapportant aux aimants élémentaires situés entre q et r , aura des signes opposés à ceux des sinus correspondants entre r et t . Il suit par conséquent de là, que les aimants élémentaires situés entre q et r , tendent à produire, dans l'élément de circuit s , une induction en sens opposé à celle que les aimants élémentaires entre r et t essaient de produire dans le même élément de circuit. *L'induction unipolaire de la totalité des aimants élémentaires situés dans la circonférence, devra donc devenir plus petite que si l'induction de cette même totalité agissait dans le même sens.*

Ce qui vient d'être dit ne s'applique, il va de soi, pas seulement aux aimants élémentaires situés dans la circonférence de l'aimant, et c'est tout aussi vrai pour les aimants élémentaires situés sur un cercle quelconque dont le rayon est inférieur à celui de l'aimant entier. La thèse qui précède s'applique par suite à l'induction *totale* de l'aimant sur l'élément de circuit s . Il se comprend aussi sans peine que l'élé-

¹⁾ Nous négligeons ici l'induction due à la modification de la distance entre m et s pendant le mouvement, vu que cette espèce d'induction n'a rien à voir ici, et qu'elle est du reste évidemment égale à zéro pour l'aimant dans sa totalité.

ment en question n'a pas nécessairement besoin d'être situé dans le même plan horizontal que le pôle de l'aimant. Qu'il soit placé plus haut ou plus bas, le même phénomène ne se présentera pas moins, quoique la preuve devienne alors plus compliquée et qu'elle ressorte d'une façon moins immédiate. Cette preuve s'applique par conséquent à un circuit de longueur finie. Nous supposons maintenant que l'aimant est au repos, tandis que, par contre, l'élément de circuit s se trouve en rotation autour de l'axe de l'aimant avec une vitesse angulaire aussi grande que celle de l'aimant dans le cas précédent, mais en sens inverse du mouvement de celui-ci. Dans ce cas, suivant la théorie adoptée jusqu'à ce jour, l'induction unipolaire en s serait aussi grande et offrirait la même direction que si l'aimant se mouvait et l'élément de circuit se trouvait en repos.

L'angle que la ligne de jonction entre le pôle de l'aimant élémentaire et l'élément de circuit s décrit avec la direction du mouvement est droit pour les points q et t ; de ces points, il diminue jusqu'à r , où il a sa plus petite valeur. Le sinus de cet angle ne dépasse par conséquent la valeur zéro en aucun point, et ne change dès lors pas de signe dans son passage de q par r à t . Tous les aimants élémentaires entre q et t concourent ainsi à produire dans l'élément de circuit s une induction unipolaire dans la même direction. Il faut ajouter à cela que le sinus entrant dans l'expression de la grandeur de l'induction unipolaire, est plus grand en ce cas que le sinus correspondant du premier cas. Les seuls sinus des angles correspondant aux points q et t font exception à cet égard, lesdits angles étant droits dans les deux cas, et leurs sinus par conséquent égaux à l'unité. Un simple coup d'œil jeté sur la figure, montre dès l'abord que c'est effectivement ce qui a lieu. Dans le premier cas (où c'est l'aimant que l'on suppose être en rotation) l'angle pms est égal à 90° — l'angle smo . Dans le second cas, au contraire, l'angle $wsm = smu$, vu que mu , de même que ws est perpendiculaire à sq . Or, l'angle smu est égal à 90° — l'angle osm . Mais l'angle smo est plus grand que osm , du fait que, dans le même triangle le premier est opposé à un plus long côté que le dernier. Il suit par conséquent de là, que, sauf pour les points q et t , l'angle pms est toujours plus petit que l'angle wsm . Comme ces angles sont en outre aigus pour chaque point entre q et t , il en résulte que le sinus des angles entre le sens du mouve-

ment et la ligne de jonction est plus petit quand l'aimant se meut autour de son axe, que lorsqu'il est au repos et que c'est l'élément de circuit qui se meut. L'effet de l'induction unipolaire de chaque aimant élémentaire sur l'élément de circuit est par cette cause plus petit dans le premier cas que dans le second; dans le premier cas, en outre, une partie des aimants élémentaires combattent l'action des autres, tandis que dans le second tous agissent dans le même sens. Il suit par conséquent de cette preuve élémentaire, *que lorsque l'aimant se meut autour de son axe, il en résulte, dans le manchon immobile qui l'entoure, une induction unipolaire d'intensité inférieure à l'induction qui se produit dans le manchon si celui-ci se meut tandis que l'aimant est immobile.*

Or, comme la théorie en vigueur jusqu'ici pour l'induction unipolaire exige que cette induction soit d'égale grandeur dans les deux cas, il est impossible que cette théorie soit juste.

Dans les mémoires cités ci-haut, ¹⁾ nous avons démontré par des preuves physiques basées en partie sur la théorie mécanique de la chaleur, que la rotation de l'aimant autour de son axe ne produit pas d'induction dans un circuit au repos. La *rotation* de l'aimant autour de son axe est par conséquent, d'après ces preuves, sans importance aucune à l'égard en question: l'aimant en rotation autour de son axe induit tout aussi peu qu'un aimant immobile sur un conducteur immobile. Tous les effets connus d'induction ne peuvent pas moins, comme il a été démontré dans les mémoires en question, s'expliquer sans peine dans tous les cas qui se présentent. Si cependant l'on voulait prouver, de la manière indiquée ci-haut, que l'induction d'un aimant en rotation sur un conducteur immobile non-seulement est plus petite que lorsque l'aimant est au repos et le circuit en rotation, mais qu'elle se trouve dans la réalité égale à zéro, on se heurterait à un certain nombre de difficultés plus ou moins grandes, entre autres par la raison que l'effet de l'aimant, quand la distance entre ce dernier et le circuit est peu considérable, ne doit pas être regardé comme partant des pôles considérés comme points, mais comme surfaces dont la grandeur ne peut se déterminer à priori. Nous nous sommes contenté par conséquent de montrer que l'induction de l'aimant en rotation est plus petite qu'elle ne devrait l'être, contrairement aux exigences de l'an-

¹⁾ Voir la note p. 3.

cienne théorie. Le fait que l'induction de l'aimant en rotation est effectivement zéro, ressort le plus facilement de la preuve physique suivante déjà citée par nous dans un précédent travail, mais que nous croyons devoir reproduire ici pour être plus complet.

Il a été démontré par des expériences multiples et par suite reconnu comme une vérité physique, que l'induction unipolaire d'un pôle magnétique sur un élément de circuit est proportionnelle au produit de la vitesse du circuit, de l'intensité du champ magnétique provoquée par le pôle magnétique au point où se trouve le conducteur, et enfin du sinus de l'angle que la ligne de force magnétique décrit avec la direction du mouvement de l'élément. Si l'on désigne la vitesse par v , l'intensité du champ magnétique par m et l'angle mentionné par u , l'induction est par conséquent, comme il a déjà été dit, proportionnelle à $mv \sin u$.

Cela posé, nous nous figurons un aimant magnétique vertical, et dans son voisinage une petite aiguille aimantée suspendue de façon à pouvoir se placer facilement dans une direction quelconque. La petite aiguille aimantée viendra se placer alors dans la ligne de force magnétique. Si maintenant l'on fait entrer l'aimant en rotation autour de son axe, l'expérience montre que cette petite aiguille ne modifiera pas pour cela la position qu'elle a déjà prise. Par conséquent, la ligne de force magnétique ne change pas de position du fait de la rotation de l'aimant autour de son axe. Si l'on soumet la petite aiguille magnétique à des oscillations, on trouve aussi que leur nombre dans un temps déterminé est indépendant de la rotation de l'aimant. L'intensité du champ magnétique ne subit par conséquent aucune modification de la rotation de l'aimant autour de l'axe. Il en résulte que u et m ne subissent aucune influence de la rotation, circonstance qui doit aussi être valable pour v , d'autant que v n'est rien autre que la vitesse avec laquelle le conducteur passe d'une ligne de force à l'autre. Il suit nécessairement de là, que la grandeur de l'induction unipolaire est parfaitement égale, que l'aimant soit mis en rotation ou qu'on le laisse au repos. Si donc le manchon qui entoure l'aimant est relié à poste fixe avec celui-ci, et que tous deux soient en rotation autour de l'axe de l'aimant, il en résulte le même effet d'induction dans le manchon que si ce dernier était seul en rotation et que l'aimant fût immobile.

Meddelanden från Stockholms Högskola N:o 42.

ÜBER
DAS KRYSTALLSYSTEM
UND
DIE KRYSTALLOGRAPHISCHEN KONSTANTEN
DES
GADOLINIT.
VON
FR. EICHSTÄDT.

DER K. SCHWED. AKAD. DER WISS. MITGETHEILT DEN 10. JUNI 1885.

STOCKHOLM, 1885.
KONGL. BOKTRYCKERIET.
P. A. NORSTEDT & SÖNER.

O bgleich verschiedene namhafte Krystallographe, unter denen A. NORDENSKIÖLD, WAAGE, V. v. LANG, DES-CLOIZEAUX und G. VOM RATH besonders zu nennen sind¹⁾, sich mit der Frage über die Krystallform des Gadolinit beschäftigt haben, scheint diese Frage doch noch einer endgültigen Entscheidung zu harren.

Nachdem in neuerer Zeit WAAGE und DES-CLOIZEAUX, im Gegensatz zu den früheren Autoren, KUPFFER, A. NORDENSKIÖLD, SCHEERER, PHILLIPS, V. v. LANG, BROOKE und MILLER, sich für das monosymmetrische Krystallsystem des Gadolinit ausgesprochen haben, nimmt G. VOM RATH das rhombische System für Gadolinit aus dem Granit des Radauthales wieder in Anspruch. Dieser Mangel an Uebereinstimmung zwischen den Angaben der verschiedenen Krystallographen scheint auf nichts anderes als auf die unvollkommene Ausbildung und die geringe Zahl der gemessenen Krystalle zurückzuführen zu sein.

In noch neuerer Zeit hat HJ. SJÖGREN aus Upsala die Frage über die eigentliche Krystallform des Gadolinit ange-regt²⁾. SJÖGREN entscheidet sich mit voller Bestimmtheit für die Ansicht DES-CLOIZEAUX's und WAAGE's. Wie wir aber gleich sehen werden, ist den Angaben SJÖGRENS kein allzu grosses Gewicht beizulegen, und die Frage über die Krystallform des Gadolinit schien deshalb nach dem Erscheinen von SJÖGRENS Abhandlung ebenso offen wie vorher. Einerseits leiden die von SJÖGREN gemessenen Krystalle an selbe Mängel der Ausbildung wie dies bei den meisten der früher gemessenen Gadolinite der Fall zu sein scheint, und andererseits sind die Angaben

¹⁾ NAUMANN-ZIRKEL, Elemente der Mineralogie. Zehnte Auflage. Leipzig 1881. Pag. 116.

²⁾ HJ. SJÖGREN, Studier på Gadolinit. Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1882, N:o 7. Stockholm.

sjögrens in mehr als einer Hinsicht weniger befriedigend, so dass eine sichere Folgerung aus ihnen nicht möglich ist. Von der weniger guten Ausbildung der Krystalle habe ich mich durch genaue goniometrische Untersuchung der von sjögren gemessenen, dem hiesigen Reichsmuseum angehörigen, Originalkrystalle überzeugen können.

Die weniger befriedigende Ausbildung dieser Krystalle geht übrigens aus der von sjögren mitgetheilten Tabelle selbst deutlich hervor. Die geringe Zahl der angegebenen Winkel beweist nämlich ohne Zweifel, dass die übrigen Winkel zu sehr von diesen abweichen um in die Tabelle aufgenommen werden zu können. Von den in der Tabelle mitgetheilten Winkeln beweisen wiederum die meisten nicht das geringste mit Hinsicht auf das Krystallsystem, und es muss zum wenigsten als sehr gewagt erscheinen, sein Urtheil auf die vorliegenden kärglichen Thatsachen stützen zu wollen, wie sjögren dies thut. Seine Schlussfolgerungen gründet sjögren nämlich einzig und allein auf folgende Werthe, wenn man die von brögger entliehenen an waage's Originalkrystall gemachten Messungen einstweilen nicht in Betracht zieht.

- 1) Den Winkel zwischen der Basis und dem aufrechten Prisma $OP : \infty P$ ($001 : 110$), welcher an *einem* Krystall gleich $90^{\circ} 19'$ gefunden wurde.
- 2) Die beiden Winkel zwischen demselben Prisma und der vorderen und hinteren Grundpyramide¹⁾, welche einerseits $\infty P : \div P$ ($110 : 111$) gleich $21^{\circ} 44'$ und andererseits $\infty P : P$ ($\bar{1}10 : \bar{1}11$) gleich $22^{\circ} 9,5'$ gefunden wurden. Von diesen Werthen ist aber jener das Mittel von $21^{\circ} 58'$, $21^{\circ} 30'$ und $21^{\circ} 43'$ und dieser von $22^{\circ} 11'$ und $22^{\circ} 8'$. Die Differenz ergibt sich folglich im ersten Falle = $28'$ und im letzteren = $3'$. Es liegt auf der Hand, dass so unvollkommene Messungen *allein für sich* gar nichts beweisen können, wenn man bedenkt, dass der durch die monokline Symetrie bedingte Unterschied der beiden erwähnten Winkel nur

¹⁾ In der Tabelle, Seite 50, bezeichnet sjögren die in Rede stehenden Winkel: $n110 : p11\bar{1}$ und $n\bar{1}10 : o\bar{1}11$. Dies sind aber beide Winkel zwischen einer positiven Pyramide und dem Prisma, und in Folge dessen sollten sie beide gleich gross sein. Da sjögren aber gerade diese Winkel als Beweis der monoklinen Symmetrie hervorhebt, wird hier wohl ein Lapsus in der Bezeichnung vorliegen und die von mir angenommenen Winkel in Wirklichkeit gemeint sein.

7' beträgt, wenn man die von DES-CLOISEAUX gegebenen Konstanten zu Grunde der Berechnung legt. Ebenso wenig kann *eine einzige* Messung des Winkels zwischen der Basis und dem aufrechten Prisma ($90^{\circ}19'$) etwas beweisen, da die Ausbildung der Krystalle jedenfalls eine derartige ist, dass die *besten* Messungen nahezu einen halben Grad von einander abweichen und die Unvollkommenheit nach SJÖGREN'S eigenen Angaben »zuweilen noch viel grösser ist«.

Ferner würden allerdings die Angaben der Winkel zwischen dem Prisma ∞P (110) und der vorderen und hinteren Hemipyramide $\div \frac{1}{2}P$ (112) und $\frac{1}{2}P$ ($\bar{1}12$)¹⁾ beim Krystall 4 (Seite 50) für den monosymmetrischen Charakter des Gadolinit sprechen. Hier muss jedoch nothwendiger Weise ein Irrthum obwalten, da* die erwähnten Formen an dem betreffenden Krystall nicht zusammen vorkommen, wovon ich mich durch Einstellung der betreffenden Zonen aufs Goniometer und Messung derselben habe überzeugen können.

Der in Rede stehende Krystall (genauer zwei mit einander verwachsene Krystalle) lag ebenso wie die übrigen Originalkrystalle SJÖGREN'S für sich in einem kleinen mit SJÖGREN'S Namen nebst Nummer (4) und Seitenhinweis versehenem Glasröhrchen. Eine Verwechslung mit irgend einem der übrigen Originalkrystalle, an und für sich unwahrscheinlich, ist deshalb nicht denkbar, weil die beiden genannten Formen auch bei den übrigen Krystallen²⁾ nicht zusammen vorkommen. Die Pyramide $\div \frac{1}{2}P$ scheint, wie wir später sehen werden, überhaupt gar nicht am Gadolinit von Hitterö vorzukommen.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass die thatsächlichen Beiträge zur Kenntniss der Krystallform des Gadolinit, welche SJÖGREN durch seine Messungen geliefert hat, nicht genügend beweisend sind. Eine Berechnung des Axenverhältnisses hat SJÖGREN auf Grund seiner Messungen auch nicht vorgenommen.

Dagegen scheint die von SJÖGREN sowohl¹⁾ wie von früheren Verfassern hervorgehobene monokline Ausbildung der Krystalle bessere Beweise zu liefern.

¹⁾ SJÖGREN wendet für die in Rede stehenden Flächen allerdings die Indices 221 und $\bar{2}21$ an. Aus den Winkelangaben und den Signaturen $\frac{1}{2}o$ und $\frac{1}{2}p$ geht doch hervor, dass er in Wirklichkeit die beiden Pyramiden $\div \frac{1}{2}P$ (112) und $\frac{1}{2}P$ ($\bar{1}12$) meint.

²⁾ Der Krystall N:o 1, an dem SJÖGREN übrigens nur einen Winkel, nämlich den Prismenwinkel angiebt, scheint freilich zu fehlen.

Auch die von BRÖGGER beobachtete¹⁾ Auslöschungsschiefe $8^\circ - 10^\circ$ ist naturgemäss für das monokline System entscheidend.

Eine erneuerte krystallographische Untersuchung des Gadolinites erschien dennoch wünschenswerth besonders da eine Anzahl vorzüglicher, dem mineralogisch-petrographischen Institut der Hochschule zu Stockholm angehörige Gadolinitkrystalle von Hitterö mir durch die Freundlichkeit des Herrn Professor BRÖGGER zu diesem Zwecke zur Verfügung stand. Die betreffenden Krystalle wurden vergangenen Sommer von Herrn FLINK aus Stockholm für die Rechnung der nämlichen Hochschule eingesammelt.

Als ganzes representirt diese Krystallsuite ein sehr werthvolles Material von Gadolinit. Sicherlich ist dieselbe die schönste Sammlung von zum Messen brauchbarer Gadolinitkrystalle, die überhaupt existirt.

Dessenungeachtet zeigen die Messungen keine ganz befriedigende Uebereinstimmung unter einander. Die Spiegelbilder sind oft breit und undeutlich, so dass keine genaue Einstellung möglich ist. Oder auch treten zwei oder mehrere Spiegelbilder der Lichtspalte auf. Aber selbst dann, wenn die Ausbildung der Flächen eine derartige ist, dass sie einigermaßen gute Ablesungen gestatten, weichen die erhaltenen Werthe doch beträchtlich von einander ab. Durch die Zahl der gemessenen Krystalle und die Uebereinstimmung, die im grossen Ganzen, trotz der Unregelmässigkeiten in der Ausbildung derselben, doch offenbar zwischen sämtlichen Messungen herrscht, glaube ich mich doch zu ganz entscheidenden Resultaten hinsichtlich des Krystallsystems gekommen zu sein. Auch das von mir berechnete Axenverhältniss glaube ich der Wahrheit näher zu kommen als die vorher aufgestellten.

Ausser den rein krystallographischen Bestimmungen sind auch optische Untersuchungen vorgenommen worden, durch welche jene aufs vollständigste bestätigt wurden. Das Material zu dieser Untersuchung ist z. Th. mit gütiger Erlaubniss des Freiherrn NORDENSKÖLD der Sammlung des hiesigen Reichsmuseums entnommen. Die erforderlichen Schliffe sind vom

¹⁾ GROTHS Zeitschrift für Krystallographie etc. Band VIII, Seite 655. 1884.

Präparator des Mineralogischen Instituts der Hochschule zu Stockholm angefertigt worden. Die ganze Untersuchung ist im nämlichen Institute (Director Professor BRÖGGER) vorgenommen, und die Messungen unter Benutzung eines Fuess'schen Goniometers N:o 2 bewerkstelligt worden. Um die Resultate der Messungen vollkommen objectiv darzulegen, werden in folgender Tabelle *sämmtliche* Messungen, die Schimmermessungen nicht ausgeschlossen, angeführt. Solche Schimmermessungen sind natürlich nur dann vorgenommen, wenn es zur Feststellung der einzelnen Krystallformen nöthig erschien.

Wenn die Beschaffenheit der Flächen eine derartige war, dass sie gute oder wenigstens ganz gute Ablesung gestatteten (Karakter der Messung = 1) sind die entsprechenden Winkel mit fetten Zahlen angegeben. Messungen vom Karakter 2 sind mit gewöhnlichen und vom Karakter 3 mit kleineren Zahlen angegeben. Die Schimmermessungen sind noch dazu unterstrichen.

Die Winkel sind nach Zonen geordnet, so dass in jeder horizontalen Reihe zwischen je zwei vertikalen Doppelstrichen die zur selben Zone gehörigen Winkel gefunden werden. Ist der Krystall an beiden Enden ausgebildet, stehen die derselben Zone am unteren Ende angehörigen Winkel unmittelbar unter dem oberen Gegenwinkel. In den verschiedenen Zonen sind die Winkel so gestellt, dass diejenigen, welche wegen der monoklinen Symmetrie ungleich gross sind, neben einander stehen. Im übrigen stehen die Winkel so, dass Oben den Vorzug hat vor Unten und Rechts vor Links.

Das Mittel der Messungen ist in folgender Weise berechnet worden. Erst wurde das Mittel der mit Karakter 1 bezeichneten Werthe genommen. Von den übrigen Winkeln wurden die ausgeschlossen, welche um mehr als 15' von diesem Mittel abwichen, und schliesslich wurde das Mittel sämtlicher übrigen Winkel berechnet. Die beim Berechnen des Mittels ausgeschlossenen Winkel sind zwischen Klammer gesetzt. Wenn durch das Vorhandensein zweier Spiegelbilder zwei Werthe für denselben Winkel gefunden wurden, wird der zweite Werth mit kleineren Zahlen über den ersten angegeben.

Aus dieser Tabelle geht allerdings die Zugehörigkeit des Gadolinit von Hitterö zum monosymmetrischen System unzweideutig hervor. Dies ersieht man unmittelbar durch die Nei-

Resultat der Messungen

	$oP : oP$	$oP : \infty P \infty$ (vorn)	$oP : \infty P \infty$ (hinten)	$oP : \div \frac{1}{2} P \infty$	$oP : \frac{1}{2} P \infty$	$oP : \frac{1}{2} P$
N:o 1	179°56'	-----	-----	-----	-----	51°28' (51°59') (52° 8') (51°53')
N:o 2	-----	-----	90°31'45"	-----	(48°10')	----- 51°14'
N:o 3	-----	89°32'30"	-----	46° 6'	46°51'30"	51°44'30" 51°47'
N:o 4	-----	-----	-----	46°14'30"	-----	-----
N:o 5	-----	(89° 6')	90°37'	-----	-----	-----
N:o 6	-----	89°25'	-----	-----	-----	-----
N:o 7	-----	-----	-----	-----	-----	(49° 1')
N:o 8a	-----	-----	-----	-----	-----	51°23'
N:o 9 (8b)	-----	-----	-----	-----	-----	51°17'
N:o 10	-----	(89°39')	-----	-----	46°45'	51° 7'
N:o 11	-----	-----	-----	(45°49')	47° 4'	51°35'
N:o 12	180°14'	(89°10')	(90°43')	-----	-----	----- (50° 6')
Mittel	-----	89°27'	90°34'	46°10'	46°48'	51°27'
Berechnet	-----	89°26'30"	90°33'30"	46°11'30"	46°47'	51°29'
		1		2		

an Gadolinitkrystalle von Hitterö.

$oP: \div P$	$oP:P$	$oP:\infty P$ (vorn)	$oP:\infty P$ (hinten)	$!P:P$	$\div P:\infty P$	$P:\infty P$
67°53'	68°35'	89°21'	-----	17° 7'	(21°25'30'')	-----
67°41'	-----	89°40'	-----	(16°10')	-----	22°17'
67°45'	68°16'	-----	-----	-----	21°55'	-----
-----	-----	-----	-----	(16°29')	-----	(22°30')
(67°23')	-----	-----	90°38'30''	-----	(22° 3'30'')	-----
67°43'	68°33'40''	-----	-----	-----	21°50'	22° 5'
67°41'	68°18'	89°22'30''	90°15'	-----	21°45'30''	21°57'
67°41'	68°46'	(89°51')	-----	17° 2'	-----	(21°30')
67°43'30''	(67°58')	(89°59')	-----	-----	-----	21°54'30''
67°31'30''	-----	89°22'30'	-----	-----	21°49'30''	22°10'30''
67°28'30''	-----	89°25'	-----	-----	21°56'	-----
-----	-----	-----	-----	-----	-----	22° 4 30''
-----	-----	-----	-----	-----	22° 00'	-----
-----	(68°11')	-----	-----	-----	-----	-----
(67°14'30'')	(67°59')	(89° 9')	-----	-----	21°55'	-----
67°43'30''	68°26'	89°38'	-----	-----	-----	21°47'30''
-----	-----	-----	-----	-----	-----	22° 1'
67°30'30''	-----	-----	-----	-----	-----	-----
(67°25')	-----	89°26'	90°22'	-----	-----	-----
-----	68°20'	-----	-----	-----	-----	-----
67°39'	68°34'30''	-----	-----	-----	-----	-----
67°50'	-----	-----	-----	-----	-----	-----
67°50'30''	-----	89°35'	-----	-----	21°45'	-----
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
67°27'	68°37'	-----	-----	17° 2'	21°45'	-----
(67°25')	-----	-----	-----	-----	-----	-----
67°39'	68°18'	-----	90°37'	-----	-----	(22°22')
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
(67°20')	-----	-----	-----	-----	21°53'	-----
67°50'	-----	-----	-----	-----	-----	-----
67°41'	68°28'30'	89°29'	90°28'	17° 3'30''	21°51'30''	22° 2'
67°41'30''	68°30'	89°31'30''	90°28'30''	17° 1'30''	21°50'30''	21°58'30''
3		4		5		

Resultat der Messungen

	$0P:\frac{1}{2}P\infty$	$0P:P\infty$	$\frac{1}{2}P\infty:P\infty$	$\div P:\div P$	$P:P$	$P:2P_2$
N:o 1	33°28'	52°45'	19°17'	58°52'	(59°38')	-----
	33°25'	(53°16')	-----	58°44'	(59° 6')	21° 9'
	33°38'	(52°26'30'')	-----	-----	-----	-----
	(34° 1')	52°54'	-----	-----	-----	-----
N:o 2	33°21'	52°47'	19°26'	58°44'30'' (58°33'30'')	59°23'	17°34'
	33°21'	52°44'	19°21'	-----	-----	-----
N:o 3	33°42'	(53°19')	19°35'30''	-----	-----	(17°56')
	-----	-----	-----	-----	-----	-----
N:o 4	33°35'	52°54'	19°19'	58°46'	-----	-----
	-----	52°52'	-----	-----	59°18'	-----
	-----	-----	-----	-----	-----	-----
N:o 5	-----	52°47'	-----	58°54'	-----	-----
	-----	(52°25'30'')	-----	-----	-----	-----
	33°28'	(52°28')	(19°00')	-----	(58°34'30'')	18°37'30''
N:o 6	33°28'	52°56'	-----	-----	59°18'	(19°13')
	-----	-----	-----	-----	59°24'	(18°24')
	-----	-----	-----	-----	-----	-----
N:o 7	-----	(53° 7')	-----	-----	-----	-----
	33°41'	52°56'	-----	-----	-----	-----
N:o 8a	33°33'	52°44'30''	19°11'30''	-----	59°27'	(19°32')
	-----	52°53'30''	-----	-----	-----	-----
N:o 9 (8b)	-----	(52°41'30'')	-----	-----	-----	-----
	-----	53° 3'	-----	-----	-----	-----
N:o 10	33°18'30''	52°45'	19°23'	-----	-----	-----
	-----	(52°42')	(19° 5')	-----	-----	-----
N:o 11	33°34'	52°54'	19°15'	-----	-----	-----
	33°27'	52°48'	19°30'	58°58'	59°31'	19° 4'
N:o 12	(33°51'30'')	(53° 9'30'')	19°19'	-----	-----	(18°39')
	-----	53° 3'	-----	-----	-----	-----
Mittel	-----	-----	-----	-----	-----	-----
	-----	-----	-----	58°52'	-----	-----
Berechnet	33°30'	52°52'	19°22'	58°50'	59°23'30''	18°51'
	33°27'	52°53'	19°26'	58°53'30''	59°16'	18°50'

an Gadolinitkrystalle von Hitterö. (Forts.)

$\div P:P$	$\div P:P \infty$	$P:P \infty$	$\infty P:\infty P$ (vorn)	$\infty P:\infty P$ (Seite)	$\infty P_2:\infty P_2$ (Seite)	$\infty P:\infty P_2$
103°23'	51°31'	51°56'	(64°36')	115°36'	-----	(20°16')
103°31'	51°37'	51°57'	-----	115°52'	-----	-----
-----	-----	52° 4'	-----	-----	-----	-----
(103° 2')	-----	(51°46')	-----	-----	-----	-----
103°30'	(51°16')	(52°14')	(63°55'30'')	115°43'	-----	-----
103°19'	51°24'30''	51°54'30''	(64°34'30'')	115°39'30''	-----	-----
(104° 1'30'')	(51°59')	-----	-----	-----	-----	-----
103°41'	51°39'	52° 2'	64°12'	116° 6'30''	76°54'	19° 9'30''
-----	-----	-----	-----	-----	-----	20° 1'30''
-----	51°35'30''	-----	64°24'30''	-----	-----	-----
-----	51°45'30''	-----	-----	-----	-----	-----
-----	-----	-----	64° 2'	-----	-----	-----
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
103°23'	-----	-----	(64°35')	(115°00')	-----	-----
-----	-----	-----	64°25'	(115°12')	-----	-----
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
103°14'30''	(51°10')	52° 4'	-----	-----	-----	-----
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
-----	-----	-----	64°13'	115°53'	76°52'	19°20'
-----	-----	-----	-----	-----	-----	19°42'
103°10'	-----	-----	-----	-----	-----	-----
103°29'	51°32'	51°57'	-----	-----	-----	-----
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
-----	-----	-----	64°10'	-----	-----	-----
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
103°24'30''	51°35'30''	51°59'	64°16'	115°48'20''	76°53'	19°33'
103°37'30''	51°41'	51°56'30''	64°12'	115°48'20''	77° 7'	19°21'

gung der Basis $OP(001)$ zum Ortopinakoid $\infty P \infty(100)$, welche an sechs der Krystalle direkt gemessen wurde. Obgleich besonders das Ortopinakoid stets weniger gut ausgebildet ist, stimmen die verschiedenen Messungen, welche das Mittel von je 10 Ablesungen sind, einigermassen mit einander. Am Krystall N:o 12 war sowohl die Basis als das Ortopinakoid beiderseits am Krystall entwickelt; die Axenschiefe konnte folglich hier durch 4 direkte Messungen festgestellt werden. Mittlerweile ergab sich der Winkel zwischen der Basis oben und unten $= 180^\circ 14'$. Da es jedoch durch die übrigen Messungen festgestellt werden konnte, welche der beiden Flächen schief lag gegen die übrigen Formen des Krystalls, wurden die entsprechenden Werthe oder $89^\circ 10'$ und $90^\circ 43'$ beim Berechnen des Mittels ausgeschlossen, obgleich die Ablesungen an und für sich verhältnissmässig ganz gut waren. Diese Messungen gehen jedoch in ganz dieselbe Richtung wie die übrigen und ihr Fehler besteht nur darin, dass sie eine zu grosse Axenschiefe ergaben.

Ausser durch die direkte Neigung der Basis zum Ortopinakoid geht die monokline Symmetrie durch sämtliche der mit 2, 3, 4, 5, 6 und 7 bezeichneten vertikalen Doppelreihen in der Tabelle hervor, welches sich ohne Weiteres aufs Deutlichste ergibt.

Das Axenverhältniss ist unter Zugrundelegung folgender Winkel¹⁾ berechnet worden:

$$oP : \infty P \infty (001 : 100) = 89^\circ 26' 30''$$

$$\infty P : \infty P (\text{Seite}) (110 : \bar{1}10) = 115^\circ 48' 20''$$

$$oP : P \infty (001 : 011) = 52^\circ 53' 00''.$$

Von diesen Winkeln ist die Axenschiefe β als Mittel des negativen und positiven Neigungswinkels der Basis zum Ortopinakoid (Doppelkolumne 1 der Tabelle) berechnet worden. Der Seitenwinkel des aufrechten Prismas $= 115^\circ 48' 20''$ ist das Mittel von 6 Messungen. Er weicht etwa $4'$ von dem vorderen Winkel desselben Prismas $= 64^\circ 16'$ (Mittel von 9 Messungen) ab, dessen Supplement er naturgemäss genau sein sollte. Der Winkel $52^\circ 53'$ ist der halbe $\wedge$ des Klinodomas $P \infty : P \infty (011)$ des Krystalls 4, an welchem beide

¹⁾ Die Winkelangaben beziehen sich in dieser Abhandlung immer auf die durch die Ablesungen direkt gefundenen Werthe.

erwähnte Flächen vorzügliche Ablesungen gestatteten. Nämlicher Werth weicht nur 1' vom Mittel sämtlicher Messungen ab.

Die aus diesen Winkeln berechneten krystallographischen Konstanten sind:

$$a : b : c = 0,62726 : 1 : 1,32149$$

$$\beta = 89^{\circ}26'30''$$

Die aus diesen Konstanten berechneten Winkel stimmen, wie aus der Tabelle zu sehen ist, im Allgemeinen in so befriedigender Weise, wie bei der Ausbildung der Krystalle überhaupt zu erwarten ist, mit dem Mittel der durch die Messungen erhaltenen Werthe. Es ist zu bemerken, dass diese Berechnung erst vorgenommen wurde, nachdem die Tabelle aufgestellt und die Mittel daraus berechnet waren. Ausnahme ist eigentlich nur der seitliche Polkantwinkel der Grundpyramiden $\div P : P(111 : \bar{1}11)$, wo die Differenz zwischen berechnetem und gefundenem Werth 13' ausmacht. Da aber die Winkel zwischen den beiden genannten Pyramiden und dem Klinodoma $P \infty (011)$ bessere Uebereinstimmung mit den berechneten zeigen, scheint dies nicht von Belang zu sein. Dass der Winkel des Prismas $\infty P_2 : \infty P_2 (120 : \bar{1}20)$ nebst dem Winkel zwischen diesem Prisma und dem Grundprisma ∞P weniger genügend stimmen, ist durch die schlechte Ausbildung ersterer Form und die geringe Zahl der Messungen leicht erklärlich.

Ausser den in der Tabelle angegebenen Formen kommen noch folgende Formen vereinzelt und schlecht ausgebildet vor:

$\frac{3}{4}P(\bar{3}34)^{*1)}$, $\frac{2}{3}P(\bar{2}25)^{*}$, $\div \frac{2}{3}P(225)$, $\div \frac{1}{3}P(113)$, $\frac{1}{4}P(\bar{1}14)^{*}$, $\div \frac{1}{5}P(115)^{*}$, $\div \frac{1}{10}P(1.1.10)$, $P_2(\bar{1}22)$, $2P_4^{\frac{1}{2}}(8.10.5)$, $2P \infty (021)$ und $\infty P \infty (010)$.

Am Gadolinit von Hitterö sind demnach folgende 23 Partialformen von mir wahrgenommen worden:

Pinakoide

die Basis $oP(001)$

das Ortopinakoid .. $\infty P \infty (100)$

das Klimopinakoid $\infty P \infty (010)$

¹⁾ Die mit einem Stern bezeichneten Formen kamen an einem so schlecht entwickelten Krystalle vor, dass der Sinn der Axenschiefe und somit das Zeichen der in Rede stehenden Formen nicht mit Sicherheit bestimmt werden konnte.

Ortodomen

$$\div \frac{1}{2}P \infty (102)$$

$$\frac{1}{2}P \infty (\bar{1}02)$$

Klinodomen

$$\frac{1}{2}P \infty (012)$$

$$P \infty (011)$$

$$2P \infty (021)$$

Prismen

$$\text{der Grundreihe} \dots \infty P \quad (110)$$

der klinodiagonalen

$$\text{Reihe} \dots \infty P_2 \quad (120)$$

Pyramide

$$\text{der Grundreihe} \dots \div P \quad (111)$$

$$P \quad (\bar{1}\bar{1}\bar{1})$$

$$\frac{3}{4}P \quad (\bar{3}\bar{3}\bar{4})^*$$

$$\frac{1}{2}P \quad (\bar{1}\bar{1}\bar{2})$$

$$\frac{2}{5}P \quad (\bar{2}\bar{2}\bar{5})^*$$

$$\div \frac{2}{5}P \quad (225)$$

$$\div \frac{1}{3}P \quad (113)$$

$$\frac{1}{4}P \quad (\bar{1}\bar{1}\bar{4})^*$$

$$\div \frac{1}{5}P \quad (115)^*$$

$$\div \frac{1}{10}P \quad (1.1.10)$$

der klinodiagonalen

$$\text{Reihe} \dots 2P_2 \quad (\bar{1}\bar{2}\bar{1})$$

$$P_2 \quad (\bar{1}\bar{2}\bar{2})$$

$$\div 2P_{\frac{5}{4}}? \quad (8.10.5)$$

Von diesen sind folgende Formen für den Gadolinit von Hitterö neu und werden nicht von SJÖGREN¹⁾ erwähnt:

$$\infty P \infty (010), \frac{3}{4}P (\bar{3}\bar{3}\bar{4})^*, \div \frac{1}{3}P (113), \frac{1}{4}P (\bar{1}\bar{1}\bar{4})^*, \div \frac{1}{5}P (115)^*, \\ \div \frac{1}{10}P (1.1.10), \frac{2}{5}P (225)^*, \div \frac{2}{5}P (225), P_2 (\bar{1}\bar{2}\bar{2}), \div 2P_{\frac{5}{4}}(8.10.5).$$

Dagegen führt SJÖGREN noch folgende Formen an:

$$: \frac{1}{2}P (112), \div 2P_2 (121), \frac{3}{4}P_2 (\bar{1}\bar{2}\bar{3}), \div 3P_{\frac{3}{2}} (231), \div 3P_{\frac{3}{2}} (321), \\ \frac{3}{2}P \infty (023), \frac{1}{3}P \infty (013), \frac{1}{4}P \infty (014) \text{ und } P \infty (\bar{1}\bar{0}\bar{1}).$$

¹⁾ Verschiedene von DES-CLOIZEAUX's Formen wurden nicht berücksichtigt, da er keine Messungen anführt, aus denen zu ersehen ist, ob sie positiv oder negativ sind.

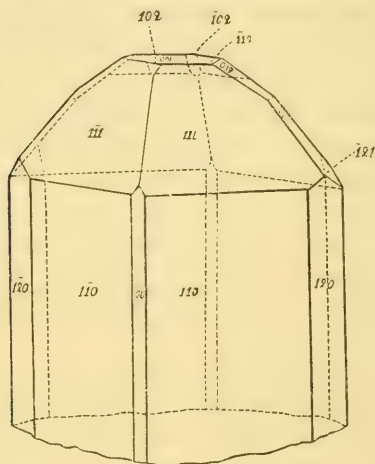
Von diesen sind aber die Pyramiden $\div \frac{1}{2}P$ und $\div 2P_2$ höchst wahrscheinlich nicht vorhanden, und wenn SJÖGREN dennoch ausdrücklich hervorhebt, dass sie dies sind, scheint dies auf ein Irrthum zu beruhen. An allen den Krystallen, die ich zu sehen Gelegenheit gehabt habe (und hierher gehören auch SJÖGRENS Originalkrystalle), kommen die beiden erwähnten Pyramiden nämlich nur an der einen Seite vor und zwar, wenn sie zusammen vorkommen, immer an derselben Seite. Wo ich ferner Gelegenheit hatte die Neigung der Basis durch Messungen zu bestimmen, erwiesen sich diese beiden Pyramiden stets als positive. Dies war bei 18 Krystallen von 20 (ausser an den in der Tabelle aufgenommenen Krystallen wurde die Axenschiefe noch an mehreren anderen, die zu Präparaten verwendet wurden, bestimmt) der Fall, und scheint es deshalb keinem Zweifel unterworfen, dass dies allgemeingültige Regel sei. Die Zahl der von SJÖGREN wahrgenommenen Formen sind demnach statt 22, höchstens 20. Legt man zu diesen die von mir dargewiesenen 10 neuen Formen, wird die Gesamtzahl der bis jetzt beim Gadolinit von Hitterö beobachteten Formen 30.

Was die beiden Hemipyramiden $\pm \frac{1}{2}P$ im übrigen anbelangt, sagt SJÖGREN (Seite 53, Zeile 26), dass »die Pyramide $\frac{1}{2}o$ (112) ganz gewöhnlich sei, während die entsprechende auf der anderen Seite vom Krystall $\frac{1}{2}h$ (112) selten ist». Es ist jedoch nicht zu ersehen, welche der beiden Pyramiden SJÖGREN mit der Signatur $\frac{1}{2}o$ ($\bar{1}12$) eigentlich meint, ob die positive oder die negative. Sieht man nämlich auf den Tafeln nach und geht von der Voraussetzung aus, dass die Basis und somit auch die a-Axe nach vorne gegen den Beschauer neigen, so liegt die so bezeichnete Pyramide vorne oben und ist demnach negativ. Somit wäre die negative Pyramide $\div \frac{1}{2}P$ nach SJÖGREN sogar die gewöhnlichere. Für die Annahme dass SJÖGREN in den Zeichnungen die Basis nach vorne neigen lässt, wie dies ja allgemein angenommener Gebrauch ist, dagegen die Indices aus irgend einem Grunde vertauscht hat, sprechen die Angaben, dass der Winkel » $n\ 110:c\ 001$ » = $90^\circ 19'$ sei (die Tabelle Seite 50, Zeile 20) und die von BRÖGGER entliehenen Winkel » $c\ 001:n\ \bar{1}10$ » (Seite 51, Zeile 4) = $90^\circ 25' 35''$ und » $n\ \bar{1}10:c\ 001$ » (Zeile 9) = $89^\circ 37' 50''$ seien.¹⁾ In diesem Sinne

¹⁾ N. b. Die nach BRÖGGER angeführten Zahlen beziehen sich auf die wirklichen Winkel und nicht auf die Supplemente wie die übrigen Angaben SJÖGRENS.

hat BRÖGGER in seinem Referate²⁾ über SJÖGRENS Abhandlung die Angaben des letzteren aufgefasst und wiedergegeben. Auch die Mittheilung, die BRÖGGER in diesem Referate über die Lage der optischen Elasticitätsachsen macht, bezieht sich hierauf, indem BRÖGGER die erwähnte Fläche als »Leitfläche« benutzt, um die Richtung der Axenschiefe zu bestimmen.

Andererseits aber bezeichnet SJÖGREN obige Pyramide als positiv (Seite 53, Zeile 5 von unten) während auch andere



Umstände dafür zu sprechen scheinen, dass er mit der Vorderseite der Zeichnungen die Hinterseite der Krystalle in Wirklichkeit meint. SJÖGREN hat dann aber wider allen Gebrauch und ohne es besonders zu bemerken, die Krystalle in der Zeichnung und sogar auch die Projectionsebene ganz umgedreht. SJÖGRENS im vorigen erwähnten Angaben sind in diesem Falle natürlich fehlerhaft oder richtiger fehlerhaft verwendet.

Was den allgemeinen Habitus der betreffenden Gadolinite im Uebrigen angeht, so sind das Prisma $\infty P(100)$, die Grundpyramide $P(111)$, die Basis $\infty P(001)$ und die beiden Klinoedomen $\frac{1}{2}P\infty$ und $P\infty$ gewöhnlich die vorherrschenden und den Habitus der Krystalle bestimmenden Formen. Nur mehr untergeordnet treten, wie oben schon bemerkt, die übrigen Formen an den Krystallen auf, obgleich einige derselben z. B.

²⁾ GROTHS Zeitschrift für Krystallographie etc. Band VIII, Seite 654. 1884.

$\frac{1}{2}P$ ($\bar{1}13$) und $2P_2$ ($1\bar{2}1$) sehr gewöhnlich sind. Die beistehende Figur mag als allgemeiner Typus eines Gadolinitkrystals, an dem die gewöhnlichsten Formen angegeben sind, gelten.

Die monokline Symmetrie der Krystalle tritt durch das einseitige Auftreten gewisser Formen hervor. Dass dies bei den beiden Pyramiden $\frac{1}{2}P$ und $2P_2$ stets der Fall ist, indem sie nur als positive Formen vorkommen, ist im vorigen schon genügend betont worden. Aber auch mehrere der seltneren Flächen sind nur an der einen Seite der Krystalle beobachtet worden, obgleich es noch nicht zu bestimmen ist, ob auch diese Formen überhaupt nur an der einen Seite auftreten.

Um die Lage der optischen Elasticitätsaxen zu bestimmen, wurden ausser BRÖGGERS Originalplatte noch 3 Schiffe parallel der Symmetrieebene angefertigt. Bei der Untersuchung dieser Platten mit dem Mikroskope erwiesen sie sich zum grössten Theile aus einer homogenen, schwer durchsichtigen aber lebhaft polarisirenden bräunlich-gelben (mit Strich ins Grüne) Substanz zu bestehen. In dieser Hauptmasse kommen jedoch hellere grüne Partien¹⁾, zum Theil mit scharfer geradliniger Begrenzung vor. Diese grünen Partien haben eine andere Auslöschungsschiefe als die Hauptmasse, scheinen aber unter sich eine ganz bestimmte optische Orientirung inne zu halten. Nach Professor BRÖGGERS mir mitgetheilten Ansicht, für welche er demnächst die Beweise zu liefern gedenkt, repräsentiren diese grünen Flecke die ursprüngliche eigentliche Gadolinitsubstanz, während die braungelbe Masse eine Stufe der Umwandlung, dessen Endglied die isotropen Gadolinite (von Ytterby, Broddbo etc.) sei. Die bisherigen chemischen Analysen beziehen sich demnach nicht auf frische Gadolinitsubstanz, sondern auf eine durch einen Umwandlungsakt hervorgegangene.

Für die Schiefe der Auslöschung gegen die Vertikalaxe wurden in den vier Platten folgende Zahlen gefunden:

Die bräunlichgelbe Masse: Die grüne Masse:		
Erste Platte	13°	—
Zweite »	13°,5	9°
Dritte »	12°,5	7°,5
Vierte »	13°,3	8°

Die eine der optischen Elasticitätsaxen und zwar die spitze Bissectrix bildet demnach etwa 13° mit der c-Axe für die

bräunlichgelbe Substanz und für die grüne etwa $4^{\circ},5$ weniger oder $8^{\circ}-8^{\circ},5$. Die Abweichung geht in dem Sinne, dass der stumpfe Axenwinkel von der Bissectrix getheilt wird. Aus der Gleichheit der Axenschiefe in den drei Platten für jede Substanz für sich scheint hervorzugehen, dass jede derselben eine ganz bestimmte chemische Zusammensetzung habe.

Während die grünen Flecke keinen merkbaren Pleokroismus zeigen ist dieser sowohl wie die Lichtabsorption der bräunlichgelben Masse ganz deutlich. Der $\parallel c$ schwingende Strahl ist bräunlichgelb, der $\parallel a$ schwingende gelblichbraun mit einem Strich ins Rothe. Die Lichtabsorption ist $a \text{ ung.} = b > c$.

Um den optischen Axenwinkel zu bestimmen wurden zwei Platten senkrecht zur Symmetrieebene, in welcher die optischen Axen liegen, und je eine senkrecht zur ersten und zweiten Mittellinie geschliffen. Die Hauptmasse wurde bei der nöthigen Dicke der Platten nicht hinreichend durchsichtig um ein Axenbild zu geben. Bei den grünen Flecken ging dies eher, obgleich die Platten doch so dünn gemacht werden mussten, dass die Hyperbelarme äusserst undeutlich wurden. Von den homogenen Flammen war nur die Natriumflamme lichtstark genug um die Hyperbelarme sehen zu lassen. Die Messungen im Natriumlicht in Mohnöl ergaben annähernd:

Für den stumpfen Axenwinkel.....	118°20'
» » spitzen »	105°

Der hieraus berechnete wahre Axenwinkel beträgt $85^{\circ}28'$. Seinem optischen Charakter nach erwies sich der Gadolinit als positiv.

DES-CLOIZEAUX¹⁾ giebt den Winkel der Axenschiefe zu $3^{\circ}30'$ an, welches nach sowohl BRÖGGERS wie meinen Messungen (Seite 6) entsschieden zu niedrig ist. Der Winkel 2Ha (Brechungsexponent des betreffenden Öls nicht angegeben) ist von DES-CLOIZEAUX gemessen worden:

für Roth =	$106^{\circ} 6'$
» Gelb =	$107^{\circ} 18'$
» Blau =	$109^{\circ} 27'$

Der optische Charakter wird als positiv angegeben und die Dispersion als incliné.

¹⁾ DES-CLOIZEAUX, Manuel de Minéralogie, Tom. second. Pag. XIII, Paris 1874 et Ann. d. chim. et d. phys. 4 Sér. B. 18 (1869).

10, 1885
av. # 62500
10 D 48

BIHANG

TILL

KONGL. SVENSKA VETENSKAPS-AKADEMIENS

HANDLINGAR.

TIONDE BANDET.

Häfte 1.

INNEHÅLL.

	Sid.
1. SANIO, C. Beschreibung der Harpidien, welche vornehmlich von Dr. ARNELL während der schwedischen Expedition nach Sibirien im Jahre 1876 gesammelt wurden	1— 62.
2. RYDBERG, J. R. Om de kemiska grundämnenas periodiska system. Med 2 taflor	1— 31.
3. LINDMAN, C. F. Observations sur les tables d'intégrales définies de Mr. BIERENS DE HAAN	1—268.
4. BOIJE AF GENNÅS, C. O. Sur la sommation des puissances sem- blables des n premiers nombres entiers	1— 6.

Pris: 8 kronor.





BIHÅNG

TILL

KONGL. SVENSKA VETENSKAPS-AKADEMIENS

HANDLINGAR.

TIONDE BANDET.

Häfte 2.

INNEHÅLL.

	Sid.
5. CLAËSSON, P. Öfver radikalen Cyanur	1— 14.
6. CLAËSSON, P. Öfver normala Cyanurföreningar	1— 18.
7. CLAËSSON, P. Öfver substituerade Cyaniders konstitution	1— 5.
8. CLAËSSON, P. Om Rhodaninsyra	1— 16.
9. BOVALLIUS, C. A new Isopod from the swedish arctic expedition 1883. With 2 plates	1— 13.
10. BOVALLIUS, C. A new Isopod from the Coast of Sweden. With 2 plates	1— 11.
11. BOVALLIUS, C. New or imperfectly known Isopoda. With 5 plates.	1— 32.
12. AGARD, J. G. LINNÉS lära om i naturen bestämda och bestående arter hos växterna, efter LINNÉS skrifter framställd och med motsvarande DARWINS åsigter jemförd	1—135.
13. HAMBERG, A. Hydrografisk-kemiska iakttagelser under den svenska expeditionen till Grönland 1883. II. Med 4 tafior	1— 57.
14. BOVALLIUS, C. On some forgotten genera among the amphipodous Crustacea. With 1 plate	1— 18.
15. CLAËSSON, P. Om Melamin och Melamföreningar	1— 19.
16. BOHLIN, K. Ueber die Bahnelemente des dritten Saturn-Satelliten Tethys	1— 48.
17. EDLUND, E. Note sur la théorie de l'induction unipolaire	1— 8.
18. EICHSTÄDT, FR. Ueber die kristallographischen Constanten des Gadolinit	1— 18.

Titelblad och innehållsförteckning till 10:e bandet.

Pris: 12 kronor.









MBL WHOI Library - Serials



5 WHSE 02720

